GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Sugerencia metodológica
Tomo 2

Sugerencia metodológica Tomo 2 Matemática Bachillerato 2

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

ESMate

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de Ciencia y Tecnología *ad honorem*

Wilfredo Alexander Granados Paz
Director Nacional de Currículo

Edgard Ernesto Abrego Cruz
Director General de Niveles y Modalidades Educativas

Janet Lorena Serrano de López
Directora Nacional de Asesoramiento Educativo y Desarrollo Estudiantil

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Gerente Curricular para el Diseño y Desarrollo de la Educación General

Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Matemática

Coordinación y revisión técnica
César Omar Gómez Juárez

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
César Omar Gómez Juárez
Francisco Antonio Mejía Ramos

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez   Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Marlene Elizabeth Rodas Rosales   Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra una figura formada por triángulos rectángulos cuyas áreas disminuyen a razón de dos, y se puede calcular su área a partir de ello. La respuesta se encuentra al reverso de la contraportada.

510
M425 Matemática : segundo año de bachillerato [recurso electrónico]: , sugerencia metodológica tomo 2 / Ana Ester Argueta Aranda, Diana Marcela Herrera Polanco, César Omar Gómez Juárez, Francisco Antonio Mejía Ramos;
s/v Diagramación Judith Samanta Romero de Ciudad Real, Francisco René Burgos Álvarez. --2ª. ed.. --
San Salvador, El Salv. : Ministerio de Educación (MINED), 2020.
1 recurso electrónico (254 p. ; ilus. ; 28 cm. - (Esmate)

Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 11 mb) . -- http://www.mined.gob

ISBN 978-99961-356-6-8 (E-Book)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza -- Metodología. I. Argueta Aranda, Ana Ester, coaut. II. Título.
BINA

Estimadas y estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, en el que expresamos nuestro agradecimiento y estima por la importante labor que desempeñan en beneficio de la sociedad salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE 2) se ha diseñado la guía metodológica, que será una herramienta importante para la labor docente que realizan día a día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas y precisas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático en el estudiantado salvadoreño.

Es importante señalar que la Guía metodológica está en correspondencia con las actividades y secuencia para el desarrollo de las clases propuestas en el Libro de texto y Cuaderno de ejercicios diseñados para el estudiantado, concretizando de esta manera lo emanado y anhelado en el Programa de estudios de Matemática.

Aprovechamos esta oportunidad para expresar nuestra confianza en ustedes. Sabemos que leerán y analizarán esta Guía metodológica con una actitud dispuesta a aprender y mejorar, tomando en cuenta su experiencia y su formación docente. Creemos en su compromiso con la niñez y la juventud salvadoreña para que puedan desarrollarse integralmente.

Atentamente,

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia
y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de
Ciencia y Tecnología, *Ad honorem*

Índice

Unidad 5. Funciones trascendentales II

Competencia de la unidad

Describir los elementos y características de la función logaritmo y de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente por medio de su definición o gráfica para interpretar situaciones modeladas por funciones.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 2: Raíz cuadrada (9°)
- Raíz cuadrada y números reales
- Operaciones con raíces cuadradas

Primer año de bachillerato

Unidad 1: Números reales
- Números reales

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Unidad 5: Resolución de triángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales II
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Función biyectiva e inversa	1	1. Funciones inyectivas
	1	2. Funciones sobreyectivas
	1	3. Funciones biyectivas
	1	4. Composición de funciones
	1	5. Dominio de la función composición
	1	6. Función inversa
	1	7. Existencia, dominio y rango de la función inversa
	1	8. Practica lo aprendido
2. Función logarítmica	1	1. Definición de logaritmo
	1	2. Logaritmo de un número
	1	3. Propiedades de los logaritmos
	1	4. Cambio de base de un logaritmo
	1	5. Definición de la función logarítmica y su gráfica
	1	6. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica
	1	7. Ecuaciones logarítmicas, parte I
	1	8. Ecuaciones logarítmicas, parte II
	1	9. Logaritmo base 10 y logaritmo natural
	1	10. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2

Lección	Horas	Clases
3. Funciones trigonométricas	1	1. Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)
	1	2. Círculo trigonométrico
	1	3. Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico
	1	4. Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico
	1	5. Función seno
	1	6. Función coseno
	1	7. La tangente en el círculo trigonométrico
	1	8. Gráfica de la función tangente
	1	9. Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas
	1	10. Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas
	1	11. Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas
	1	12. Forma general de las funciones trigonométricas
	1	13. Sistema circular de ángulos
	1	14. Practica lo aprendido
	1	15. Problemas de la unidad
4. Práctica en GeoGebra	1	1. Funciones trigonométricas
	1	2. Construcción de las funciones seno y coseno
	1	3. Construcción de la función tangente
	1	4. El método de exhaución
	1	Prueba de la lección 3

37 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Función biyectiva e inversa

El estudiante tiene como base de primer año de bachillerato el concepto de función, dominio y gráfica; además conoce las funciones lineal, cuadrática, cúbica, racional, raíz cuadrada y exponencial; por lo que, en esta lección se utilizan estas funciones para estudiar las definiciones de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. En las clases se priorizan los métodos gráficos, como son: el trazo de una curva horizontal para determinar la inyectividad y la determinación gráfica del rango de una función; no obstante, se introducen también los métodos algebraicos, los cuales formalizan los procesos realizados. Estos conceptos permitirán introducir la operación de composición de funciones en dos clases, la primera para determinar la ecuación de la función composición y posteriormente estudiar el dominio correspondiente. Luego se establece la definición de función inversa en dos clases, la primera aborda cómo se determina la ecuación de la función inversa y la segunda plantea la posibilidad de determinar la función inversa para cierto tipo de funciones, cómo trazar su gráfica y cuál es el dominio y rango asociado.

Lección 2: Función logarítmica

Se inicia con la definición de logaritmo, aquí se establece una relación inversa con la definición de la potencia de un número, luego se utiliza la descomposición en factores para determinar el valor del logaritmo de un número. Se establecen las propiedades de los logaritmos de forma particular y de forma general, posteriormente se trabaja la propiedad del cambio de base, luego se estudia la función logarítmica y se establece su relación con la función exponencial como funciones inversas respecto a la composición. Se resuelven ecuaciones logarítmicas en dos clases, la primera trata aquellos casos en los que se aplica directamente la definición de logaritmo para determinar la solución, se introduce además la resolución de ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos; en la siguiente clase las ecuaciones necesitan el paso adicional de aplicar alguna de las propiedades de los logaritmos, ambas clases hacen hincapié en realizar la comprobación de las soluciones evaluándolas en cada argumento de los logaritmos de la ecuación y debe verificarse que este sea positivo. Por último, se estudia el conteo de dígitos de un número como aplicación del logaritmo base 10.

Lección 3: Funciones trigonométricas

En esta lección se hace énfasis en las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Primero se establecen las razones trigonométricas como funciones del ángulo, tomando como base la razón trigonométrica de un ángulo en el plano, definida a partir de un punto sobre su lado terminal, o su prolongación; en ese sentido también se introduce el círculo trigonométrico (CT) para facilitar la representación de las razones trigonométricas por medio del círculo de radio uno, lo que permite, además, estudiar de manera representativa la periodicidad de las funciones seno, coseno y tangente. Luego se grafica cada función en el plano cartesiano y se estudian el periodo, la amplitud y los desplazamientos. Hasta este punto se ha trabajado con ángulos en el sistema sexagesimal, con el fin de no complicar al estudiante el trazo de las gráficas de las funciones, al convertir ángulos en radianes, por tal razón, el concepto de radián se estudia por último. En el sistema circular de ángulos se toma como base la longitud del arco subtendido por un ángulo en el círculo trigonométrico.

Lección 4: Práctica en GeoGebra

En primer lugar se estudian los desplazamientos, la amplitud y el periodo de las funciones trigonométricas, poniendo en práctica lo recién aprendido sobre el sistema circular con el cual trabaja GeoGebra y se utilizan los deslizadores y las animaciones. Luego se construyen las funciones a partir del círculo trigonométrico utilizando otras herramientas de GeoGebra como el rastro de un punto, cuya animación genera la gráfica deseada. Otra de las herramientas utilizadas es la función SI, que tiene relación con las estructuras de control de la unidad 4 de la asignatura de Informática; sin embargo, el estudiante podrá prescindir de su conocimiento gracias al desarrollo de la práctica en el Libro de texto. Por último se estudia el método de exhaución para aproximar el valor de la constante π, el objetivo de esta práctica es explorar un método histórico para el calculo del área del círculo pero en este caso por medio de un software.

1.1 Funciones inyectivas

Problema inicial

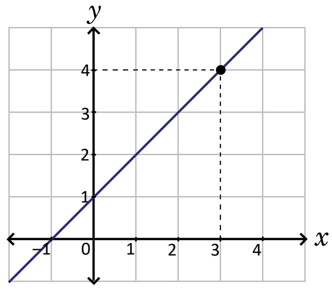
Responde las siguientes preguntas:

a) Sea $f(x) = x + 1$, se sabe que $f(3) = 4$, ¿existe otro valor x en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$?

b) En el caso de la función $f(x) = x^2$, se cumple que $f(2) = 4$, ¿ocurre lo mismo que el caso anterior?

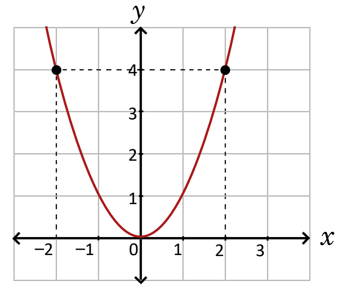
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x + 1$.



El único valor de x tal que $f(x) = 4$ es $x = 3$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No ocurre lo mismo, ya que existen dos valores de x que cumplen $f(x) = 4$: $x = 2$ y $x = -2$.

Definición

Una función f : A $\longrightarrow$ B es **inyectiva** en A, si a valores diferentes del conjunto A le corresponden valores diferentes del conjunto B. Simbólicamente: si a, b son elementos de A con $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

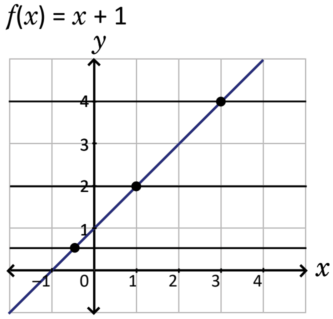
También se puede definir de la siguiente manera: f : A $\longrightarrow$ B es **inyectiva** en A, si a cada imagen en B le corresponde una única preimagen de A.

Para determinar gráficamente la inyectividad de una función se trazan rectas horizontales sobre la gráfica, si una recta interseca a la gráfica en dos o más puntos, entonces la función no es inyectiva.

Ejemplo

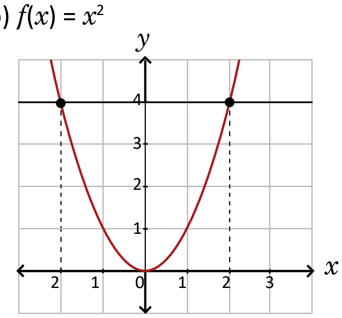
Determina si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f(x) = x + 1$



Toda recta horizontal interseca en un solo punto a la función. Por lo tanto, $f(x) = x + 1$ es inyectiva.

b) $f(x) = x^2$



La recta horizontal que pasa por el punto (2, 4) también pasa por el punto (–2, 4). Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no es inyectiva. En este caso $2 \neq -2$ pero $f(2) = f(-2)$ pues $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$.

Problemas

Determina si las siguientes funciones son inyectivas en su dominio:

a) $f(x) = 2x - 6$ b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6$ c) $f(x) = 2x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x}$

Indicador de logro:

1.1 Identifica funciones inyectivas de manera gráfica y algebraica.

Secuencia:

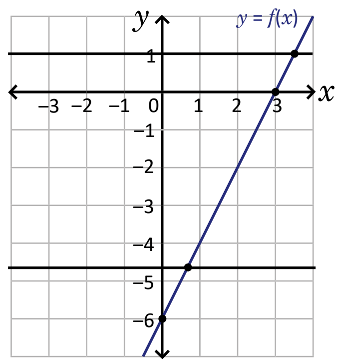
Hasta este momento el estudiante conoce varias funciones reales, ahora se estudiarán las características de las funciones iniciando con la identificación de la inyectividad de forma gráfica y algebraica.

Posibles dificultades:

El Problema inicial también se puede resolver con el planteamiento de ecuaciones; la elaboración de la gráfica se sugiere al estudiante si hay dificultades.

Solución de problemas:

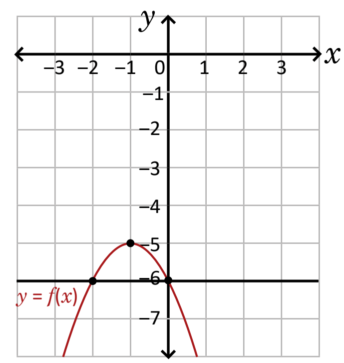
a) $f(x) = 2x - 6$



Toda recta horizontal interseca en un solo punto la gráfica de $f(x) = 2x - 6$, por lo tanto, es inyectiva.

La única preimagen de un número b es $\frac{1}{2}b + 3$.

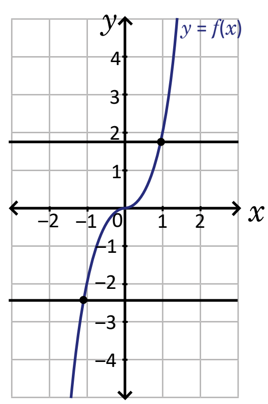
b) $f(x) = -x^2 - 2x - 6 = -(x + 1)^2 - 5$



La recta horizontal trazada interseca en dos puntos a la gráfica de $f(x)$. Por lo tanto, $f(x)$ no es inyectiva.

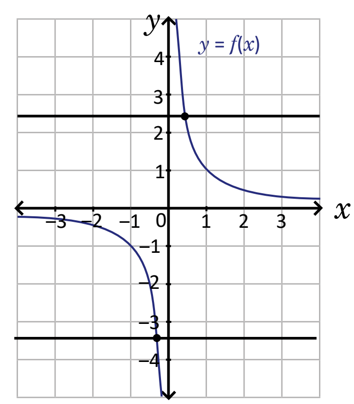
Otra forma:
$f(-2) = f(0) = -6$.
Por lo tanto no es inyectiva.

c) $f(x) = 2x^3$



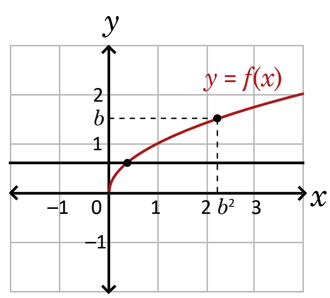
Es inyectiva.

d) $f(x) = \frac{1}{x}$



Es inyectiva.

e) $f(x) = \sqrt{x}$



La única preimagen de b es b^2.

Es inyectiva.

1.2 Funciones sobreyectivas

Problema inicial

Una función de A en B que tiene como ecuación $y = f(x)$ se puede representar de las siguientes formas:

1. f: A $\rightarrow$ B
   $x \rightarrow f(x)$

2. f: A $\rightarrow$ B; $x \rightarrow f(x)$

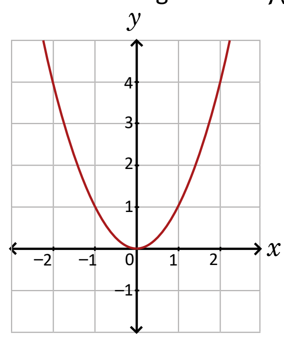
Esta representación significa "la función de A en B tal que x toma valores en A y $f(x)$ en B".

a) Dada la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^2$, ¿existe un valor x en el conjunto de partida que cumple $f(x) = -1$?

b) Considera la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^3$. Si y es un número real, determina el valor de x tal que $f(x) = y$ si $y = 1$, $y = 8$.

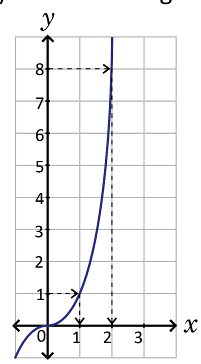
Solución

a) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^2$.



No hay valores de x tal que $f(x) = -1$.

b) Se elabora la gráfica de $f(x) = x^3$.



El valor de x tal que $f(x) = 1$, es $x = 1$.
$f(1) = 1^3 = 1$.

El valor de x tal que $f(x) = 8$, es $x = 2$.
$f(2) = 2^3 = 8$.

Conclusión

Una función f: A $\rightarrow$ B es **sobreyectiva**, si cada número en B es imagen de, al menos, un número en A.

1. Para decir que una función no es sobreyectiva se debe encontrar un valor y en B que no tenga preimagen en A.
2. Una función f: A $\rightarrow$ B, donde el conjunto B es igual al rango de la función R_f es una función sobreyectiva.

Recuerda que el rango es el conjunto de valores que puede tomar la función $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Ejemplo

a) La función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^2$, no es sobreyectiva pues no existe un número real x tal que $x^2 = -1$.

El rango de $f(x) = x^2$ no es $\mathbb{R}$ sino $R_f = [0, \infty[$.

b) La función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x^3$ es sobreyectiva pues un número y en $\mathbb{R}$ es imagen del número $\sqrt[3]{y}$. Al evaluar se tiene: $f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

El rango de $f(x) = x^3$ es $R_f = \mathbb{R}$.

Problemas

Identifica si cada una de las siguientes funciones es sobreyectiva.

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow x$

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow 3x - 2$

c) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow x^2 - 1$

d) f: $\mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 0]$
   $x \rightarrow -x^2$

e) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow -x^2 + x$

f) f: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
   $x \rightarrow \sqrt{x}$

g) f: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow \frac{1}{x}$

h) f: $\mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
   $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$

i) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
   $x \rightarrow |x|$

El conjunto $]-\infty, a[\cup]a, \infty[$ se puede escribir en la forma $\mathbb{R} - \{a\}$, que representa el conjunto de los números reales exceptuando al número a.

$f(x) = |x|$ es la función valor absoluto.

Indicador de logro:

1.2 Identifica funciones sobreyectivas de manera gráfica y algebraica.

Secuencia:

Para la mayoría de funciones estudiadas hasta ahora se ha determinado su domino y rango. En esta clase se introduce una nueva notación de funciones y se estudian las formas de identificar una función sobreyectiva.

Propósito:

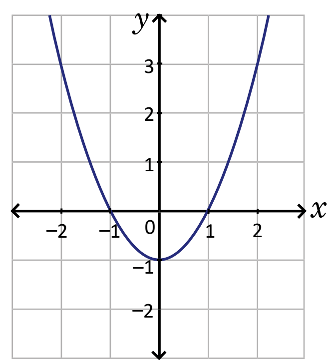
En la Conclusión se describen dos caracterizaciones de la función sobreyectiva, una permite negar la sobreyectividad y la otra afirmarla. En el Ejemplo b) se muestra cómo puede establecerse la sobreyectividad de manera algebraica.

Solución de problemas:

a)
- Toda función lineal con domino $\mathbb{R}$ tiene rango $\mathbb{R}$, por lo tanto f es sobreyectiva.
- Un número real b es imagen de b. $f(b) = b$, por lo tanto la función es sobreyectiva.

b)
- Toda función lineal con domino $\mathbb{R}$ tiene rango $\mathbb{R}$, por lo tanto f es sobreyectiva.
- Un número real b es imagen de $\frac{b+2}{3}$. $f\left(\frac{b+2}{3}\right) = b$, por lo tanto la función es sobreyectiva.

c) El número real -2 no es imagen de ningún número real, por lo tanto f no es sobreyectiva.



d)
- El rango de la función $f(x) = -x^2$ es $]-\infty, 0]$, por lo tanto la función definida así es sobreyectiva.
- Un número real $b \leq 0$ es imagen del número $\sqrt{-b}$. Por lo que $f(x) = -x^2$ es sobreyectiva sobre $]-\infty, 0]$.

e) $-x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Así, 1 no es imagen de ningún número real. Para corroborarlo, se puede hacer la gráfica. Por lo tanto, $f(x) = -x^2 + x$ no es sobreyectiva.

f) Un número real $b \geq 0$ es imagen del número real $b^2 \geq 0$. Por lo tanto $f(x) = \sqrt{x}$ es sobreyectiva.

g) El número real 0 no es imagen de ningún número real; por lo tanto, f no es sobreyectiva.

h)
- El rango de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto la función definida así es sobreyectiva.
- Un número real $b \neq 0$ es imagen del número real $1 - \frac{1}{b}$. Por lo que la función es sobreyectiva.

i) Un número real -1 no es imagen de ningún número real, por lo tanto f no es sobreyectiva.

En algunos literales se tienen dos argumentos distintos de por qué la función es sobreyectiva, con uno de los dos es suficiente para afirmarlo.

1.3 Funciones biyectivas*

Definición

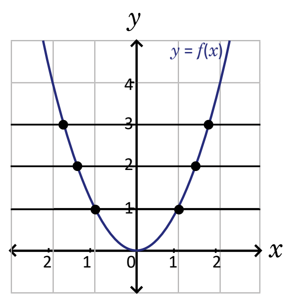
Una función f: A → B es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Si una función no es inyectiva se puede restringir el dominio para que sea inyectiva, en algunos casos se puede hacer de varias maneras.
- Para que la función f sea sobreyectiva basta encontrar el rango R_f y hacer $B = R_f$.

Se llama **restricción de la función *f*** a la que se obtiene como resultado de los pasos anteriores.

Ejemplo

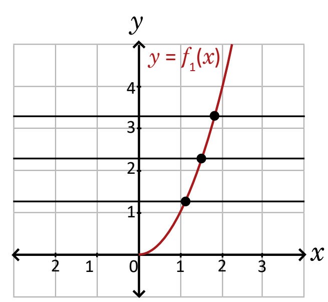
1. Verifica que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[\ ; x \rightarrow x^2$ no es biyectiva.
2. Haz una restricción del dominio para que la función f sea biyectiva.

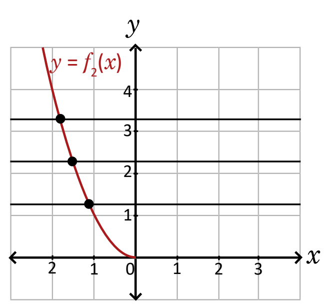


1. Las rectas horizontales cortan en dos puntos a la gráfica, así la función no es inyectiva, por lo que tampoco es biyectiva.

2. Eliminando los puntos con primera coordenada negativa, se obtiene la gráfica de una función inyectiva, a la que se denomina f_1. Su dominio es $[0, \infty[$ y su rango es $[0, \infty[$.

   Por lo tanto, la función $f_1: [0, \infty[\ \rightarrow [0, \infty[; x \rightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.





Otra restricción de f se obtiene eliminando los puntos con primera coordenada positiva.

Por lo tanto, la función $f_2: [-\infty, 0[\ \rightarrow [0, \infty[; x \rightarrow x^2$ es biyectiva pues es inyectiva y sobreyectiva.

Problemas

Determina si cada función es biyectiva, si no lo es, haz una restricción de f para que lo sea.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x - 1$

c) $f: [0, 10] \rightarrow [0, \infty[$, $x \rightarrow x^2$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x^2 - 2x + 3$

e) $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $x \rightarrow \frac{1}{x}$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $x \rightarrow |x|$

g) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow 1 + \frac{1}{1 - x}$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow 2^{-x-1} + 1$

Indicador de logro:

1.3 Identifica si una función es biyectiva o restringe su dominio o rango para que lo sea.

Secuencia:

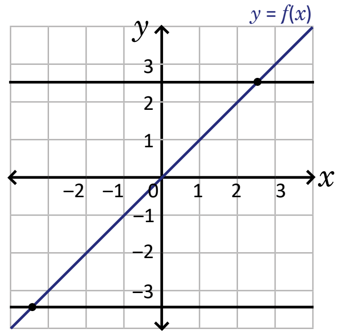
Ahora se presenta la definición de función biyectiva y la forma en que se puede restringir el domino o rango de una función cualquiera para que cumpla esta condición. Puede dar el Ejemplo como problema a los estudiantes pero si el numeral 2 es muy difícil puede orientarlos.

Propósito:

Para mostrar que la restricción no es única en el Ejemplo se realizan dos restricciones de la función original para que sea biyectiva. Se hace las distinción entre una función (f) y su restricción asignando a esta un subíndice (f_1).

Solución de problemas:

a)



- Toda recta horizontal que interseca a la gráfica de $f(x)$ la interseca en un solo punto, así f es inyectiva.
- La función $f(x) = x$ es lineal, se tiene que $D_f = \mathbb{R}$ entonces $R_f = \mathbb{R}$, por lo que f es sobreyectiva.

Por lo tanto $f(x) = x$ es biyectiva.

b) Es biyectiva.

c) No es sobreyectiva pues 11^2 no tiene preimagen en $[0, 10]$.
Restricción
$$f_1: [0, 10] \to [0, 100]$$
$$x \to x^2$$

d) $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$, no es sobreyectiva pues 0 no tiene preimagen.
Restricciones
$$f_1: [1, \infty] \to [2, \infty[\qquad \text{o} \qquad f_1:]-\infty, 1] \to [2, \infty[$$
$$x \to x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad x \to x^2 - 2x + 3$$

e) Es biyectiva.

f) No es inyectiva: $f(-1) = f(1) = 1$.
Restricciones
$$f_1: [0, \infty[\to [0, \infty[\qquad \text{o} \qquad f_2:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$$
$$x \to |x| \qquad\qquad x \to |x|$$

g) No es sobreyectiva: 1 no tiene preimagen.
Restricción
$$f_1: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$$
$$x \to 1 + \frac{1}{1 - x}$$

h) No es sobreyectiva: 0 no tiene preimagen.
Restricción
$$f_1: \mathbb{R} \to]0, \infty[$$
$$x \to 2^x$$

i) No es sobreyectiva: 0 no tiene preimagen.
Restricción
$$f_1: \mathbb{R} \to]1, \infty[$$
$$x \to 2^{-x-1} + 1$$

Para resolver estos problemas, se puede recomendar que los estudiantes que realicen las gráficas de las funciones para restringir los dominios.

1.4 Composición de funciones

Problema inicial

En el departamento de Morazán el beneficio promedio, en dólares, que obtiene un productor de dulce de atado está dado por $f(x) = 0.53x$, donde x representa la inversión realizada por el productor. Se sabe que la inversión realizada por un productor está dada por la función $g(x) = 69.19x$, donde x es el número de toneladas de caña de azúcar utilizadas. A partir de lo anterior contesta:

1. ¿Cuál es la inversión realizada por el productor si utiliza 2 toneladas?
2. ¿Cuál es el beneficio obtenido por el productor si utiliza 2 toneladas?
3. Determina una función que proporcione el beneficio obtenido a partir de una cantidad x de toneladas de caña de azúcar utilizadas.

Solución

1. Utilizando la función de inversión g, se tiene $g(2) = 69.19(2) = 138.38$.
   Por lo tanto, la inversión realizada es de \$138.38.

$$x \xrightarrow{g} g(x)$$
Toneladas → Inversión

2. La inversión realizada al utilizar 2 toneladas es $g(2) = \$138.38$.
   Utilizando la función de beneficio f se tiene que
   $$f(g(2)) = f(138.38) = 0.53(138.38) = 73.3414.$$
   Por lo tanto, el beneficio es de \$ 73.3414.

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$
Inversión → Beneficios

3. Al utilizar x toneladas se tiene una inversión de $g(x) = 69.19x$.
   Al utilizar una inversión $g(x)$ se tiene un beneficio de $f(g(x)) = 0.53(g(x))$.
   Por lo tanto, el beneficio a partir de la cantidad x de toneladas es
   $f(g(x)) = 0.53(69.19x) = 36.6707x$.

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$
Toneladas → Inversión → Beneficios

Definición

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la **composición** de f y g se denota por $(f \circ g)(x)$ y se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

La composición de f y g es una función que resulta de evaluar la función $g(x)$ en la función $f(x)$.

La expresión $f \circ g$ se lee f compuesta con g. La expresión $f(g(x))$ se lee f de g de x.

Ejemplo

Efectúa las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$, con las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= 2(g(x)) + 1 \quad \text{se evalúa la función } g(x) \text{ en } f(x),\\ &= 2(x - 3) + 1\\ &= 2x - 6 + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = 2x - 5$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= f(x) - 3 \quad \text{se evalúa la función } f(x) \text{ en } g(x),\\ &= (2x + 1) - 3\\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.

Observa que, en general, $(f \circ g)(x)$ no es igual a $(g \circ f)(x)$:

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 3$ se tiene que $(f \circ g)(x) = 2x - 5$ y $(g \circ f)(x) = 2x - 2$.

En este caso $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Problemas

Efectúa la composición $f \circ g$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$

b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$

c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = x - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$

e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$

g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$

h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$

i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$

123

Unidad 5

Indicador de logro:

1.4 Determina la ecuación de la composición de dos funciones.

Secuencia:

La composición de funciones se estudia en dos clases, en la primera se determina la ecuación de la composición y en la siguiente el dominio de la composición. La ecuación de la composición es el resultado de evaluar una función en otra. Así queda establecida la composición como una operación entre funciones reales.

Posibles dificultades:

Para determinar la ecuación de una composición se debe evaluar una función en otra en el orden adecuado, pues como se muestra en el Ejemplo al evaluar en distinto orden se pueden obtener funciones diferentes.
El Problema inicial también se puede resolver haciendo uso de la multiplicación, en el caso que un estudiante presente una solución con este razonamiento se debe aclarar que no todas las composiciones se pueden efectuar de esta manera.

Solución de problemas:

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = 3x$
$(f∘g)(x) = 12x$

b) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x + 5$
$(f∘g)(x) = -x - 3$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x - 4$
$(f∘g)(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 1$
$(f∘g)(x) = \frac{1}{x+1}$

e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$
$(f∘g)(x) = \frac{1}{x} + 1$

f) $f(x) = 3^x$, $g(x) = x + 2$
$(f∘g)(x) = 3^{x+2}$

g) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$
$(f∘g)(x) = 2^x + 1$

h) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 5^x$
$(f∘g)(x) = \frac{1}{5^x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4^x$
$(f∘g)(x) = \sqrt{4^x} = \sqrt{2^{2x}} = 2^{\frac{2x}{2}} = 2^x$

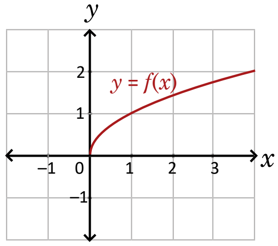
En esta clase solo se trata como tal el hecho de evaluar una función con otra, de aquí que el indicador de logro se refiera a determinar la ecuación de la composición, pues la función composición quedará bien definida al calcular su dominio en la siguiente clase.

1.5 Dominio de la función composición*

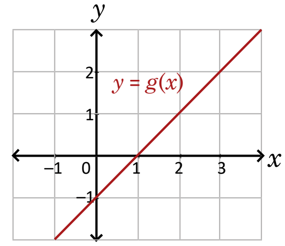
Problema inicial

Se tiene la gráfica de las funciones f: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$; $x \rightarrow \sqrt{x}$ y g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow x - 1$.

$D_f = [0, \infty[$
$R_f = [0, \infty[$



$D_g = \mathbb{R}$
$R_g = \mathbb{R}$



La composición está definida como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es decir $g(x)$ se evalúa en $f(x)$. A partir de esto, realiza lo siguiente:

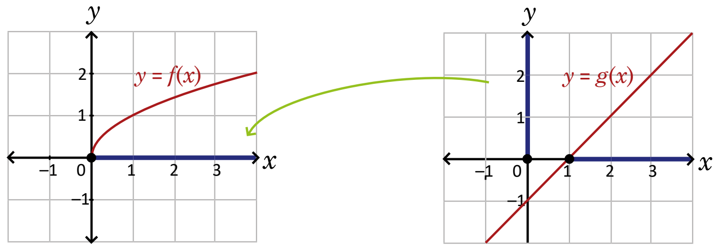
a) Determina el intervalo de los valores que puede tomar $g(x)$ para que $f(g(x))$ esté definida.

b) ¿Cuál es el intervalo de valores que debe tomar x para que $g(x)$ esté en el intervalo del literal anterior?

Solución

a) Los valores que $g(x)$ puede tomar deben estar en el domino de $f(x)$.
Por lo que el intervalo que se pide es $[0, \infty[$.

b) Se determina el intervalo a partir de la gráfica.



En la función $g(x)$ los valores del intervalo $[0, \infty[$ se obtienen al evaluar los valores del intervalo $[1, \infty[$.

Por lo tanto, x debe tomar valores en el intervalo $[1, \infty[$ para que $g(x)$ esté en el intervalo $[0, \infty[$.

Definición

El **dominio de la composición** de f y g está dado por el conjunto: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

El dominio de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$ son los valores que pertenecen a D_g (el dominio de $g(x)$) tal que $g(x)$ pertenece a D_f (el dominio de $f(x)$).

Ejemplo

Utilizando las funciones: $f(x) = \sqrt{x - 9}$, con dominio $D_f = [9, \infty[$, y $g(x) = 3x$, con dominio $D_g = \mathbb{R}$, encuentra el dominio de la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3x - 9}$.

Se tienen los dominios $D_f = [9, \infty[$ y $D_g = \mathbb{R}$. Para determinar $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ se tiene que $g(x)$ es un valor de $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 9\}$ si se cumple que $g(x) \geq 9$, sustituyendo se obtiene $3x \geq 9$, por lo que $x \geq 3$ entonces $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid x \geq 3\}$. Por lo tanto, $D_{f \circ g} = [3, \infty[$.

Problemas

Determina el domino de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$:

a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 3x + 1$
g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 2x + 4$

b) f: $[3, \infty[\rightarrow [-1, \infty[$
$x \rightarrow x^2 - 12x + 35$
g: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow \sqrt{x}$

c) f: $[-1, \infty[\rightarrow [-1, \infty[$
$x \rightarrow x^2 - 1$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \rightarrow \frac{1}{x}$

d) f: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$
$x \rightarrow \sqrt{x}$
g: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \rightarrow \frac{1}{x}$

124

Indicador de logro:

1.5 Determina el domino de la composición de funciones utilizando la definición.

Secuencia:

Ahora se estudia el dominio de la función composición, esto permitirá al estudiante determinar el dominio de otras funciones que no se han estudiado como tales pero que pueden obtenerse como composición de funciones conocidas. Si el Problema incial resulta muy difícil para el estudiante, puede explicar el primer literal.

Propósito:

El Problema inicial plantea determinar el dominio de una composición de funciones en dos pasos. La Solución presenta un método gráfico para determinar el dominio de la composición. Mientras que el Ejemplo expone un método algebraico en el que se utilizan intervalos y desigualdades.

Solución de problemas:

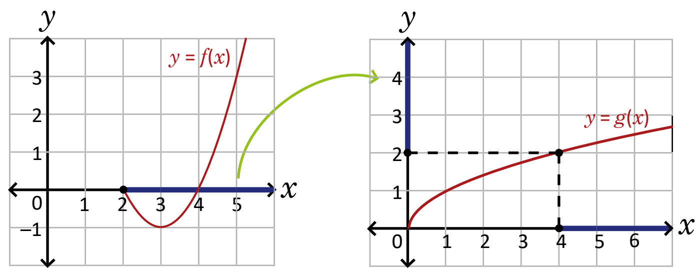
a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 3x + 1$

$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow 2x + 4$

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$
$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

b) $f\colon [2, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 6x + 8$

$g\colon [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

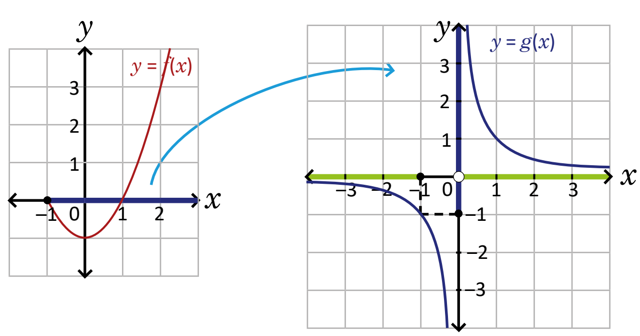


$D_{f\circ g} = [4, \infty[$

Fe de errata: en el problema del Libro de Texto hay que corregir la función f por los datos
$f\colon [2, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 6x + 8.$

c) $f\colon [-1, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$
$x \longrightarrow x^2 - 1$

$g\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$



$D_{f\circ g} =]-\infty, -1] \cup]0, \infty[$

d) $f\colon [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

$g\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$

$D_f = [0, \infty[$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \geq 0\right\}$

$\frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow D_{f\circ g} =]0, \infty[$

1.6 Función inversa

Problema inicial

Dadas las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, efectúa las composiciones:

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

Solución

a) $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= 2(g(x)) + 2$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2$$
$$= x - 2 + 2$$
$$= x$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = x$.

b) $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= \frac{1}{2}(2x + 2) - 1$$
$$= x + 1 - 1$$
$$= x$$

Por lo tanto, $(g \circ f)(x) = x$.

Definición

Sea f: A ⟶ B una función, si una función g: B ⟶ A cumple las condiciones:

1. $(f \circ g)(x) = x$, para todo valor x en B.
2. $(g \circ f)(x) = x$, para todo valor x en A.

Entonces a g se le llama la **función inversa de** f y se denota por f^{-1}.

La función inversa f^{-1} cumple $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, así para encontrar la ecuación de la función inversa se despeja y de la ecuación $f(y) = x$, donde $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo

Obtén la función inversa de $f(x) = 2x + 2$.

Escribe la ecuación ⇒ $f(y) = x$,

evalúa y en $f(x) = 2x + 2$ ⇒ $2y + 2 = x$,

al despejar y se obtiene: ⇒ $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

A la función $h(x) = x$ se le denomina **función identidad**.

Para una función l: A ⟶ B, la función identidad cumple las siguientes condiciones:

1. Si h: B ⟶ B; $x \longrightarrow x$ entonces $(h \circ l)(x) = l(x)$.
2. Si h: A ⟶ A; $x \longrightarrow x$ entonces $(l \circ h)(x) = l(x)$.

Problemas

1. Determina la ecuación de la función inversa de las siguientes funciones.

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 5x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^3$

c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[$, $x \longrightarrow (x-2)^2 + 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

e) $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, $x \longrightarrow \frac{x+1}{x-1}$

f) $f: [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$

g) $f: [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$, $x \longrightarrow x^2 + 1$

h) $f: [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$, $x \longrightarrow (x-1)^2$

2. Comprueba con la composición de funciones, que la función encontrada en cada literal del problema anterior es la función inversa.

Comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Unidad 5

Indicador de logro:

1.6 Determina la ecuación de la función inversa de una función dada.

Secuencia:

En primer lugar se estudia la ecuación de la función inversa, esta se define con base en la ecuación de una composición de funciones. Además se muestra que para esta operación existe un elemento invariante que es la función identidad, así como el cero lo es para la suma y el uno para la multiplicación.

Propósito:

En el Problema inicial se comprueba que dadas las ecuaciones de dos funciones mutuamente inversas su composición es la función identidad. En la información adicional se muestra la función identidad y su rol como elemento invariante para la operación composición.

Solución de problemas:

1a) $f(y) = 5y - 1 = x$
$$y = \frac{x+1}{5}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

1b) $f(y) = y^3 = x$
$$y = \sqrt[3]{x}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

1c) $f(y) = (y-2)^2 + 1 = x$
$$y - 2 = \sqrt{x-1}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

1d) $f(y) = \frac{1}{y} = x$
$$y = \frac{1}{x}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

1e) $f(y) = \frac{y+1}{y-1} = x$
$$y + 1 = x(y-1)$$
$$y - xy = -x - 1$$
$$y(1-x) = -x - 1$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

1f) $f(y) = \sqrt{y} = x$

se define para $y \geq 0$
$$(\sqrt{y})^2 = x^2$$
$$y = x^2$$
$$f^{-1}(x) = x^2$$

1g) $f(y) = y^2 + 1 = x$

se define para $y \geq 0$
$$\Rightarrow \quad y^2 = x - 1$$
$$y = \sqrt{x-1}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

1h) $f(y) = (y-1)^2 = x$

se define para $y \geq 1$
$$\Rightarrow \quad y - 1 = \sqrt{x}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$$

2a) $f(f^{-1}(x)) = 5\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right) - 1$
$$= x + 1 - 1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{5}(5x-1) + \frac{1}{5}$$
$$= x - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = x$$

2b) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$
$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

2c) $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x-2)^2 + 1 - 1} + 2$
$$= \sqrt{(x-2)^2} + 2$$
$$= x - 2 + 2$$
$$= x$$

$$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x-1} + 2 - 2)^2 + 1$$
$$= (\sqrt{x-1})^2 + 1$$
$$= x - 1 + 1 = x$$

2d) $f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x))$
$$= \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \div \frac{1}{x}$$
$$= 1(x) = x$$

2e) $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$
$$= \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$$
$$= \frac{2x}{x-1} \div \frac{2}{x-1}$$
$$= \frac{2x}{x-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$$
$$= x$$

2f) $f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x^2} = x$
$$f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

2h) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x} + 1 - 1)^2$
$$= (\sqrt{x})^2$$
$$= x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x-1)^2} + 1$$
$$= x - 1 + 1$$
$$= x$$

2g) $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1$
$$= x - 1 + 1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 1}$$
$$= \sqrt{x^2} = x$$

Aunque el rango de la función inversa se estudiará en la siguiente clase es necesario realizar la observación que los valores de que toma la variable y están en el dominio de f, sobre todo en los literales f), g) y h).

En la próxima clase se relaciona la biyectividad con la existencia de la función inversa.

1.7 Existencia, dominio y rango de la función inversa

Problema inicial

a) Grafica las funciones $f(x) = 2x + 2$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$ en un mismo plano cartesiano y observa que si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

Los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$.

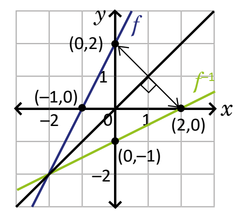
b) Sea (a, b) un punto de la gráfica de f, demuestra que si f posee función inversa f^{-1}, entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Grafica la función $f(x) = x^2$, luego para cada punto (a, b) de $f(x)$ gráfica el punto (b, a) y dibuja la curva que une estos puntos.

d) La curva que obtuviste en c), ¿corresponde a la gráfica de una función?

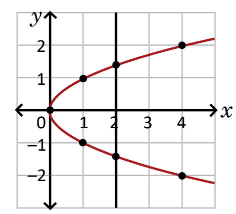
Solución

a) Se observa que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$. Por lo tanto, si (a,b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de f^{-1}.



b) (a, b) es un punto de la gráfica de f si y solo si $f(a) = b$.
Al aplicar la función inversa a la ecuación anterior se tiene $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$.
Así, por la definición de función inversa se tiene: $a = f^{-1}(b)$.
Por lo tanto, si (a, b) es un punto de la gráfica de f entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}.

c) Se grafican algunos puntos (b,a): (0, 0), (1, 1), (1, –1), (4, 2), (4, –2).
Se traza la curva que une estos puntos.



d) La curva que se obtuvo no corresponde a la gráfica de una función pues hay rectas verticales que cortan en dos puntos a la curva.

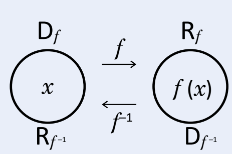
Definición

Una función f: A ⟶ B posee función inversa si y solo si es biyectiva. De acuerdo a la clase 1.3, una función puede restringirse para que sea biyectiva y así tener función inversa.

Si (a, b) es un punto de la gráfica de $f(x)$ entonces (b, a) es un punto de la gráfica de $f^{-1}(x)$.

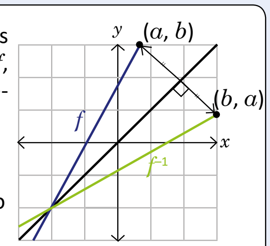
El dominio de la función inversa es el rango de la función inicial y el rango de la función inversa es el dominio de la función inicial:

$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ y } R_{f^{-1}} = D_f.$$



La gráfica de f^{-1} es simétrica a la de f, con eje de simetría $y = x$.

El punto (a, b) es simétrico al punto (b, a).



Problemas

En los siguientes literales determina la función inversa, su dominio y su rango. Además grafica la función y su inversa en el mismo plano cartesiano. En el literal d) realiza una restricción de la función.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x - 2$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \to \frac{1}{x+1}$

c) $f:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$
$x \to x^2$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to (x + 1)^2 - 4$

Indicador de logro:

1.7 Determina la función inversa de una función analizando dominio y rango.

Secuencia:

En esta clase se establece que la función posee inversa si y solamente si es biyectiva. Además, se observa la relación de simetría respecto a la recta identidad entre las gráficas de una función y su inversa. Esto se utilizará en la siguiente lección para relacionar las funciones exponencial y logarítmica.

Propósito:

El Problema inicial, en el literal a) los estudiantes deben visualizar la simetría entre las gráficas de las funciones y luego consolidar lo observado, en el literal b). En los últimos literales se comprueba que para una función no inyectiva no es posible determinar una función inversa.

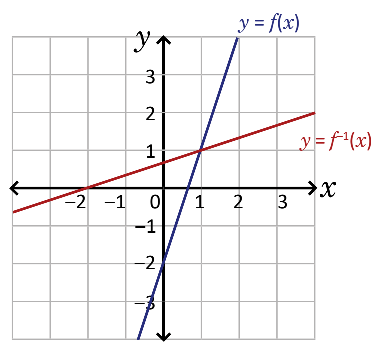
Solución de problemas:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3x - 2$

$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

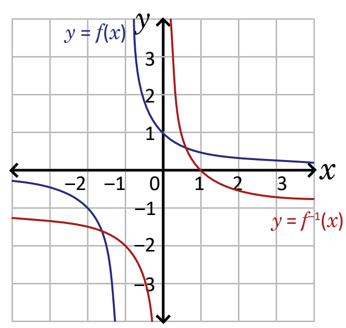


b) $f\colon \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$

$x \to \frac{1}{x+1}$

$f^{-1}\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$

$x \to \frac{1}{x} - 1$

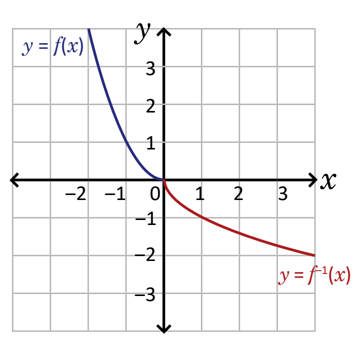


c) $f\colon]-\infty, 0] \to [0, \infty[$

$x \to x^2$

$f^{-1}\colon [0, \infty[\to]-\infty, 0]$

$x \to -\sqrt{x}$



d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

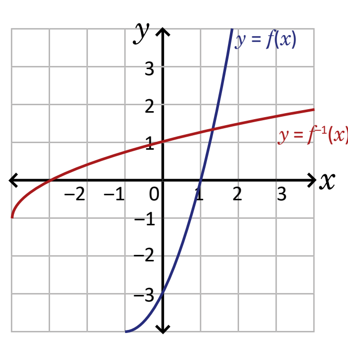
$x \to (x + 1)^2 - 4$

$f_1\colon [-1, \infty[\to]-4, \infty[$

$x \to (x + 1)^2 - 4$

$f_1^{-1}\colon]-4, \infty[\to [-1, \infty[$

$x \to \sqrt{x + 4} - 1$



1.8 Practica lo aprendido

1. En los siguientes literales determina la ecuación de las composiciones $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$:

   a) $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -x - 2$
   b) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = -x + 1$
   c) $f(x) = \sqrt{-x+1}$, $g(x) = 4 - x^2$
   d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2 - x$

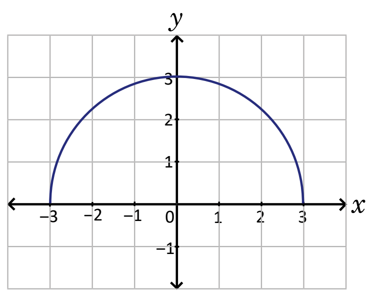
2. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$
   c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$
   d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$
   e) $f(x) = \sqrt{3^x - 9}$
   f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

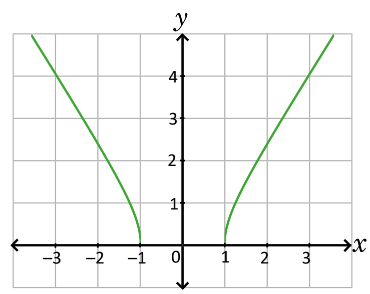
   Escribe cada función como una composición de funciones.

3. Se tienen las gráficas de las siguientes funciones:

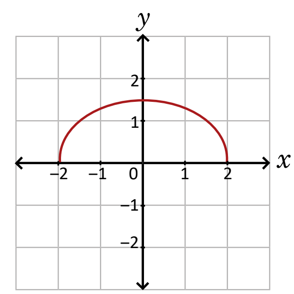
   $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$



   $f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 2}$



   $f_3(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{2}}$



   Para cada una:
   a) Determina el dominio como el conjunto de los valores donde la función está definida.
   b) Restringe el dominio de la función para que sea inyectiva.
   c) Con el dominio encontrado en b) determina el rango de modo que la función sea sobreyectiva.
   d) Traza la gráfica de la función con el dominio y el rango restringidos en b) y c).

4. A partir de las funciones redefinidas en el problema 3 realiza lo siguiente:
   a) Para cada función determina la ecuación de la función inversa.
   b) Determina el domino y rango de la función inversa.
   c) Grafica en el mismo plano cartesiano f y f^{-1}.

5. Considerando los puntos P(a, b), Q(b, a) y la recta l: $y = x$ demuestra que $d(\text{P}, l) = d(\text{Q}, l)$.

6. Se tienen las siguientes funciones y sus inversas:

   f_1: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[;\ x \rightarrow x^2$
   f_1^{-1}: $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[;\ x \rightarrow \sqrt{x}$
   f_2: $[-1, \infty[\rightarrow [0, \infty[;\ x \rightarrow x + 1$
   f_2^{-1}: $[0, \infty[\rightarrow [-1, \infty[;\ x \rightarrow x - 1$

   Realiza lo siguiente:
   a) Determina la ecuación de la función $g_1(x) = (f_1\circ f_2)(x)$.
   b) Determina la ecuación de la función $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x)$.
   c) Efectúa las composiciones $(g_1\circ g_2)(x)$ y $(g_2\circ g_1)(x)$.
   d) En este caso, ¿cuál es la función inversa de $g_1(x) = (f_1\circ f_2)(x)$?
   e) Sean f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera, tal que las funciones f_1^{-1}, f_2^{-1}, $f_1\circ f_2$ y $f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ están definidas. Demuestra que $f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ es la función inversa de $f_1\circ f_2$.

Indicador de logro:

1.8 Resuelve problemas correspondientes a funciones biyectivas e inversas.

Solución de problemas:

1a) $(f\circ g)(x) = x + 7$, $(g\circ f)(x) = x - 7$

1b) $(f\circ g)(x) = x^2 - 2x + 5$, $(g\circ f)(x) = -x^2 - 3$

1c) $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, $(g\circ f)(x) = x + 3$

1d) $(f\circ g)(x) = 2^{x^2 - x}$, $(g\circ f)(x) = 4^x - 2^x$

En cada literal del problema 2 se tiene $f(x) = (f_1\circ f_2)(x)$

2a) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 1 - x^2$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$0 \leq 1 - x^2 \Rightarrow x^2 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow D_f = [-1, 1]$

2b) $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = x^2 - 2x - 3$

$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{0\}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 3,\ x = -1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

2c) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < x$

$\Rightarrow D_f =]0, \infty[$

2d) $f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$, $f_2(x) = x^2 + 1$

$D_{f_1} =]0, \infty[$

$0 < x^2 + 1$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2e) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 3^x - 9$

$D_{f_1} = [0, \infty[$

$0 \leq 3^x - 9 \Rightarrow 2 \leq x$

$D_f = [2, \infty[$

2f) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$

$D_f = [0, \infty[$

El estudiante debe utilizar las técnicas de desigualdades vistas el año anterior. En el literal 2b) también se puede escribir la respuesta como unión de intervalos.

3a) $D_{f_1} = [-3, 3]$

$D_{f_2} =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

$D_{f_3} = [-2, 2]$

3b) $D_{f_1} = [0, 3]$

$D_{f_2} = [1, \infty[$

$D_{f_3} = [0, 2]$

3c) $R_{f_1} = [0, 3]$

$R_{f_2} = [0, \infty[$

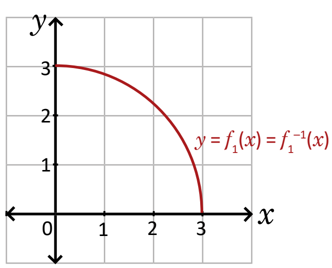
$R_{f_3} = [0, \sqrt{2}]$

3d) Ver solución del problema 4.

4a) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$,

4b) $D_{f_1^{-1}} = [0, 3]$, $R_{f_1^{-1}} = [0, 3]$

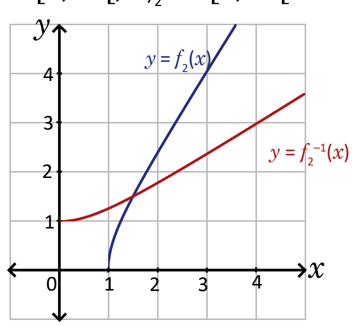
4c)



4a) $f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1}$

4b) $D_{f_2^{-1}} = [0, \infty[$, $R_{f_2^{-1}} = [1, \infty[$

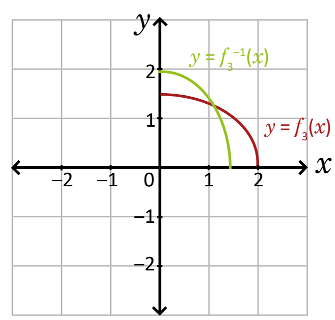
4c)



4a) $f_3^{-1}(x) = \sqrt{4 - 2x^2}$,

4b) $D_{f_3^{-1}} = [0, \sqrt{2}]$, $R_{f_3^{-1}} = [0, 2]$

4c)



5. $d(\text{P}, l) = \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b - a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = d(\text{Q}, l)$

La solución del problema 4 depende de la restricción en el problema 3.

6a) $g_1(x) = (f_1\circ f_2)(x) = (x + 1)^2$.

6b) $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x) = \sqrt{x} - 1$.

6c) $(g_1\circ g_2)(x) = x$, donde $x \geq 0$ y $(g_2\circ g_1)(x) = x$, donde $x \geq -1$.

6d) $g_2(x) = (f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x) = \sqrt{x} - 1$.

6e) $((f_1\circ f_2)\circ(f_2^{-1}\circ f_1^{-1}))(x) = (f_1\circ f_2)((f_2^{-1}\circ f_1^{-1})(x)) = (f_1\circ f_2)(f_2^{-1}(f_1^{-1}(x))) = f_1(f_2(f_2^{-1}(f_1^{-1}(x))))$

$= f_1(f_1^{-1}(x))$, por ser f_2 y f_2^{-1} inversas entre sí.

$= x$, por ser f_1 y f_1^{-1} inversas entre sí.

También se cumple que $((f_2^{-1}\circ f_1^{-1})\circ(f_1\circ f_2))(x) = x$.

Por lo tanto $f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$ es la función inversa de $f_1\circ f_2$.

En el problema 3b) la restricción del dominio no es la única.

2.1 Definición de logaritmo

Problema inicial

¿Qué valor debe tomar el exponente x para que se cumplan las siguientes igualdades?

a) $2^x = 8$

b) $3^x = \frac{1}{27}$

Solución

a) $2^x = 8$

$2^x = 2^3$ se escribe 8 como potencia de 2

$x = 3.$

Por lo tanto, $x = 3$.

b) $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 27^{-1}$

$3^x = (3^3)^{-1}$ Se escribe como potencias de la misma base

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3.$

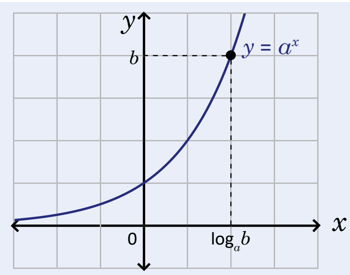
Por lo tanto, $x = -3$.

Definición

Sean a, b y x números reales tal que $b > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$, se define el **logaritmo** base a de un número b como sigue:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Significa que el logaritmo es el exponente al que se debe elevar el número a, llamado **base**, para obtener el número b.

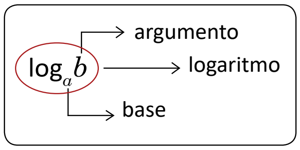


Ejemplo

En el Problema inicial se tiene que

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$ y se lee el logaritmo base 2 de 8 es igual a 3.

b) $3^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$ y se lee el logaritmo de $\frac{1}{27}$ base 3 es igual a -3.



Problemas

1. Escribe como un logaritmo cada una de las siguientes potencias.

a) $2^2 = 4$ b) $3^4 = 81$ c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$ d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$

e) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ f) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ g) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ h) $2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

2. Escribe cada logaritmo como una potencia.

a) $\log_2 64 = 6$ b) $\log_5 25 = 2$ c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ d) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

e) $\log_4 32 = \frac{5}{2}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$ g) $\log_4 \sqrt{8} = \frac{3}{4}$ h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

Indicador de logro:

2.1 Expresa igualdades de potencias como igualdades de logaritmos y viceversa.

Secuencia:

En la unidad anterior se estudió la potencia donde el exponente es cualquier número real. Ahora se estudia la definición de logaritmo de un número a partir de la potencia de un número real positivo diferente de 1.

Propósito:

En el Problema inicial el estudiante debe determinar el valor del exponente que cumple la ecuación. Este proceso será útil posteriormente, para determinar el logaritmo de un número. En los Problemas el estudiante deberá relacionar las definiciones de potencia y logaritmo.

Solución de problemas:

1a) $\log_2 4 = 2$

1b) $\log_3 81 = 4$

1c) $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$

1d) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

1e) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

1f) $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

1g) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$

1h) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{32}} = -\frac{5}{3}$

2a) $2^6 = 64$

2b) $5^2 = 25$

2c) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

2d) $3^{-3} = \frac{1}{27}$

2e) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

2f) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

2g) $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt{8}$

2h) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 Logaritmo de un número

Problema inicial

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$

2. Demuestra que $\log_a a^c = c$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Solución

1. a) $\log_2 16$

Sea $x = \log_2 16$

$x = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^x = 16$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 2^x = 2^4$ se resuelve la ecuación,

$\Leftrightarrow x = 4$.

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

Sea $x = \log_3 \frac{1}{9}$

$x = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9}$ se aplica la definición de logaritmo,

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2}$ se escribe 9 como potencia de 3,

$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-2}$ se reescribe con exponente negativo,

$\Leftrightarrow x = -2$.

2. Se tiene que $x = \log_a a^c \Leftrightarrow a^x = a^c$. Por lo tanto, $x = c$.

Conclusión

Calcular el valor de un logaritmo $x = \log_a b$ es encontrar el valor del exponente x que cumple $a^x = b$.

De manera general para encontrar el valor de un logaritmo se realizan los siguientes pasos:

1. Se escribe como potencia $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.
2. Se resuelve la ecuación $a^x = b$.

Si $b = a^c$ entonces $\log_a b = c$; por lo que, $\log_a a^c = c$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$
$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Ejemplo

Encuentra el valor del logaritmo $\log_4 64$.

Solución 1
Sea $x = \log_4 64$ entonces $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Solución 2
Utilizando la propiedad $\log_a a^c = c$: $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$.

Problemas

Determina el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_{10} 10$ b) $\log_3 1$ c) $\log_2 2^{100}$ d) $\log_2 32$

e) $\log_9 81$ f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ g) $\log_8 4$ h) $\log_{25} 125$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ k) $\log_4 \frac{1}{2}$ l) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

Unidad 5

129

Indicador de logro:

2.2 Calcula el logaritmo de un número expresándolo como potencia.

Secuencia:

Se presenta el proceso para determinar el valor de un logaritmo a través de la definición, que involucra la resolución de ecuaciones exponenciales y se tiene la alternativa de escribir el argumento como potencia cuya base sea la base del logaritmo.

Propósito:

El numeral 2 del Problema inicial permite simplificar el proceso para determinar el logaritmo de un número pues utiliza únicamente la descomposición en factores, la desventaja de esta propiedad se presenta cuando la base es una fracción o es mayor al argumento del logaritmo, por lo que en tal caso es mejor proceder con la definición.

Solución de problemas:

a) $\log_{10}10 = \log_{10}10^1 = 1$

b) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$

c) $\log_2 2^{100} = 100$

d) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

e) $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$

f) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

g)
$$\begin{aligned} x = \log_8 4 &\Leftrightarrow 8^x = 4\\ &\Leftrightarrow (2^3)^x = 2^2\\ &\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2\\ &\Leftrightarrow 3x = 2\\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x = \log_{25}125 &\Leftrightarrow 25^x = 125\\ &\Leftrightarrow (5^2)^x = 5^3\\ &\Leftrightarrow 5^{2x} = 5^3\\ &\Leftrightarrow 2x = 3\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow (2^{-1})^x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\\ &\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-\frac{1}{2}}\\ &\Leftrightarrow -x = -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x = \log_3\frac{1}{\sqrt{3}} &\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\\ &\Leftrightarrow 3^x = 3^{-\frac{1}{2}}\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} x = \log_4\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow (2^2)^x = 2^{-1}\\ &\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-1}\\ &\Leftrightarrow 2x = -1\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} x = \log_{\frac{1}{3}}9 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9\\ &\Leftrightarrow (3^{-1})^x = 3^2\\ &\Leftrightarrow 3^{-x} = 3^2\\ &\Leftrightarrow -x = 2\\ &\Leftrightarrow x = -2\end{aligned}$$

2.3 Propiedades de los logaritmos*

Problema inicial

1. Compara el resultado de la operación y el logaritmo para cada uno de los siguientes literales.

   a) $\log_2 4 + \log_2 8$ y $\log_2 32$ b) $\log_2 8 - \log_2 4$ y $\log_2 2$ c) $3\log_2 4$ y $\log_2 4^3$ d) $\log_2 8^2$ y $\log_2 4^3$

2. Demuestra las siguientes propiedades.

   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

   b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

   c) $b\log_a M = \log_a M^b$

   d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Solución

1. a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$ y $\log_2 32 = \log_2 2^5$

   $= 2 + 3$ $\qquad = 5$

   $= 5$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 (4 \times 8) = \log_2 32$.

   b) $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2^3 - \log_2 2^2$ y $\log_2 2 = 1$

   $= 3 - 2$

   $= 1$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$.

   c) $3 \log_2 4 = 3\log_2 2^2$ y $\log_2 4^3 = \log_2 (2^2)^3$

   $= 3(2)$ $\qquad = \log_2 2^6$

   $= 6$ $\qquad = 6$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $3\log_2 4 = \log_2 4^3 = 6$.

   d) $\log_2 8^2 = \log_2 2^6$ y $\log_2 4^3 = \log_2 2^6$

   $= 6$ $\qquad = 6$

   Por lo tanto, el resultado es el mismo.
   Se observa que $8^2 = 4^3$.

2. Sean $x = \log_a M$ y $y = \log_a N$, por definición se tiene $M = a^x$ y $N = a^y$.

   a) Se tiene el producto $MN = a^x a^y = a^{x+y}$

   Al escribir como logaritmo: $\log_a MN = x + y$

   Por lo tanto, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

   b) Se tiene el cociente $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

   Por definición de logaritmo $\log_a \frac{M}{N} = x - y$

   Por lo tanto, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

   c) Se tiene la potencia $M^b = (a^x)^b = a^{bx}$

   Se reescribe como logaritmo $bx = \log_a M^b$

   Por lo tanto, $b\log_a M = \log_a M^b$.

   d) En este caso $x = \log_a M$ y $x = \log_a N$

   Entonces $M = a^x$ y $N = a^x$

   Por lo tanto, $M = N$.

Conclusión

Sean a, M y N números positivos con $a \neq 1$, los logaritmos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
2. $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
3. $b\log_a M = \log_a M^b$
4. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

Observa:
$(\log_2 4)^3 = 2^3 = 8$ y $\log_2 4^3 = 3\log_2 4 = 3(2) = 6$.
Se tiene que $(\log_2 4)^3 \neq \log_2 4^3$.
Por lo que, en general, $(\log_a M)^b \neq \log_a M^b$

Problemas

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 12 + \log_6 18$ c) $\log_2 96 - \log_2 3$ d) $\log_2 6 - \log_2 24$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3}$ f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33}$ g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21}$ h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243$ j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32$ k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18$ l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18$

Indicador de logro:

2.3 Efectúa operaciones de logaritmos utilizando sus propiedades.

Secuencia:

Ahora se efectúan las operaciones entre logaritmos que serán útiles en la resolución de ecuaciones logarítmicas. La propiedad en d) hace referencia a la inyectividad del logaritmo como función.

Propósito:

El Problema inicial aborda las propiedades de logaritmos para un caso particular y para el caso general. Las propiedades se han escrito en la Conclusión de tal manera que sea inmediato aplicarlas en los Problemas.

Solución de problemas:

a) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

b) $\log_6 12 + \log_6 18 = \log_6(2^2 \times 3 \times 2 \times 3^2)$
$= \log_6(2^3 \times 3^3)$
$= \log_6 6^3$
$= 3$

c) $\log_2 96 - \log_2 3 = \log_2 \frac{96}{3}$
$= \log_2 32$
$= \log_2 2^5$
$= 5$

d) $\log_2 6 - \log_2 24 = \log_2 \frac{6}{24}$
$= \log_2 \frac{1}{4}$
$= \log_2 2^{-2}$
$= -2$

e) $\log_2 \frac{12}{5} + \log_2 \frac{5}{3} = \log_2 4 = 2$

f) $\log_3 \frac{11}{54} + \log_3 \frac{2}{33} = \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$

g) $\log_3 \frac{6}{7} - \log_3 \frac{2}{21} = \log_3 9$
$= \log_3 3^2$
$= 2$

h) $\log_4 \frac{3}{10} - \log_4 \frac{12}{5} = \log_4 \frac{1}{8}$
$= \log_4[(2^2)^{\frac{1}{2}}]^{-3}$
$= \log_4 4^{-\frac{3}{2}}$
$= -\frac{3}{2}$

i) $3\log_9 3 + \log_9 243 = \log_9 3^3 + \log_9 3^5$
$= \log_9 3^8$
$= \log_9 9^4$
$= 4$

j) $5\log_4 8 + 3\log_4 32 = \log_4(2^3)^5 + \log_4(2^5)^3$
$= \log_4 2^{15} + \log_4 2^{15}$
$= \log_4 4^{15}$
$= 15$

k) $2\log_2 54 - 3\log_2 18 = \log_2 54^2 - \log_2 18^3$
$= \log_2 \frac{54^2}{18^3}$
$= \log_2 \frac{2^2 \times 3^6}{2^3 \times 3^6}$
$= \log_2 \frac{1}{2}$
$= -1$

l) $2\log_{\frac{2}{3}} 12 - 2\log_{\frac{2}{3}} 18 = \log_{\frac{2}{3}} 12^2 - \log_{\frac{2}{3}} 18^2$
$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{12^2}{18^2}$
$= \log_{\frac{2}{3}} \frac{2^4 \times 3^2}{2^2 \times 3^4}$
$= \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$= 2$

En h) también es válido utilizar la definición para determinar el logaritmo que resulta de la operación.

2.4 Cambio de base de un logaritmo*

Problema inicial

¿Cómo calcularías el valor de $\log_2 5$ utilizando el logaritmo base 10?

La mayoría de calculadoras científicas solo permiten encontrar el valor de logaritmos de base 10 y e. El número neperiano: $e = 2.718281828459045...$

Solución

Sea $x = \log_2 5$. Entonces:

$2^x = 5$ por la definición de logaritmo,

$\log 2^x = \log 5$ se aplica logaritmo a ambos lados de la igualdad,

$x\log 2 = \log 5$ utilizando propiedades de logaritmo,

$x = \frac{\log 5}{\log 2}$.

El logaritmo base 10, usualmente, se denota sin la base: $\log_{10} a = \log a$.

Se utiliza la calculadora para determinar el cociente:

log 5 ÷ log 2 = ⇒ Pantalla de la calculadora

```
log 5 ÷ log 2
      2.321928095
```

Por lo tanto, $\log_2 5 = 2.321928095...$

Definición

Sean a, b y c números positivos tales que $a \neq 1$ y $c \neq 1$. Se denomina **cambio de base** a la igualdad:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ejemplo

1. Demuestra la propiedad del cambio de base para $c = 10$.

   Se tiene que $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$.

   Se aplica logaritmo base 10: $\log a^x = \log b$.

   Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia $x\log a = \log b$.

   Se despeja x: $x = \frac{\log b}{\log a}$, $\log a \neq 0$ ya que $a \neq 1$.

   Por lo tanto, se tiene que $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

2. Calcula el valor de $\log_4 8$.

   Se utiliza $c = 2$.

   $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$.

   Por lo tanto, $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

   Se puede utilizar cualquier base.

   $\log_4 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 4} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^2} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{3}{2}$.

En este caso no es necesario utilizar la calculadora.

Problemas

1. Simplifica los siguientes logaritmos con la propiedad de cambio de base.

   a) $\log_4 32$ b) $\log_4 \frac{1}{8}$ c) $\log_9 \sqrt{3}$ d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}}$

   e) $\log_{\frac{1}{9}} 27$ f) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$ h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Observa que el argumento del logaritmo y la base son potencias de una misma base.

2. Calcula el valor de los siguientes logaritmos.

   a) $\log_5 24$ b) $\log_2 \frac{1}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$

Utiliza $c = 10$.

Indicador de logro:

2.4 Utiliza la propiedad del cambio de base de un logaritmo para calcular el logaritmo de un número.

Secuencia:

Se introduce la propiedad del cambio de base que sirve para calcular otros logaritmos sin utilizar la definición de logaritmo explícitamente. Deberá indicar cómo puede iniciar el proceso si el estudiante no puede resolver el Problema inicial.

Propósito:

En el Problema inicial es necesario usar la calculadora, mientras que en el Ejemplo se muestra otro caso en el que no se utilizará debido a que la base y el argumento del logaritmo son potencias de una misma base.

Solución de problemas:

1a) $\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2} = \frac{5}{2}$

1b) $\log_4 \frac{1}{8} = \frac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^{-3}}{\log_2 2^2} = -\frac{3}{2}$

1c) $\log_9 \sqrt{3} = \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3^2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

1d) $\log_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_4 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\log_2 2^{-\frac{1}{2}}}{\log_2 2^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

1e) $\log_{\frac{1}{9}} 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{-2}} = -\frac{3}{2}$

1f) $\log_{\frac{1}{27}} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{27}} = \frac{\log_3 3}{\log_3 3^{-3}} = -\frac{1}{3}$

1g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8} = \frac{\log_2 \sqrt{8}}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-2} = -\frac{3}{4}$

1h) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \log_{\frac{1}{8}} 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{\log_2 2^{-\frac{2}{3}}}{\log_2 2^{-3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{-3} = \frac{2}{9}$

2a) $\log_5 24 = \frac{\log 24}{\log 5} = 1.97463...$

2b) $\log_2 \frac{1}{3} = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 2} = -1.58496...$

2c) $\log_{\frac{1}{2}} 5 = \frac{\log 5}{\log \frac{1}{2}} = -2.32192...$

2d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} = \frac{\log \sqrt{2}}{\log \frac{1}{3}} = -0.31546...$

Los estudiantes también puede utilizar la aproximación hasta las centésimas.

2.5 Definición de la función logarítmica y su gráfica

Problema inicial

1. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) Determina si la función $f(x) = \log_2 x$ es creciente o decreciente.

2. a) Utiliza la siguiente tabla para graficar la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					

b) ¿La función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es creciente o decreciente?

Solución

1. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

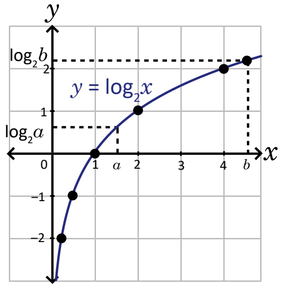
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_2 2 = 1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	–2	–1	0	1	2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_2 a < \log_2 b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_2 x$ es creciente.

2. a) Si $x = \frac{1}{4}$ se tiene $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

Si $x = \frac{1}{2}$ se tiene $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$

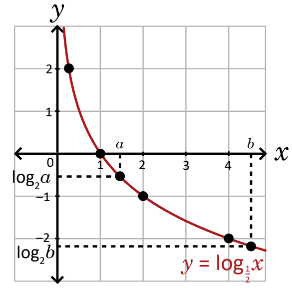
Si $x = 1$ se tiene $f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$

Si $x = 2$ se tiene $f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

Si $x = 4$ se tiene $f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	–1	–2

Se traza una curva sobre los puntos obtenidos.



b) Si $0 < a < b$, entonces $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$.
Por lo tanto, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ es decreciente.

Definición

La función logarítmica se define como sigue
$$f: \,]0, \infty[\, \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \log_a x$$
donde a es un número positivo y $a \neq 1$.

La monotonía de la función $f(x) = \log_a x$ se describe a continuación:
1. Es creciente si $a > 1$.
2. $f(x)$ = Es decreciente si $0 < a < 1$.

Un logaritmo está bien definido si el argumento es positivo.

La gráfica de $f(x) = \log_a x$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \log_3 x$
b) $f(x) = \log_4 x$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Indicador de logro:

2.5 Grafica funciones logarítmicas utilizando tabla de valores y colocando puntos en el plano cartesiano.

Secuencia:

Se estudian las gráficas de las funciones logarítmicas. La razón de utilizar solo argumentos positivos viene de la definición en la cual se escribe el logaritmo a partir de una potencia con base positiva.

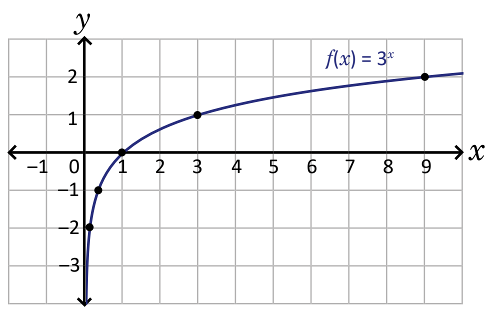
Propósito:

En el Problema inicial se utiliza la ubicación de puntos en el plano para graficar la función logarítmica. A partir de la definición de logaritmo se obtendrá el dominio de la función, la monotonía se obtiene a partir de la gráfica y se establecen puntos característicos de la función en la información adicional de la definición.

Solución de problemas:

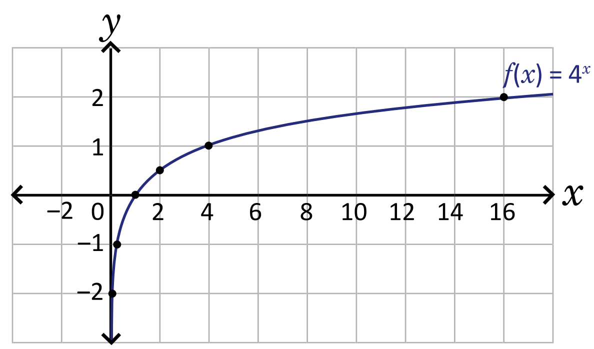
a)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	–2	–1	0	1	2



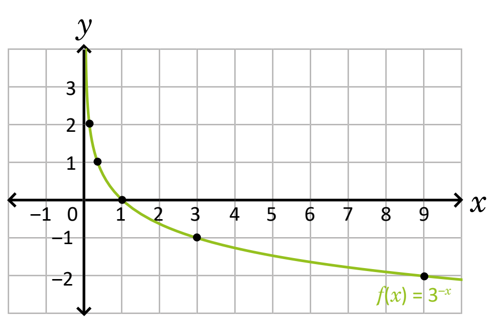
b)

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
y	–2	–1	0	1	2



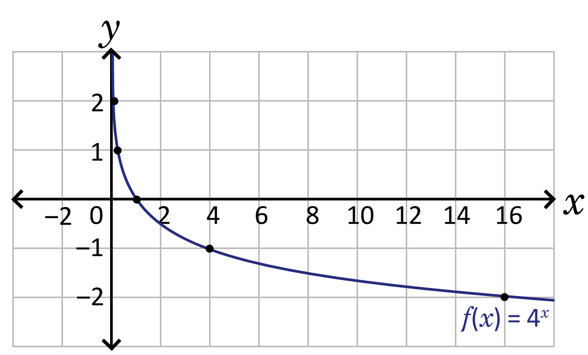
c)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	2	1	0	–1	–2



d)

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
y	2	1	0	–1	–2



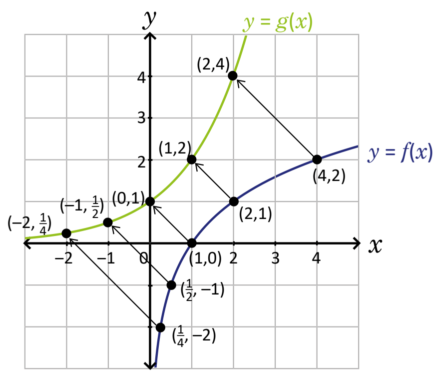
2.6 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ y observa que si (a, b) es un punto de f entonces (b, a) es un punto de g.
2. Efectúa las composiciones:
   a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

Solución

1. La función $f(x) = \log_2 x$ se graficó en la clase anterior y la función $g(x) = 2^x$ se graficó en la clase 2.1 de la unidad 4.



$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = 2^x$
(4, 2)	(2, 4)
(2, 1)	(1, 2)
(1, 0)	(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

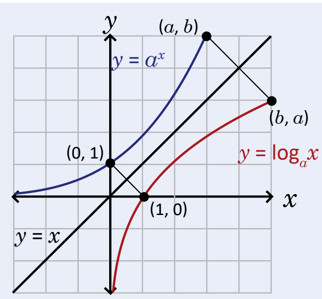
2. Efectúa las composiciones:

a) $f(g(x)) = f(2^x)$
$= \log_2 2^x$
$= x$

b) $g(f(x)) = g(\log_2 x)$
$= 2^{\log_2 x}$
$= x$

Por la definición de logaritmo $a^{\log_a x} = x$.

Conclusión



1. Las funciones $y = \log_a x$ y $y = a^x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.
2. Para dos números reales a y b con $a > 0$ y $a \neq 1$ se tiene que $\log_a a^b = b$ y $a^{\log_a b} = b$ (con $b > 0$).
3. La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.
   $f: \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $x \to a^x$ $\qquad$ $f^{-1}:]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \log_a x$
4. $y = a^x$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, haciendo uso de la simetría se obtiene que $y = \log_a x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$.
5. El dominio de la función logaritmo es el rango de la función exponencial: $]0, \infty[$.
   El rango de la función logaritmo es el dominio de la función exponencial: $\mathbb{R}$.
6. La función logaritmo, al ser la inversa de la función exponencial, es una función biyectiva.

Problemas

Para cada función escribe su función inversa y grafícalas en el mismo plano cartesiano.

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_4 x$ c) $f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Recuerda que $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$

Unidad 5

Indicador de logro:

2.6 Determina la función inversa de una función logarítmica o exponencial.

Secuencia:

El logaritmo se definió como tal para que sea la operación inversa de la potencia. En esta clase se observa la relación de funciones inversas (simetría, composición de funciones, dominio y rango) entre las funciones exponencial y logarítmica.

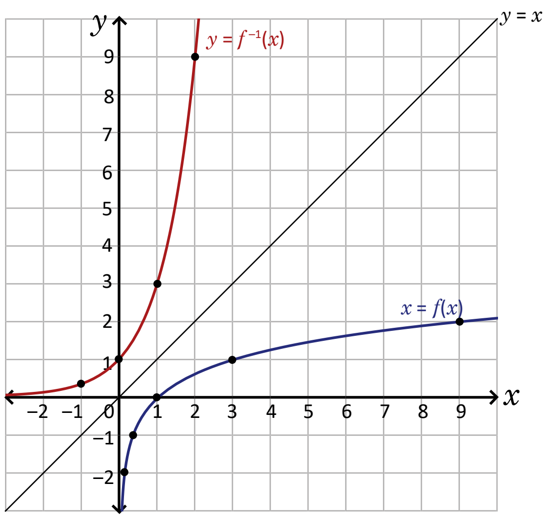
Propósito:

En el Problema inicial se observa la simetría respecto a la identidad entre las funciones exponencial y logarítmica, luego se comprueba la relación inversa por medio de la definición, en la que se debe tener claro el concepto de logaritmo. En los Problemas se sugiere retomar los gráficos de las funciones logarítmicas y aplicar la simetría respecto a la recta $y = x$ para graficar su inversa.

Solución de problemas:

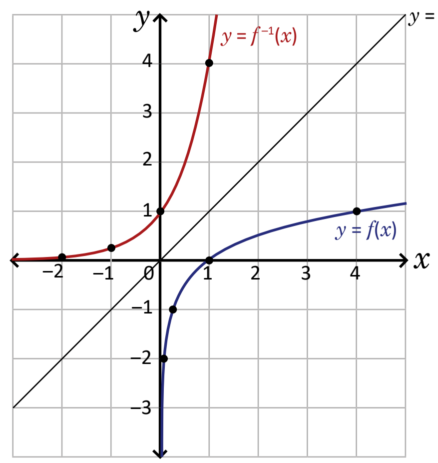
a) $f(x) = \log_3 x$

$f^{-1}(x) = 3^x$



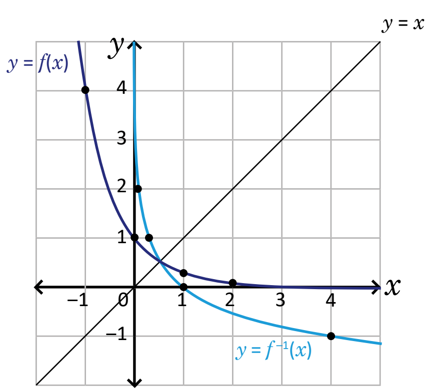
b) $f(x) = \log_4 x$

$f^{-1}(x) = 4^x$



c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



2.7 Ecuaciones logarítmicas, parte 1

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones encontradas.

a) $\log_2 x = 3$ b) $\log_3(x - 1) = 2$
c) $\log_5 x^2 = 4$ d) $\log_6(3x(x + 1)) = 2$

Verifica que el argumento del logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados.

Cuando se trata con logaritmos se consideran solo las soluciones reales.

Solución

a) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8.$

Como $8 > 0$ entonces, $x = 8$ es solución de la ecuación.

b) Se utiliza la definición de logaritmo:
$\log_3(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$

Se verifica que $10 - 1 = 9 > 0$.
Por lo tanto, $x = 10$ es solución de la ecuación.

c) Se utiliza la definición de logaritmo:

$$\begin{aligned}\log_5 x^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 = 5^4\\ &\Leftrightarrow x = \pm 5^2\\ &\Leftrightarrow x = \pm 25\end{aligned}$$

Se verifica que $(\pm 25)^2 > 0$.
Por lo tanto, $x = 25$ y $x = -25$ son soluciones de la ecuación.

d) Se utiliza la definición de logaritmo: $3x(x + 1) = 6^2$
Se resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}3x^2 + 3x - 6^2 = 0 &\Leftrightarrow 3(x + 4)(x - 3) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -4 \text{ o } x = 3\end{aligned}$$

Verificando si $x = -4$, $3(-4)(-4 + 1) = 36 > 0$.
Si $x = 3$, $3(3)(3 + 1) = 36 > 0$.
Por lo tanto, $x = -4$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación.

Conclusión

Una **ecuación logarítmica** es una ecuación en la cual aparece la variable x en el argumento del logaritmo.

Para resolver una ecuación de la forma $\log_a M = b$, donde M es una expresión algebraica de variable x, se resuelve la ecuación $a^b = M$ que se obtiene al aplicar la definición de logaritmo: $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$.
Luego se verifica si las soluciones encontradas satisfacen la condición del argumento $M > 0$.

Además, las ecuaciones exponenciales pueden resolverse aplicando logaritmos:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x\log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

Ejemplo

Observa la siguiente solución:

$7^x = 2 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2 \Leftrightarrow x\log 7 = \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 7}{\log 2} \Leftrightarrow x = 2.80735...$

Problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2(x + 1) = 5$ c) $\log_2 x^2 = 6$ d) $\log_3 x^3 = 6$
e) $\log_4 x = -2$ f) $\log_3(2x + 1) = -1$ g) $\log_2 x^2 = -2$ h) $\log_2(x^2 + 4) = 3$
i) $\log(x(20 - x)) = 2$ j) $\log_6(x(13 - x)) = 2$ k) $\log(x(x + 3)) = 1$ l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $9^x = 15$ b) $2^{x+1} = 13$ c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125$

Indicador de logro:

2.7 Resuelve ecuaciones logarítmicas, aplicando propiedades de potencias.

Secuencia:

Se presentan las ecuaciones logarítmicas en las que se utiliza la definición de logaritmo y la resolución de ecuaciones lineales y de segundo grado. En esta clase, la aplicación de la definición de logaritmo es el primer paso para resolver dichas ecuaciones. Se presenta además la resolución de ecuaciones exponenciales utilizando logaritmos.

Posibles dificultades:

En el literal c) del Problema inicial aunque los estudiantes utilicen la propiedad 3 de la clase 2.3, se sugiere resolver nuevamente utilizando la definición para observar que en realidad la ecuación tienen dos soluciones.

Solución de problemas:

1a) $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

1b) $\log_2(x + 1) = 5 \Leftrightarrow x + 1 = 2^5 \Leftrightarrow x = 31$

1c) $\log_2 x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 2^6 \Leftrightarrow x = \pm 8$

1d) $\log_3 x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = 3^6 \Leftrightarrow x = 9$

1e) $\log_4 x = -2 \Leftrightarrow x = 4^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

1f) $\log_3(2x + 1) = -1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

1g) $\log_2 x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2^{-2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

1h) $\log_2(x^2 + 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 2^3$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$

1i) $\log(x(20 - x)) = 2 \Leftrightarrow x(20 - x) = 10^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0$

$\Leftrightarrow x = 10$

1j) $\log_6(x(13 - x)) = 2 \Leftrightarrow x(13 - x) = 6^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x = 9, x = 4$

1k) $\log(x(x + 3)) = 1 \Leftrightarrow x(x + 3) = 10$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5, x = 2$

1l) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2a) $9^x = 15 \Leftrightarrow \log 9^x = \log 15$

$\Leftrightarrow x\log 9 = \log 15$

$\Leftrightarrow x = \frac{\log 15}{\log 9}$

$\Leftrightarrow x = 1.23248...$

2b) $2^{x+1} = 13 \Leftrightarrow \log 2^{x+1} = \log 13$

$\Leftrightarrow (x + 1)\log 2 = \log 13$

$\Leftrightarrow x = \frac{\log 13}{\log 2} - 1$

$\Leftrightarrow x = 2.70043...$

2c) $5^{2x-1} = 1\,953\,125 \Leftrightarrow \log 5^{2x-1} = \log 1\,953\,125$

$\Leftrightarrow (2x - 1)\log 5 = \log 1\,953\,125$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log 1\,953\,125}{\log 5} + 1\right)$

$\Leftrightarrow x = 5$

Lección 2

2.8 Ecuaciones logarítmicas, parte 2

Problema inicial

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

Solución

a) Se usa la propiedad de la suma de logaritmos:

$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(x(x-1))$

sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$\log_2(x(x-1)) = 1$

se debe aplicar la definición y resolver:

$$\begin{aligned}\log_2(x(x-1)) = 1 &\Leftrightarrow (x(x-1)) = 2^1\\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1\end{aligned}$$

se verifica que el argumento es positivo en cada logaritmo:

si $x = 2$, $2 > 0$, $2 - 1 = 1 > 0$,

si $x = -1$, $-1 < 0$. No es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

b) $\log_5(2x) = \log_5(x+1)$

$2x = x + 1$ Se utiliza la propiedad: $\log_a M = \log_a N \Rightarrow M = N$,

$x = 1$ se resuelve la ecuación.

Se evalúa $x = 1$ en cada logaritmo

$2(1) = 2 > 0$ y $2 + 1 = 3 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 1$.

Conclusión

Para resolver las ecuaciones logarítmicas se utilizan las propiedades de los logaritmos para llevar la ecuación a la forma $\log_a M = b$.

1. Para todo M y N, números positivos se cumple que

   a) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

   b) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

   c) $\log_a M^b = b\log_a M$

   d) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

2. Se debe comprobar que el argumento de cada logaritmo es positivo al sustituir los valores encontrados para verificar que son soluciones de la ecuación.

En la propiedad $\log_a M^b = b\log_a M$, M debe ser un número positivo. Si b es par se debe tener cuidado.
Ejemplo:
$\log_3 x^2 = 4 \Leftrightarrow 2\log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$
En este caso falta la solución $x = -9$.
Así, es mejor no utilizarla en la solución de ecuaciones.

Problemas

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2$

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

e) $\log_8(x-3)^9 = 6$

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18$

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2-x+1) = 2$

h) $\log_2(x^4-6x^2+16)^4 = 12$

Unidad 5

Indicador de logro:

2.8 Resuelve ecuaciones logarítmicas utilizando propiedades de logaritmos y potencias.

Secuencia:

En las ecuaciones logarítmicas que se presentan en esta clase es necesario utilizar las operaciones con logaritmos como primer paso, esto dará lugar a una ecuación como las resueltas en la clase anterior. Otro paso que es necesario realizar es el de comprobar que las soluciones encontradas no anulan ni hacen negativo el argumento de cada logaritmo de la ecuación inicial.

Propósito:

El Problema inicial presenta dos Problemas en los que se deben utilizar las propiedades de los logaritmos. Algunos de los Problemas a desarrollar involucran la resolución de ecuaciones bicuadráticas y también puede ser necesario el cambio de variable.

Solución de problemas:

a) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3 \Rightarrow \log_2 x(x-2) = 3$

$\Rightarrow \quad x(x-2) = 8$

$\Rightarrow x = 4$ o $x = -2$

si $x = 4$, $4 > 0$, $4 - 2 = 2 > 0$

si $x = -2$, $-2 < 0$. No es solución de la ecuación.

Por lo tanto, la solución es $x = 4$.

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+1)^2 = -2 \Rightarrow (x^2+1)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 25$

$\Rightarrow x^2 = -6$ o $x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2$ o $x = -2$

$(x^2+1)^2 > 0$ para todo número real x.

Por lo tanto, las soluciones son $x = 2$ y $x = -2$.

c) $\log_4(3x) + \log_4(x-2)^{-1} = 1$

$\Rightarrow \quad \log_4[3x(x-2)^{-1}] = 1$

$\Rightarrow \quad \log_4 \frac{3x}{x-2} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{3x}{x-2} = 4$

$\Rightarrow \quad 3x = 4(x-2)$

$\Rightarrow \quad x = 8$

si $x = 8$, $3(8) = 24 > 0$, $8 - 2 = 6 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 8$.

d) $\log(x+1) = \log(1-x)$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 1 - x$

$\Rightarrow \quad x = 0,$

si $x = 0$, $0 + 1 = 1 > 0$, $1 - 0 = 1 > 0$.

Por lo tanto, la solución es $x = 0$.

e) $\log_8(x-3)^9 = 6 \Rightarrow 9\log_8(x-3) = 6$

$\Rightarrow \log_8(x-3) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = 7$

si $x = 7$, $(7-3)^9 = 4^9 > 0$

Por lo tanto, la solución es $x = 7$.

f) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^6 = -18 \Rightarrow (x-2)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-18}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt[6]{2^{18}}$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\, 2^3$

$\Rightarrow x = 10$ o $x = -6$

si $x = 10$, $(10-2)^6 = 8^6 > 0$

si $x = -6$, $(-6-2)^6 = 8^6 > 0$

Por lo tanto las soluciones son $x = 10$, $x = -6$.

g) $\log_3(x+1) + \log_3(x^2 - x + 1) = 2$

$\Rightarrow \quad \log_3[(x+1)(x^2-x+1)] = 2$

$\Rightarrow \quad \log_3(x^3+1) = 2$

$\Rightarrow \quad x^3 + 1 = 3^2$

$\Rightarrow \quad x = 2$

si $x = 2$, $2 + 1 = 3 > 0$, $2^2 - 2 + 1 = 3 > 0$

Por lo tanto, la solución es $x = 2$.

h) $\log_2(x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 12$

$\Rightarrow \quad (x^4 - 6x^2 + 16)^4 = 2^{12}$

$\Rightarrow \quad x^4 - 6x^2 + 16 = \pm 8$

$\Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ o $x^4 - 6x^2 + 24 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$ o $x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm 2$ o $x = \pm\sqrt{2}$

$(x^4 - 6x^2 + 16)^4 > 0$ para todo número real x.

Por lo tanto las soluciones son $x = \pm 2$, $x = \pm\sqrt{2}$.

2.9 Logaritmo base 10 y logaritmo natural*

Problema inicial

1. Determina el valor de $\log 2^{2019}$.
2. ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{2019}?

Observa que:
n se escribe con 1 dígito si y solo si $10^0 \leq n < 10^1$
n se escribe con 2 dígitos si y solo si $10^1 \leq n < 10^2$
n se escribe con 3 dígitos si y solo si $10^2 \leq n < 10^3$

Solución

1. Se calcula $\log 2^{2019} = 2019\log 2 = 607.77956...$

2. Observa el número de dígitos de los números

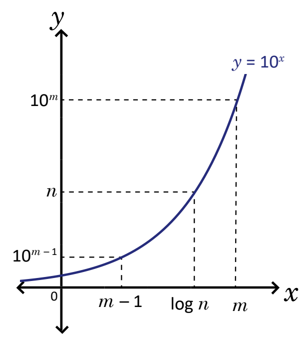
$$\underbrace{1, 2, ..., 9}_{\text{1 dígito}}, \underbrace{10, 11, 12, ..., 99}_{\text{2 dígitos}}, \underbrace{100, 101, ..., 999}_{\text{3 dígitos}}, \underbrace{1\,000, 1\,001, ..., 9\,999}_{\text{4 dígitos}}, \underbrace{10\,000, 10\,001}_{\text{5 dígitos}}...$$

Entonces se puede deducir que, si n es un número positivo:
n se escribe con m dígitos si y solo si $10^{m-1} \leq n < 10^m$

El número de dígitos de 2^{2019} está determinado por el exponente m tal que

$$10^{m-1} \leq 2^{2019} < 10^m \Leftrightarrow \log 10^{m-1} \leq \log 2^{2019} < \log 10^m$$
$$\Leftrightarrow m - 1 \leq \log 2^{2019} < m$$

Del problema 1 se tiene que $607 \leq \log 2^{2019} < 608$.
Por lo tanto, 2^{2019} se escribe con 608 dígitos.



Observa que si $10^{m-1} \leq n < 10^m$, entonces $m - 1 \leq \log n < m$, ya que la base es $10 > 1$.

Conclusión

1. El logaritmo base 10 de un número a se denota por $\log a$.

2. El número de dígitos de un número entero positivo a es el número entero m inmediatamente mayor a $\log a$.

3. El logaritmo natural de un número a es el logaritmo $\log_e a$, la base es el número neperiano $e = 2.71828...$, y se utiliza la notación $\log_e a = \ln a$.
El logaritmo natural es muy útil en el cálculo infinitesimal.

Problemas

1. ¿Cuántos dígitos tienen las siguientes potencias?
   a) 3^{2019} b) 5^{1000} c) $2\,019^{2019}$

2. ¿Cuáles potencias de 2 tienen 2 019 dígitos?

3. Obtener el valor de los siguientes logaritmos:
   a) $\ln 2$ b) $\ln 3$
   c) $\ln 10$ d) $\ln \frac{1}{4}$
   e) $\ln \frac{8}{3}$ f) $\ln \frac{11}{3}$

En la calculadora utiliza la tecla ln para calcular el logaritmo natural de un número.

Indicador de logro:

2.9. Determina la cantidad de dígitos de un entero positivo utilizando logaritmo base 10 y calcula logaritmo natural de un número usando calculadora.

Secuencia:

Se introduce como aplicación de logaritmos la cantidad de dígitos de un número entero positivo; en ese sentido les será útil a los estudiantes la monotonía de la función logaritmo vista en la clase 2.5 de esta unidad. Si la pista no es suficiente para contestar la pregunta 2 puede indicar su utilidad para facilitar la solución.

Propósito:

En el Problema inicial, los estudiantes deben observar la relación entre el logaritmo de un número entero positivo y el exponente de la potencia de 10 inmediatamente mayor al número.

Solución de problemas:

1a) $\log 3^{2\,019} = 2\,019 \log 3 = 963.3078...$
Por lo tanto $3^{2\,019}$ tiene 964 dígitos.

1b) $\log 5^{1\,000} = 1\,000 \log 5 = 698.970004...$
Por lo tanto $5^{1\,000}$ tiene 699 dígitos.

1c) $\log 2\,019^{2\,019} = 2\,019 \log 2\,019 = 6\,673.07022...$
Por lo tanto $2\,019^{2\,019}$ tiene 6 674 dígitos.

2. Sea r un número entero tal que 2^r tiene 2 019 dígitos entonces se cumple que

$\Rightarrow 2\,018 \leq \log 2^r < 2\,019$

$\Rightarrow 2\,018 \leq r\log 2 < 2\,019$

$\Rightarrow \dfrac{2\,018}{\log 2} \leq r < \dfrac{2\,019}{\log 2}$

$\Rightarrow 6\,703.6508... \leq r < 6\,706.9728...$

$\Rightarrow r = 6\,704,\ r = 6\,705$ y $r = 6\,706$.

Por lo tanto las potencias de 2 que tienen 2 019 dígitos son $2^{6\,704}$, $2^{6\,705}$ y $2^{6\,706}$.

3a) $\ln 2 = 0.69314...$

3b) $\ln 3 = 1.09861...$

3c) $\ln 10 = 2.30258...$

3d) $\ln \frac{1}{4} = -1.38629...$

3e) $\ln \frac{8}{3} = 0.98082...$

3f) $\ln \frac{11}{3} = 1.29928...$

Lección 2

2.10 Practica lo aprendido

1. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_7 49$ b) $\log_{16} 2$ c) $\log_9 \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ e) $\log_5 \sqrt{5}$ f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$ h) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ i) $\log_{\sqrt{2}} 2$

j) $\log_{\sqrt{2}} 4$ k) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$ l) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2. Determina el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log_6 2 + \log_6 3$ b) $\log 4 + \log 25$ c) $\log_3 99 - \log_3 11$

d) $\log_5 4 - \log_5 500$ e) $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4}$ f) $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3}$

g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30$ h) $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45}$ i) $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3}$

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin usar la calculadora.

a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5}$ b) $\frac{\log_3 49}{\log_3 7}$ c) $\frac{\log_6 64}{\log_6 32}$

4. Encuentra el valor de los siguientes logaritmos con la propiedad del cambio de base:

a) $\log_3 15$ b) $\log_8 6$ c) $\log_2 \frac{1}{5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$ f) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2}$

5. Grafica las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_8 x = \frac{7}{3}$ b) $\log_3 x(x + 2) = 1$ c) $\log_2 x(2 - 3x) = -2$

d) $\log_6(2x - 3) = \log_6 5 + \log_6 7$ e) $\log (x - 3) + \log (5 - x) = 0$ f) $\log (x - 8) - \log (x - 9) = \log 4$

g) $\log_7(-x) - \log_7(6 - x) = 1$ h) $\log_6(x - 2) + \log_6(x + 3) = 1$ i) $\log_2(x^2 + 9) = 1 + \log_2(2x^2 - 33)$

7. Determina la cantidad de dígitos de los siguientes números:

a) 2^{350} b) 3^{1234} c) 4^{98765}

8. Encuentra la potencia de base 11 que se escribe con 100 dígitos. ¿Existe otra?

Unidad 5

Indicador de logro:

2.10 Resuelve problemas utilizando logaritmos.

Solución de problemas:

1a) $\log_7 49 = 2$ **1b)** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$ **1c)** $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ **1d)** $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

1e) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ **1f)** $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$ **1g)** $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = -\frac{1}{4}$ **1h)** $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{9}$

1i) $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$ **1j)** $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$ **1k)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$ **1l)** $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6$

2a) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$ **2b)** $\log 4 + \log 25 = \log 100 = 2$ **2c)** $\log_3 99 - \log_3 11 = \log_3 9 = 2$

2d) $\log_5 4 - \log_5 500 = \log_5 \frac{1}{125} = -3$ **2e)** $\log_7 \frac{28}{9} + \log_7 \frac{63}{4} = \log_7 49 = 2$ **2f)** $\log_8 \frac{48}{5} + \log_8 \frac{10}{3} = \log_8 32 = \frac{5}{3}$

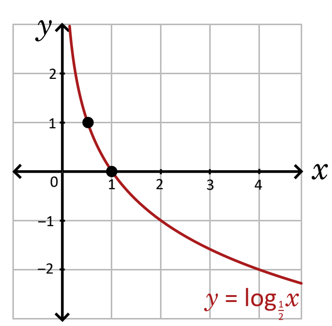
2g) $\log_2 \frac{15}{16} - \log_2 30 = \log_2 \frac{1}{32} = -5$ **2h)** $\log_9 \frac{36}{5} - \log_9 \frac{4}{45} = \log_9 81 = 2$ **2i)** $\log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} + \log_{\sqrt{5}} \frac{20}{3} = \log_{\sqrt{5}} 25 = 4$

3a) $\frac{\log_9 125}{\log_9 5} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$ **3b)** $\frac{\log_3 49}{\log_3 7} = \log_7 49 = 2$ **3c)** $\frac{\log_6 64}{\log_6 32} = \frac{\log_6 2^6}{\log_6 2^5} = \frac{6\log_6 2}{5\log_6 2} = \frac{6}{5}$

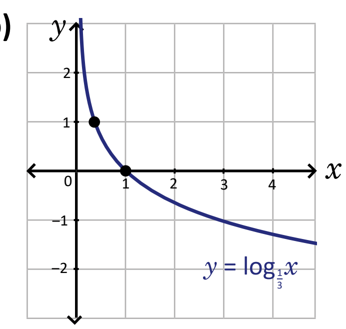
4a) $\log_3 15 = 2.46497...$ **4b)** $\log_8 6 = 0.86165...$ **4c)** $\log_2 \frac{1}{5} = -2.32192...$

4d) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = -1.58496...$ **4e)** $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} = 0.36907...$ **4f)** $\log_{\frac{5}{3}} \frac{1}{2} = -1.35691...$

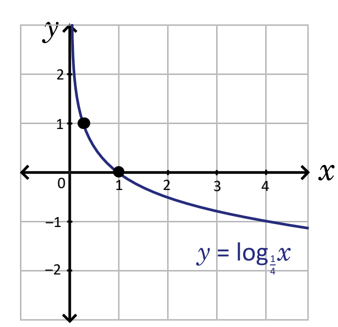
5a)



5b)



5c)



6a) $x = 2^7$ **6b)** $x = 1$, $x = -3$ **6c)** $x = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$

6d) $x = 19$ **6e)** $x = 4$ **6f)** $x = \frac{28}{3}$

6g) No tiene solución. **6h)** $x = 3$ **6i)** $x = 5$, $x = -5$

7a) 2^{350} tiene 106 dígitos. **7b)** 3^{1234} tiene 589 dígitos. **7c)** 4^{98765} tiene 59 463 dígitos.

8. Sea n un número entero tal que 11^n que se escribe con 100 dígitos,

$\Rightarrow 99 \leq \log 11^n < 100 \Rightarrow 99 \leq n\log 11 < 100 \Rightarrow \frac{99}{\log 11} \leq n < \frac{100}{\log 11} \Rightarrow 95.065... \leq n < 96.02525...$

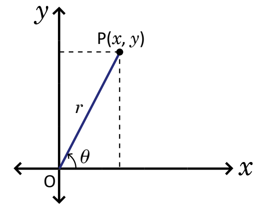
Entonces la única potencia de 11 que tiene 100 dígitos es 11^{96}.

3.1 Razones trigonométricas de cualquier ángulo (repaso)

Problema inicial

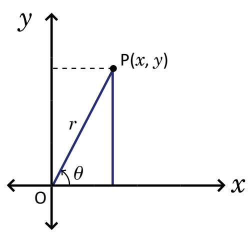
1. Se tiene la gráfica del ángulo θ, O es el origen, $\overline{\text{OP}}$ es el lado terminal del ángulo θ dibujado en posición estándar, r es la longitud del segmento $\overline{\text{OP}}$. Escribe las razones trigonométricas del ángulo θ.

2. ¿Las razones trigonométricas dependen del valor de r?

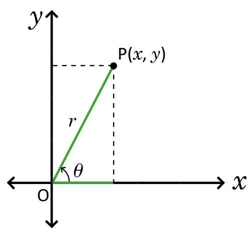


Solución

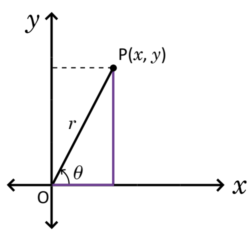
1.



sen $\theta = \frac{y}{r}$



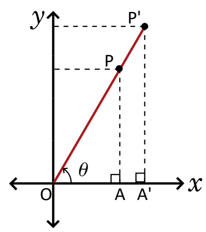
cos $\theta = \frac{x}{r}$



tan $\theta = \frac{y}{x}$

siempre que $x \neq 0$

2. Se elige otro punto P'(x', y') tal que $\overline{\text{OP'}}$ es también lado terminal de θ, como muestra la figura:



Se cumple que P es un punto del segmento $\overline{\text{OP'}}$.

Sea A la proyección de P en el eje x y A' la proyección de P' en el eje x.

Se cumple que ΔPOA ~ ΔP'OA', por criterio AA de semejanza de triángulos.

Si $r' = \overline{\text{OP'}}$, entonces de la semejanza se tiene que sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$, cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$ y tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.

Por lo tanto, las razones no dependen del valor de r.

Conclusión

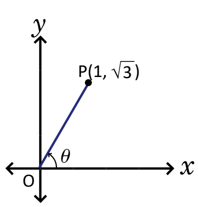
1. Las razones trigonométricas no dependen de la longitud del segmento $\overline{\text{OP}}$.
2. Las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo θ.
3. Al ángulo θ le corresponde un único valor de sen θ, un único valor de cos θ y un único valor de tan θ.
4. Las razones trigonométricas sen θ, cos θ y tan θ son funciones del ángulo θ.

De ahora en adelante se llamarán **funciones trigonométricas** a las razones seno, coseno y tangente.

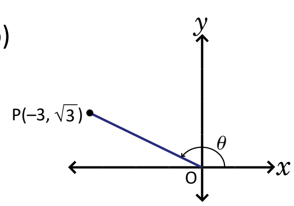
Problemas

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo θ a partir del punto P(x, y).

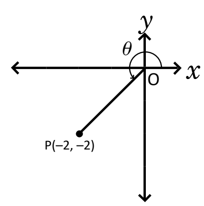
a)



b)



c)



2. Comprueba que el punto P'(cos θ, sen θ) pertenece al segmento $\overline{\text{OP}}$ en cada literal del problema 1.

Indicador de logro:

3.1 Calcula las razones trigonométricas de un ángulo determinado por un punto P en el plano cartesiano.

Secuencia:

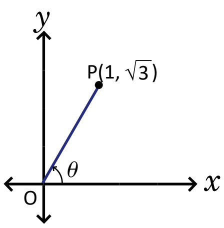
Ya se estudiaron las razones trigonométricas de un ángulo, para esta clase se establecen como funciones trigonométricas bajo la noción de correspondencia.

Propósito:

Al desarrollar el Problema inicial se probará que las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo y no de la longitud del segmento que corresponde al lado final.

Solución de problemas:

1a)



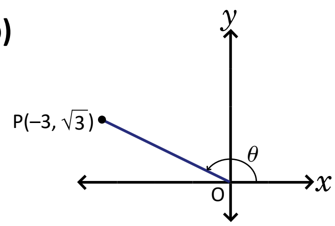
$r = \text{OP} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

1b)



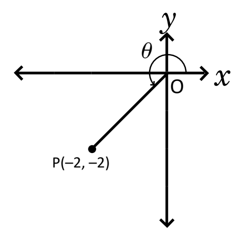
$r = \text{OP} = 2\sqrt{3}$

$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1c)



$r = \text{OP} = 2\sqrt{2}$

$\text{sen}\ \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = 1$

2a) recta: $y = \sqrt{3}x$

$\text{P}'(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2b) recta: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\text{P}'(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2c) recta: $y = x$

$\text{P}'(\cos\theta, \text{sen}\ \theta) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

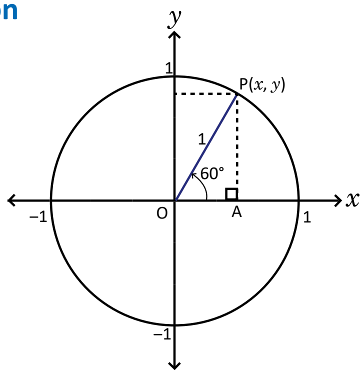
3.2 Círculo trigonométrico

Problema inicial

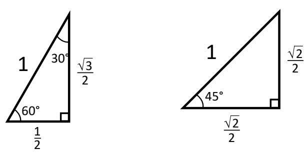
1. Dibuja en el plano cartesiano una circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Representa el ángulo de 60° tomando como lado terminal un radio de la circunferencia.
2. Determina las coordenadas del punto P(x, y), que es la intersección de la circunferencia con el lado terminal del ángulo.

Solución

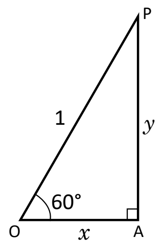
1.



Los triángulos notables a utilizar en los ángulos de referencia en el Círculo trigonométrico son:



2. En la figura se forma el triángulo rectángulo POA, P es el punto P(x, y), O es el origen y A es la proyección de P sobre el eje x.



Utilizando razones trigonométricas:
sen 60° = $\frac{y}{1} = y$ y cos 60° = $\frac{x}{1} = x$

Por lo que se tiene:
y = sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y x = cos 60° = $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son: P$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

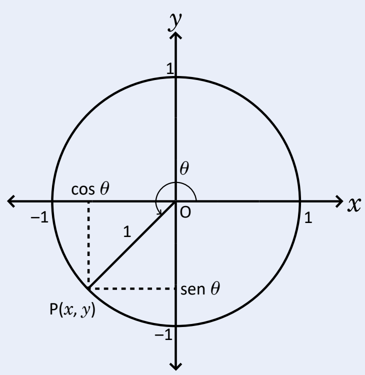
Conclusión

1. Se denomina **Círculo trigonométrico (CT)** a la circunferencia de radio 1, centrada en el origen O.

2. Las coordenadas de un punto P(x, y) en el círculo trigonométrico están determinadas por el ángulo θ dibujado en posición estándar con lado terminal $\overline{OP}$. Por definición de las razones trigonométricas de cualquier ángulo se tiene sen $\theta = \frac{y}{1} = y$ y cos $\theta = \frac{x}{1} = x$.

   Por lo tanto, P(x, y) = P(cos θ, sen θ).

3. Para todo ángulo θ es posible determinar los valores de cos θ y sen θ como coordenadas de un punto en el CT.



Problemas

1. Para cada valor de θ grafica el punto P(cos θ, sen θ) en el CT. Dibuja un círculo por cada literal.
   a) θ = 120°, θ = 210° b) θ = 30°, θ = 300° c) θ = 45°, θ = 135°
   d) θ = –45°, θ = –135° e) θ = 360°, θ = 405° f) θ = 495°, θ = 540°

2. Obtén el seno y coseno de los siguientes ángulos utilizando el círculo trigonométrico.
   a) θ = 0° b) θ = 90° c) θ = 180° d) θ = 270°

Utiliza el hecho que P(cos θ, sen θ) = P(x, y).

Indicador de logro:

3.2 Grafica en el círculo trigonométrico el punto P(cos θ, sen θ) para un ángulo θ dado.

Secuencia:

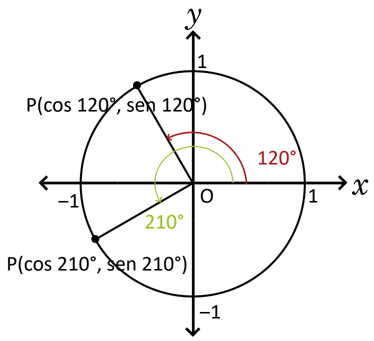
En la clase anterior se vio que las razones trigonométricas no dependen de la longitud del lado terminal de un ángulo dado, por lo que se introduce el círculo trigonométrico (círculo de radio 1 centrado en el origen) por medio del cual se describirán características de las funciones trigonométricas. Se recuerda a los estudiantes los triángulos notables para facilitar el cálculo de las razones de 30°, 45° y 60°.

Propósito:

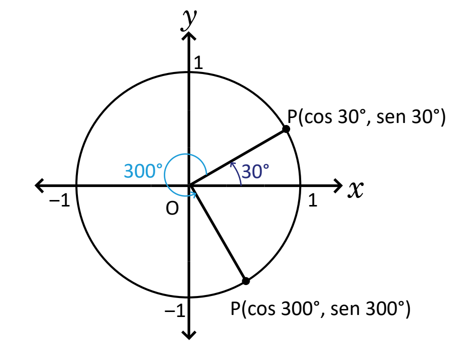
El Problema inicial permite al estudiante visualizar la posición en el plano de los valores del seno y coseno de un ángulo. En el numeral 1 de los Problemas el estudiante debe ubicar el ángulo con un transportador para luego señalar el punto solicitado, en el numeral 2 el estudiante debe reconocer las coordenadas de los puntos correspondientes a los ángulos dados.

Solución de problemas:

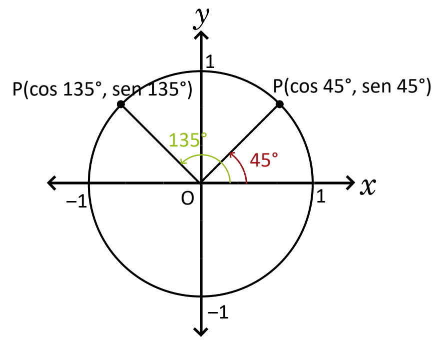
1a) $\theta = 120°$, $\theta = 210°$



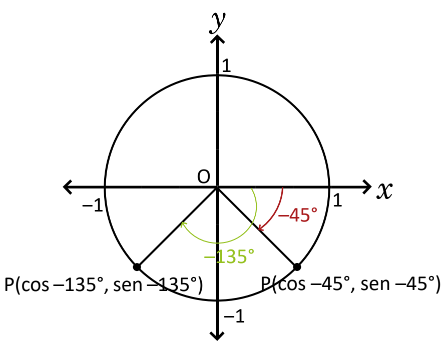
1b) $\theta = 30°$, $\theta = 300°$



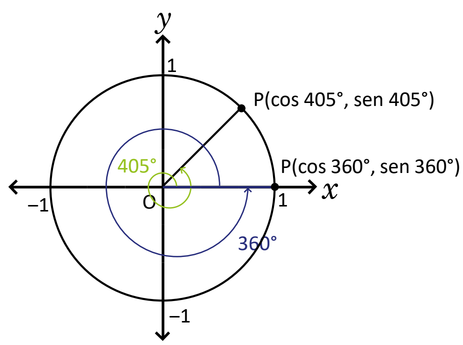
1c) $\theta = 45°$, $\theta = 135°$



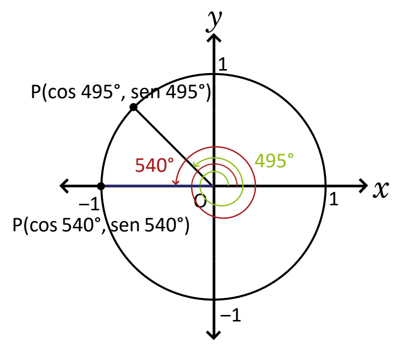
1d) $\theta = –45°$, $\theta = –135°$

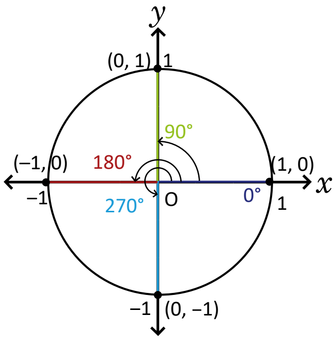


1e) $\theta = 360°$, $\theta = 405°$



1f) $\theta = 495°$, $\theta = 540°$





2a) P(cos 0°, sen 0°) = P(1, 0)
$\Rightarrow$ cos 0° = 1 y sen 0° = 0

2b) P(cos 90°, sen 90°) = P(0, 1)
$\Rightarrow$ cos 90° = 0 y sen 90° = 1

2c) P(cos 180°, sen 180°) = P(–1, 0)
$\Rightarrow$ cos 180° = –1 y sen 180° = 0

2d) P(cos 270°, sen 270°) = P(0, –1)
$\Rightarrow$ cos 270° = 0 y sen 270° = –1

3.3 Periodicidad de las funciones seno y coseno en el círculo trigonométrico

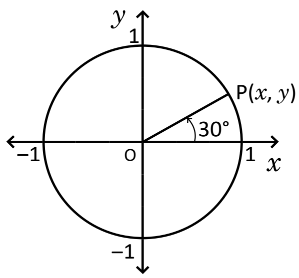
Problema inicial

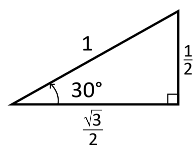
Grafica los siguientes puntos en el CT y determina sus coordenadas:

a) P(cos 30°, sen 30°) b) P(cos 390°, sen 390°)

Solución

a)

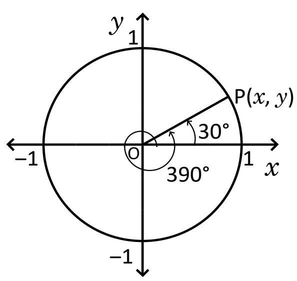




$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, $P(\cos 30°, \text{sen } 30°) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b)



Se descompone el ángulo 390° = 30° + 360°.

El ángulo de referencia es 30°, así se tiene que

$\text{sen } 390° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ y $\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto, $P(\cos 390°, \text{sen } 390°) = P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

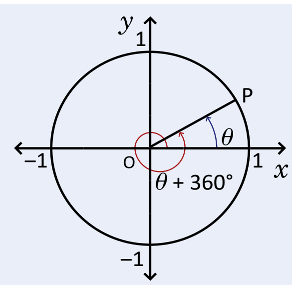
Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera y sea $\alpha = \theta + 360°$. Se cumple que al dibujar los ángulos θ y α, en posición estándar, tienen el mismo lado terminal en el CT.

Así se cumple que $P(\cos \theta, \text{sen } \theta) = P(\cos(\theta + 360°), \text{sen}(\theta + 360°))$.

Una función f es **periódica** si existe un valor t tal que para todo x se cumple que $f(x) = f(x + t)$. Por lo que las funciones seno y coseno son periódicas pues cumplen las siguientes propiedades:

$\cos(\theta \pm 360°) = \cos \theta$ $\text{sen}(\theta \pm 360°) = \text{sen } \theta$



Ejemplo

Determina el valor de sen(–330°).

$\text{sen}(-330°) = \text{sen}(-330° + 360°) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, aplicando la periodicidad.

Por lo tanto, $\text{sen}(-330°) = \frac{1}{2}$.

Problemas

1. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores:

a) sen 405° b) cos 420° c) sen(–300°)

d) cos(–675°) e) sen 1080° f) cos 630°

g) sen(–900°) h) cos(–630°) i) sen 540°

2. Utiliza las fórmulas del seno y coseno de una suma para demostrar las siguientes propiedades:

a) $\cos(\theta + 360°) = \cos \theta$ b) $\text{sen}(\theta + 360°) = \text{sen } \theta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$

Indicador de logro:

3.3 Utiliza la periodicidad para evaluar las funciones seno y coseno en ángulos mayores a 360° y menores a 0°.

Secuencia:

Ahora se utiliza el círculo trigonométrico para observar la periodicidad de las funciones trigonométricas seno y coseno por lo que es necesario que los estudiantes recuerden las razones de los ángulos 30°, 45° y 60°; se puede hacer referencia a la clase anterior.

Propósito:

En el Problema inicial se observa la periodicidad para un ángulo particular utilizando el recurso del círculo trigonométrico, en los Problemas se probará por medio de la fórmula de suma de ángulos.

Solución de problemas:

1a) $\operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen}(45° + 360°) = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1b) $\cos 420° = \cos(60° + 360°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

1c) $\operatorname{sen}(-300°) = \operatorname{sen}(-300° + 360°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1d) $\cos(-675°) = \operatorname{sen}(-675° + 360° \times 2) = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1e) $\operatorname{sen} 1\,080° = \operatorname{sen}(3(360°)) = 0$

1f) $\cos 630° = \cos 270° = 0$

1g) $\operatorname{sen}(-900°) = \operatorname{sen} 180° = 0$

1h) $\cos(-630°) = \cos(-630° + 360° \times 2) = \cos 90° = 0$

1i) $\operatorname{sen} 540° = \operatorname{sen} 180° = 0$

2a) $\cos(\theta + 360°) = \cos\theta \cos 360° - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 360° = \cos\theta$

2b) $\operatorname{sen}(\theta + 360°) = \operatorname{sen}\theta \cos 360° + \cos\theta \operatorname{sen} 360° = \operatorname{sen}\theta$

3.4 Periodicidad de la tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Para cada uno de los ángulos:

1. $\theta = 30°$
2. $\theta = -30°$

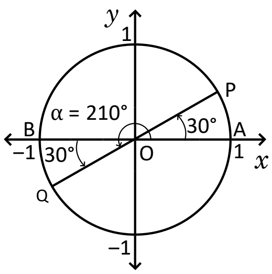
P'($-x$, $-y$) es el punto simétrico de P(x, y) respecto al origen.

Realiza lo siguiente:

a) Grafica el punto Q simétrico al punto P(cos θ, sen θ) respecto al origen y escribe sus coordenadas.
b) Determina el ángulo α en posición estándar que corresponde al punto Q.
c) Cálcula el valor de tan α.

Solución

1.

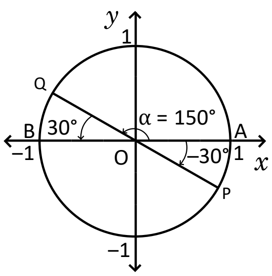


a) Se prolonga el segmento $\overline{OP}$ hasta cortar nuevamente al CT. Este punto de corte es Q pues $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$. Sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢BOQ = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° + 30° = 210°.

c) Se tiene el punto Q(–cos 30°, –sen 30°), entonces:
$$\tan 210° = \frac{-\text{sen } 30°}{-\cos 30°} = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2.



a) Se grafica el punto Q y sus coordenadas son Q(–cos 30°, –sen 30°) por ser simétrico al punto P, respecto al origen.

b) Sean los puntos A(1, 0) y B(–1, 0). Por ángulos opuestos por el vértice se cumple que ∢QOB = ∢AOP = 30°. Por lo tanto, α = 180° – 30° = 150°.

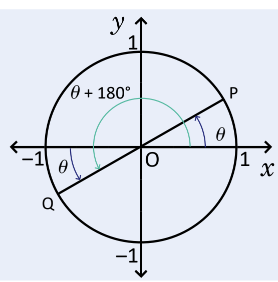
c) Se tiene el punto Q(cos(–30°), –sen(–30°)), entonces:
$$\tan 150° = \frac{-\text{sen}(-30°)}{-\cos(-30°)} = \frac{\text{sen}(-30°)}{\cos(-30°)} = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Conclusión

Sea θ un ángulo cualquiera, entonces:
$$Q(\cos(\theta + 180°), \text{sen}(\theta + 180°)) = Q(-\cos \theta, -\text{sen } \theta).$$

Así, $\tan(\theta + 180°) = \frac{-\text{sen } \theta}{-\cos \theta} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$.

Por lo tanto, la propiedad de **periodicidad** de la tangente está dada por la expresión: $\tan(\theta \pm 180°) = \tan \theta$.



Problemas

1. Utiliza la periodicidad de la función tangente para calcular los siguientes valores:

a) tan 225°	b) tan 210°	c) tan 240°	d) tan 180°
e) tan(–150°)	f) tan(–135°)	g) tan(–120°)	h) tan(–300°)

2. Utiliza la fórmula de la tangente de una suma para demostrar la propiedad $\tan(\theta + 180°) = \tan \theta$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Unidad 5

Indicador de logro:

3.4 Utiliza la periodicidad para calcular la tangente de ángulos mayores a 180° y menores a 0°.

Secuencia:

Utilizando el círculo trigonométrico se observa ahora la periodicidad de la tangente para un ángulo dado, en este punto se marca una de las diferencias entre las funciones seno y coseno y la función tangente.

Propósito:

En el Problema inicial para establecer la periodicidad de la función tangente se hace la relación entre la simetría respecto al origen para dos puntos en el círculo trigonométrico y los ángulos correspondientes a dichos puntos.

Solución de problemas:

1a) $\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$

1b) $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1c) $\tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$

1d) $\tan 180° = \tan 0° = 0$

1e) $\tan(-150°) = \tan(-150° + 180°) = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1f) $\tan(-135°) = \tan(-135° + 180°) = \tan 45° = 1$

1g) $\tan(-120°) = \tan(-120° + 180°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

1h) $\tan(-300°) = \tan(-300° + 2(180°)) = \tan 60° = \sqrt{3}$

2. $\tan(\theta + 180°) = \frac{\tan\theta + \tan 180°}{1 - \tan\theta \tan 180°} = \frac{\tan\theta + 0}{1 - (\tan\theta)(0)} = \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$

En el problema 1 a) se descompone el ángulo como suma de dos ángulos, uno de los cuales debe ser 180°, otra forma en que puede realizarse es calcular la tangente del ángulo restándole 180°. En los literales e) al h) se suma 180°, o un múltiplo de este, hasta obtener un ángulo cuya tangente es conocida.

Los estudiantes pueden referirse a los triángulos notables de la clase 3.2 de esta unidad.

3.5 Función seno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función y = sen θ.

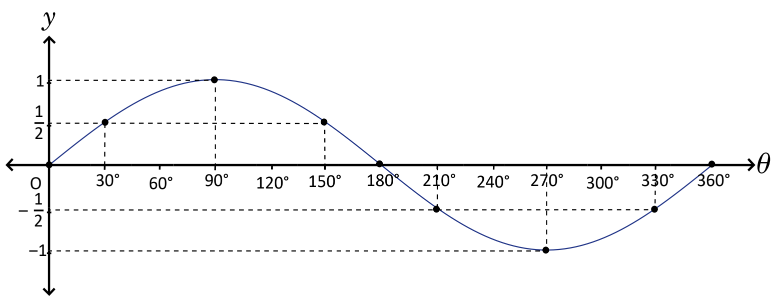
θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	300°	360°
sen θ									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

1.

θ	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0

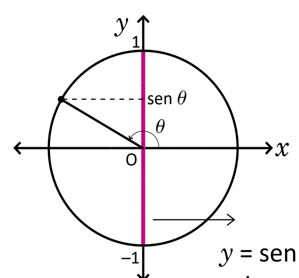


2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo.

   Por lo tanto, el dominio de la función y = sen θ es $\mathbb{R}$.

   Rango. Del CT se tiene que el valor del seno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo [−1, 1].

   Por lo tanto, el rango de la función y = sen θ es [−1, 1].



y = sen θ toma valores en [−1, 1]

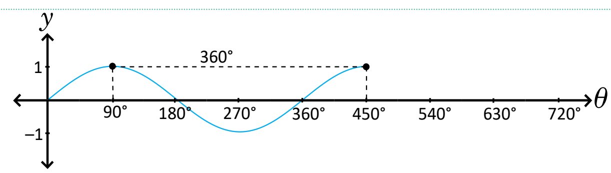
Conclusión

La función $f(\theta)$ = sen θ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango R_f = [−1, 1].

La función $f(\theta)$ = sen θ es una función periódica, es decir, existe un valor α tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$ para todo valor de θ. Se llama **periodo** de la función f al valor más pequeño $\alpha > 0$ tal que $f(\theta + \alpha) = f(\theta)$. El periodo de la función seno es 360°. En general se cumple que sen $(\theta + 360°n)$ = sen θ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función seno graficada en el intervalo [0°, 450°]. Utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta)$ = sen θ, en el intervalo [−360°, 0°].

Indicador de logro:

3.5 Grafica la función seno utilizando la periodicidad.

Secuencia:

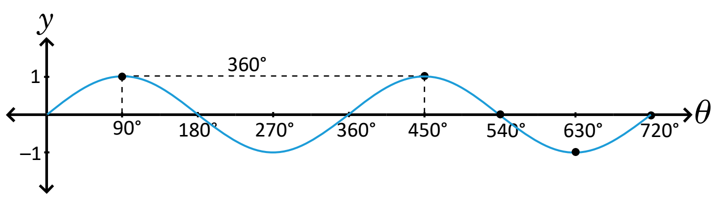
Se dibuja la gráfica de la función seno por medio de la ubicación de puntos en el plano y se estudian además su dominio y rango.

Propósito:

Los valores de los ángulos utilizados en la tabla permitirá ubicar puntos en el plano fácilmente. En los Problemas se debe utilizar la periodicidad para completar o dibujar las gráficas. El estudiante debe ser capaz de reconocer que la gráfica se "repite" en cada intervalo de 360°.

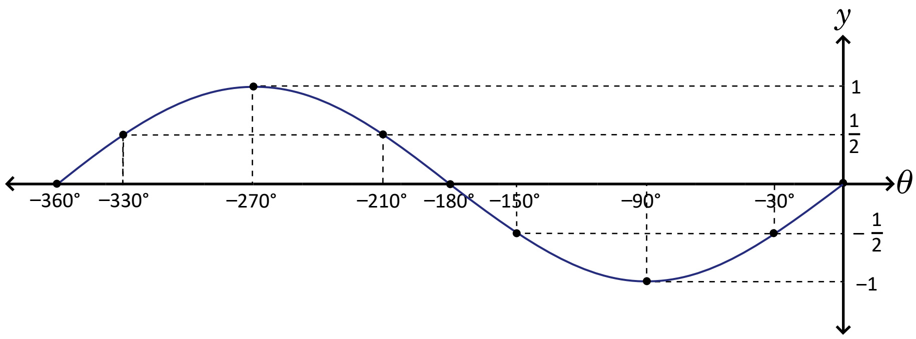
Solución de problemas:

1.



Para gráficar funciones trigonométricas se sugiere marcar el eje x cada 30°, 45° o 60°.

2.



3.6 Función coseno

Problema inicial

1. Completa la siguiente caja de valores y grafica la función $y = \cos\theta$.

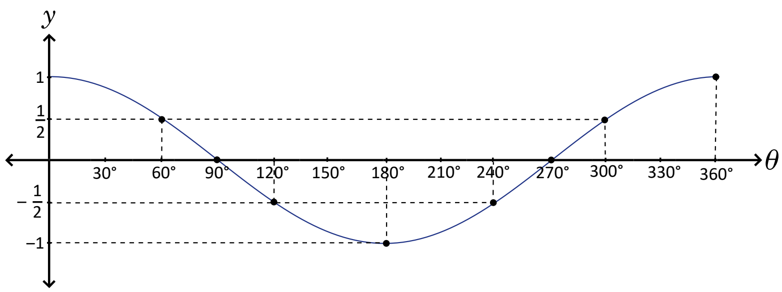
θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$									

2. Determina su dominio y rango.

Solución

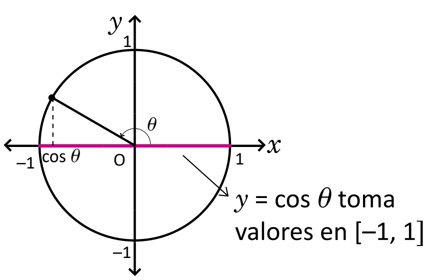
1.

θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



2. Dominio. La variable θ puede tomar el valor de cualquier ángulo. Por lo tanto, el dominio de la función $y = \cos\theta$ es $\mathbb{R}$.

   Rango. Del CT se tiene que el valor del coseno de cualquier ángulo puede tomar valores en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, el rango de la función $y = \cos\theta$ es $[-1, 1]$.



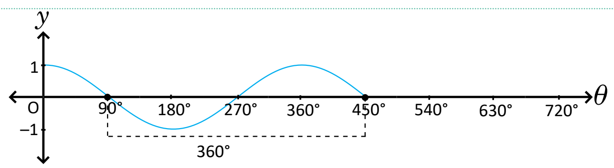
Conclusión

La función $f(\theta) = \cos\theta$ tiene dominio $D_f = \mathbb{R}$ y rango $R_f = [-1, 1]$.

La función $f(\theta) = \cos\theta$ es una función periódica. El periodo de la función coseno es 360°. En general se cumple que $\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$ para todo ángulo θ y para todo n entero.

Problemas

1. La siguiente figura muestra la función coseno graficada en el intervalo [0°, 450°], utiliza la periodicidad de la función para completar la gráfica hasta el ángulo 720°.



2. Grafica la función $f(\theta) = \cos\theta$, en el intervalo $[-360°, 0°]$.

143

Indicador de logro:

3.6 Grafica la función coseno utilizando la periodicidad.

Secuencia:

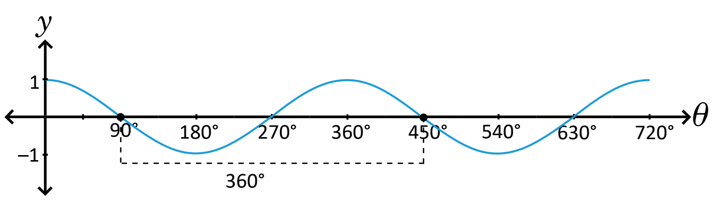
De igual forma que la función seno, se gráfica la función coseno por medio de la ubicación de puntos en el plano y se estudian además su dominio y rango.

Propósito:

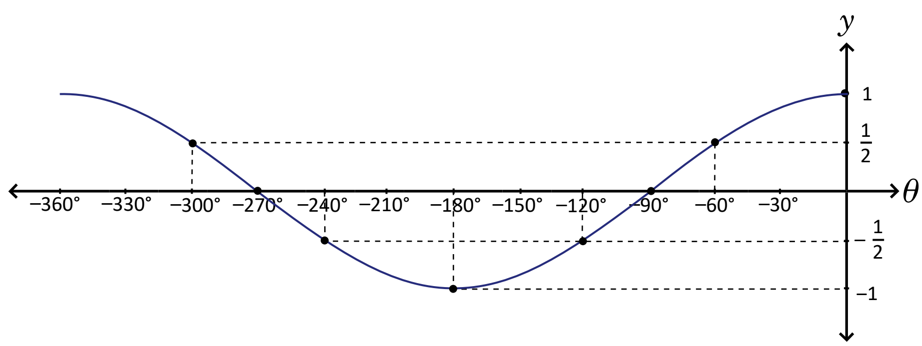
Ya que se ha dibujado la función seno, se seguirá un proceso similar para graficar la función coseno. Se debe observar la similitud y la diferencia entre ambas funciones observando sus gráficas.

Solución de problemas:

1.



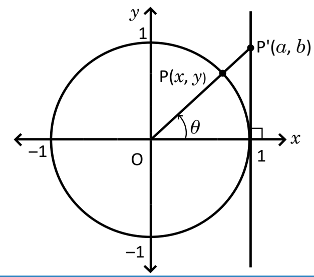
2.



3.7 La tangente en el círculo trigonométrico

Problema inicial

Se traza la recta $x = 1$ y se dibuja un ángulo θ con lado terminal $\overline{\text{OP}}$, donde P(x, y) es un punto en el CT. Luego el segmento OP se prolonga hasta el punto P' que está en la recta $x = 1$.



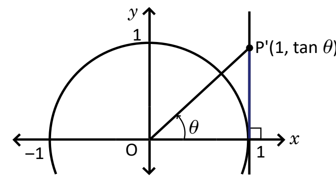
1. Determina las coordenadas del punto P'(a, b) en función de θ.

2. ¿Para cuáles valores de θ, la función $y = \tan\theta$ no está definida?

Solución

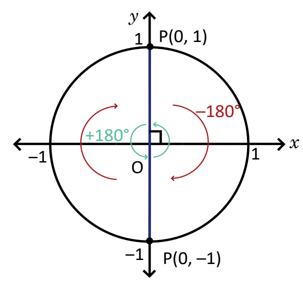
1. Se tiene que $a = 1$, ya que P' es un punto de la recta $x = 1$.
   Utilizando la definición de tangente se tiene que $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b}{1} = b$.

   Por lo tanto, P'(a, b) = P'(1, tan θ).



2. Como $\tan\theta = \frac{y}{x}$, no está definida si $x = 0$. Este valor corresponde a los ángulos $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$, cuyos puntos en el CT son (0, 1) y (0, –1) respectivamente.

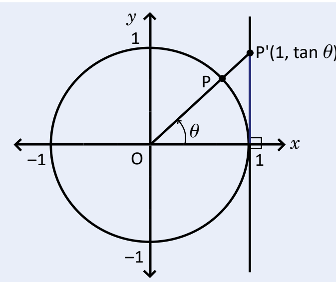
   También $x = 0$, si se suma o resta 180° de estos ángulos. Por lo tanto, todos estos valores se pueden escribir así: $90° + 180°n$, donde n es un número entero.



Conclusión

La tangente de un ángulo θ puede representarse en el círculo trigonométrico de la siguiente manera:

1. Se dibuja el punto P correspondiente al ángulo θ en el CT.
2. Se prolonga el segmento $\overline{\text{OP}}$ (O es el origen) hasta cortar a la recta $x = 1$.
3. Se llama P' al punto de corte. La coordenada en y de P' es igual a tan θ.



La función tan θ no está definida para aquellos ángulos de la forma:
$\theta = 90° + 180°n$ donde n es un número entero.

Problemas

Representa el valor de la tangente de los siguientes ángulos, utilizando la figura de la conclusión:

a) $\theta = 30°$　　b) $\theta = 60°$　　c) $\theta = 135°$

d) $\theta = -45°$　　e) $\theta = -120°$　　f) $\theta = -150°$

Indicador de logro:

3.7 Representa el valor de la tangente de un ángulo utilizando el círculo trigonométrico.

Secuencia:

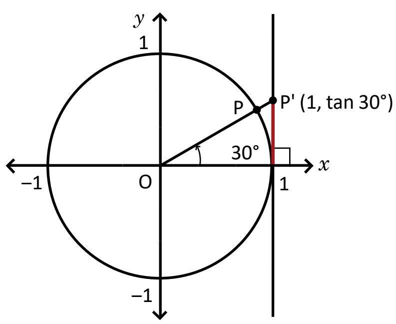
Se ha visto la representación por coordenadas de las razones seno y coseno de un ángulo en el círculo trigonométrico, ahora se representa la tangente para un ángulo dado como la coordenada de un punto en la recta $x = 1$.

Propósito:

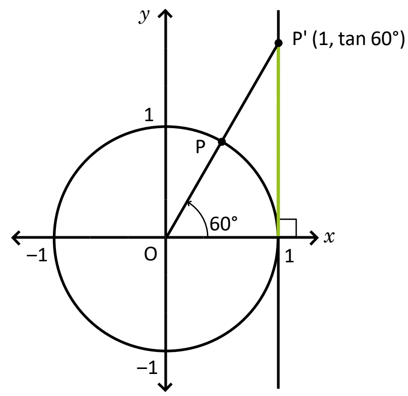
El Problema inicial permite al estudiante reconocer el valor de la tangente de un ángulo como la coordenada en y del punto P' de la figura dada y quedará definido de manera implícita el dominio de esta función.

Solución de problemas:

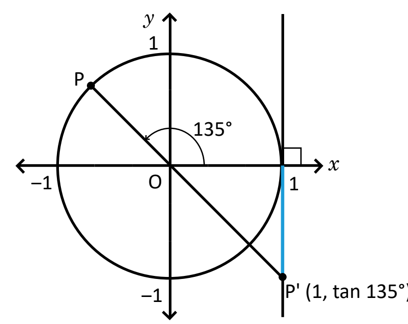
a) $\theta = 30°$



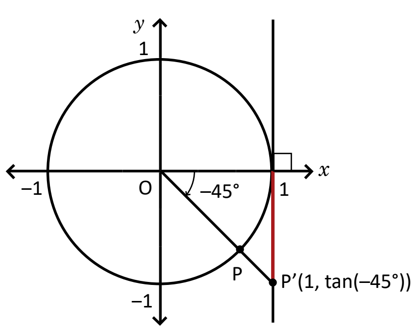
b) $\theta = 60°$



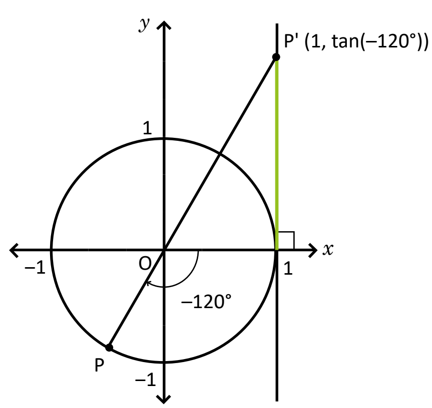
c) $\theta = 135°$



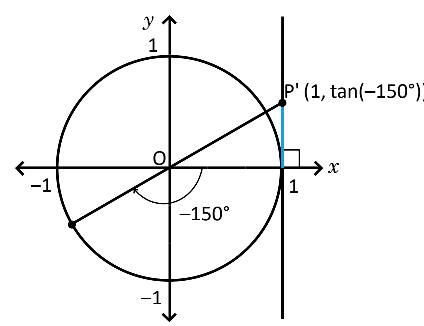
d) $\theta = -45°$



e) $\theta = -120°$



f) $\theta = -150°$



Lección 3

3.8 Gráfica de la función tangente

Problema inicial

1. ¿Qué sucede con el valor de tan θ, si θ toma valores cercanos a 90° y –90°? Utiliza las siguientes tablas.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ					

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ					

2. Completa la siguiente tabla y grafica la función y = tan θ en el intervalo]–90°, 90°[.

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ							

3. Determina el dominio de la función y = tan θ.
4. ¿Cuál es el rango de la función y = tan θ?

Solución

1. Para ángulos cercanos a 90°.

θ	88°	89°	89.5°	89.9°	89.99°
tan θ	28.6...	57.2...	114.5...	572.9...	5 729.5...

El valor de tan θ se vuelve cada vez mayor cuando θ toma valores muy cercanos a 90°.

Para ángulos cercanos a –90°.

θ	–88°	–89°	–89.5°	–89.9°	–89.99°
tan θ	–28.6...	–57.2...	–114.5...	–572.9...	–5 729.5...

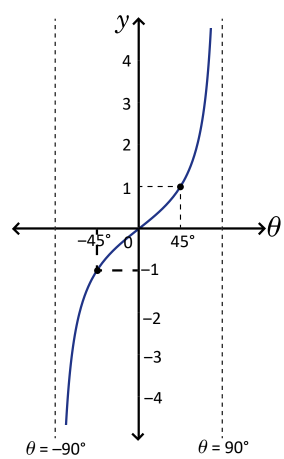
El valor de tan θ se vuelve cada vez menor cuando θ toma valores muy cercanos a –90°.

Se observa que θ = 90° y θ = –90° son asíntotas verticales.

2. La tabla queda de la siguiente manera:

θ	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°
tan θ	–1.7...	–1	–0.5...	0	0.5...	–1	1.7...

Al graficar se obtiene la figura de la derecha.



3. En la clase anterior se vio que la función y = tan θ, no está definida para los valores θ = 90° + 180°n, con n entero. Por lo tanto, el dominio es: $\mathbb{R}$ – {90° + 180° n | n es entero}.

4. A partir de la gráfica se obtiene que el rango de y = tan θ es $\mathbb{R}$.

Conclusión

La función $f(\theta)$ = tan θ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ – {90° + 180°n | n es entero} y su rango es $\mathbb{R}$. Además, las rectas θ = 90° + 180°n, donde n es un número entero, son asíntotas verticales de la gráfica de la función tangente.

La función $f(\theta)$ = tan θ es una función periódica. El periodo de la función tangente es 180°, y por tanto, en general, tan (θ + 180°n) = tan θ para todo n entero.

Problemas

Utiliza la periodicidad de la tangente para graficar la función $f(\theta)$ = tan θ en el intervalo]–270°, 270°[.

145

Unidad 5

Indicador de logro:

3.8 Grafica la función tangente utilizando la periodicidad.

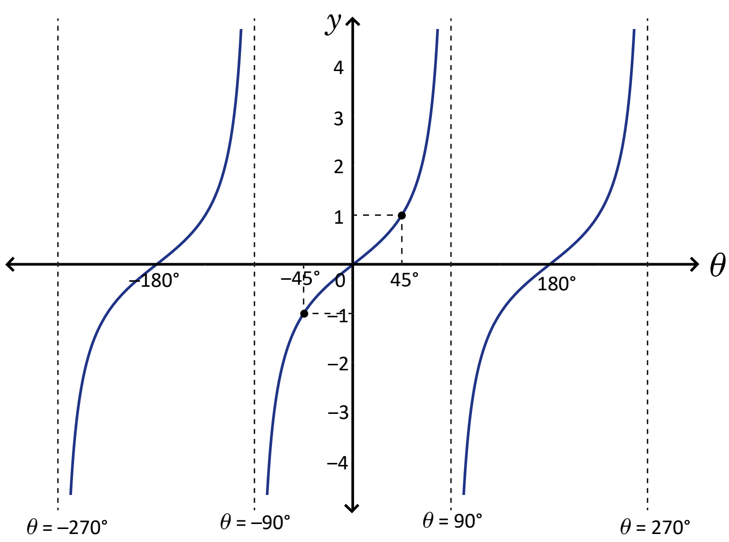
Secuencia:

Ahora se gráfica la función tangente y se describen sus características; en clases anteriores se estableció la diferencia respecto a la periodicidad de las funciones seno y coseno.

Propósito:

El Problema inicial describe algunas características de la función tangente como las asíntotas que posee, así como su dominio, que se obtiene con lo visto en la clase anterior, y el rango, que se obtiene a partir de la observación de la gráfica.

Solución de problemas:



3.9 Periodo y amplitud de las funciones trigonométricas

Problema inicial

1. Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = 2sen θ en el intervalo [0°, 360°].

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ					
2sen θ					

2. a) Grafica la función $g_1(\theta)$ = cos θ en el intervalo [0°, 360°] luego, grafica $g_2(\theta)$ = cos 2θ en el intervalo [0°, 180°], utiliza la siguiente tabla.

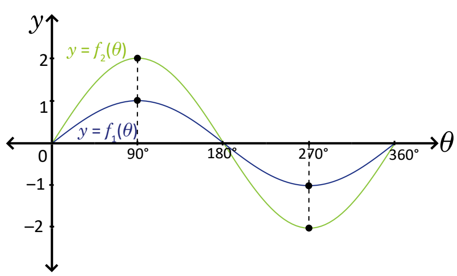
θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ					
cos 2θ					

b) Comprueba que $g_2(\theta + 180°) = g_2(\theta)$ y completa la gráfica hasta el ángulo 360°.

Solución

1. Completando la tabla.

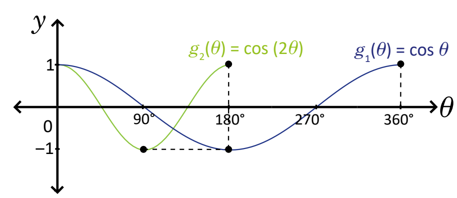
θ	0°	90°	180°	270°	360°
sen θ	0	1	0	–1	0
2sen θ	0	2	0	–2	0



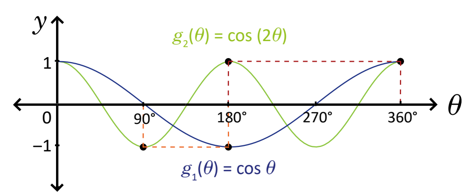
Cada punto de $f_2(\theta)$ = 2sen θ se obtiene multiplicando por 2 la coordenada en y de los puntos de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

2. a) Completando la tabla.

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0°	90°	180°	270°	360°
cos 2θ	1	0	–1	0	1



b) $g_2(\theta + 180°) = \cos(2\theta + 360°) = \cos 2\theta = g_2(\theta)$



Cada punto de la gráfica de $g_2(\theta)$ = cos 2θ se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ la coordenada en θ de los puntos de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Definición

Se llama **amplitud** de la función trigonométrica $f(\theta)$ = A sen θ al valor |A| y es el máximo valor que puede tomar la función. En este caso, el rango de la función es [–|A|, |A|]. Esta función se obtiene multiplicando por A todas las coordenadas en y de la función sen θ.

La función $f(\theta)$ = sen Bθ, donde B es un número real diferente de 0, cumple que

sen (Bθ + 360°) = sen Bθ $\Leftrightarrow$ sen B$\left(\theta + \frac{360°}{B}\right)$ = sen Bθ $\Leftrightarrow$ $f\left(\theta + \frac{360°}{B}\right) = f(\theta)$.

Así, el **periodo** de la función $f(\theta)$ = sen Bθ es $\frac{360°}{|B|}$ (se utiliza |B|, porque el periodo es positivo).

Estas definiciones también se aplican a las funciones $f(\theta)$ = Acos θ y $f(\theta)$ = cos Bθ.

Problemas

Grafica, en el intervalo [0, 360°], las siguientes funciones utilizando la amplitud y periodicidad.

a) $f(\theta)$ = 3sen θ b) $f(\theta)$ = –2cos θ c) $f(\theta)$ = sen 3θ d) $f(\theta)$ = cos $\frac{\theta}{2}$

Indicador de logro:

3.9 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = Asen θ y y = sen Bθ.

Secuencia:

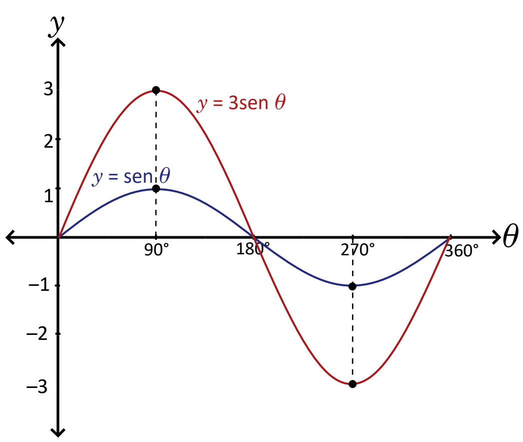
En primer año se estudió el comportamiento de varias funciones en las que la variable o la función misma son multiplicadas por un número real. Ahora, se estudia el efecto que tiene esto en las funciones trigonométricas en relación al periodo y el rango.

Propósito:

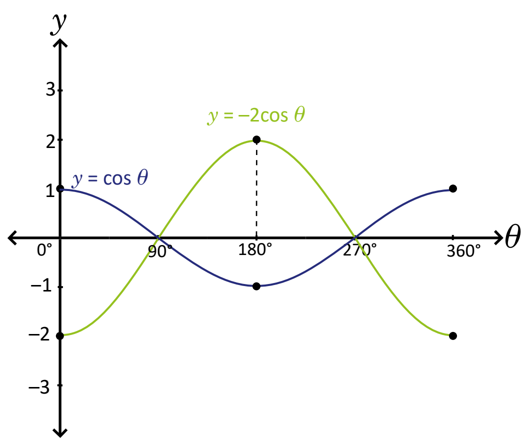
Así como se estudiaron los desplazamientos se grafican las funciones ubicando puntos en el plano y se realiza una comparación entre estas para observar cómo cambia el periodo y la amplitud. En los Problemas debe verificarse la utilización de la Conclusión.

Solución de problemas:

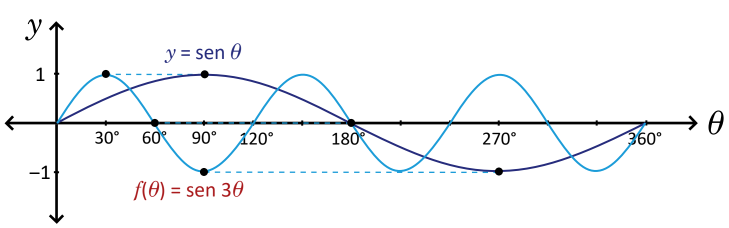
a) $f(\theta)$ = 3sen θ



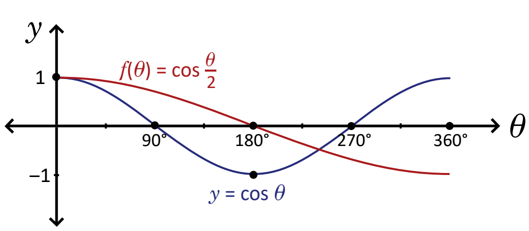
b) $f(\theta)$ = –2cos θ



c) $f(\theta)$ = sen 3θ



d) $f(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$



El estudiante también puede presentar su gráfica sin dibujar la función base.

3.10 Desplazamiento vertical de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En cada literal grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen $\theta + 1$; [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta + 1$						

b) $g_1(\theta)$ = sen θ y $g_2(\theta)$ = sen $\theta - 1$; [0°, 450°]

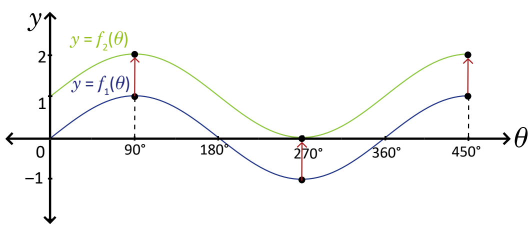
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta - 1$						

Solución

Observa que las funciones sen(θ + 1°) y sen θ + 1 son distintas.

a) Se completa la tabla.

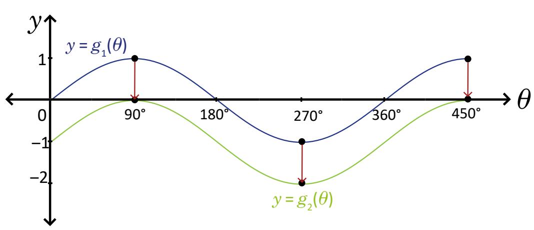
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen (θ) + 1	1	2	1	0	1	2



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen $\theta + 1$ es un desplazamiento de 1 unidad hacia arriba de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen $\theta - 1$	–1	0	–1	–2	–1	0



Cada punto de $g_2(\theta)$ = sen $\theta - 1$ es un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = sen θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ es un desplazamiento vertical de k unidades de la gráfica de la función sen θ.

- Si $k > 0$ el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia abajo.

Dada la función $f(\theta)$ = sen $\theta + k$ con dominio $\mathbb{R}$, su rango es el intervalo $[-1 + k, 1 + k]$.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos $\theta + k$ como desplazamiento vertical de la función cos θ.

En general la gráfica de $f(x) + k$ es un desplazamiento vertical de la gráfica de $f(x)$: hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos $\theta + 1$
b) $f(\theta)$ = sen $\theta + 2$
c) $f(\theta)$ = cos $\theta - 2$
d) $f(\theta)$ = sen $\theta - 3$

147

Unidad 5

Indicador de logro:

3.10 Grafica funciones trigonométricas del tipo y = sen $\theta + k$.

Secuencia:

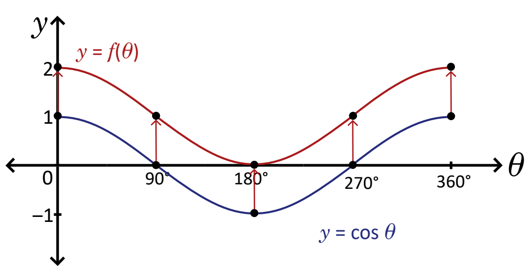
En esta clase se grafican aquellas funciones que son desplazamientos verticales de la función seno y coseno y se describe también el rango de la función desplazada.

Posibles dificultades:

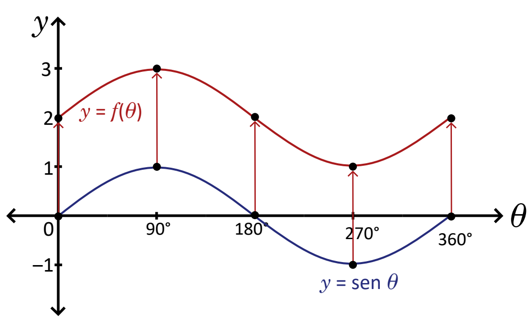
Se debe tener claro que el valor de k se suma después de calcular el valor de sen θ, en esto radica el hecho de que la función y = sen $\theta + k$, se puede graficar como un desplazamiento vertical.

Solución de problemas:

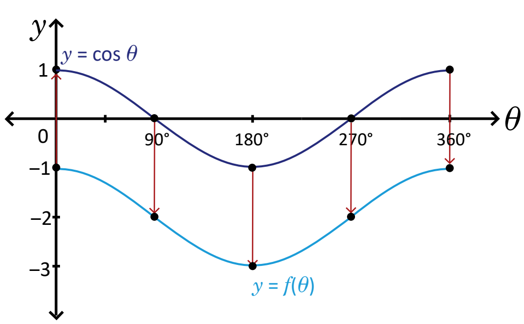
a) $f(\theta)$ = cos θ + 1



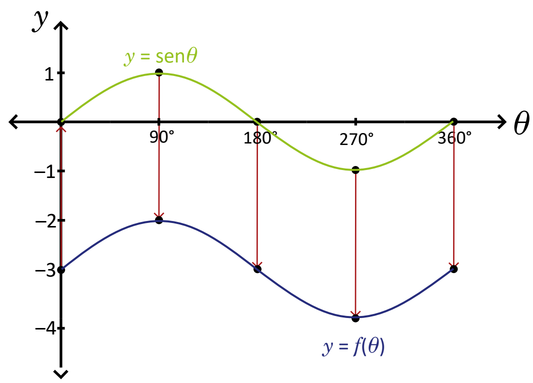
b) $f(\theta)$ = sen θ + 2



c) $f(\theta)$ = cos θ – 2



d) $f(\theta)$ = sen θ – 3



3.11 Desplazamiento horizontal de las funciones trigonométricas

Problema inicial

En los siguientes literales grafica las funciones en un mismo plano cartesiano, en el intervalo dado.

a) $f_1(\theta)$ = sen θ y $f_2(\theta)$ = sen(θ – 90°); [0°,450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ						
sen(θ – 90°)						

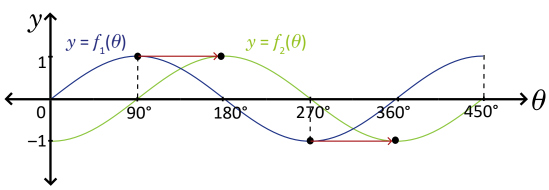
b) $g_1(\theta)$ = cos θ y $g_2(\theta)$ = cos(θ + 90°); [0°, 450°]

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°
cos θ							
cos(θ + 90°)							

Solución

a) Se completa la tabla.

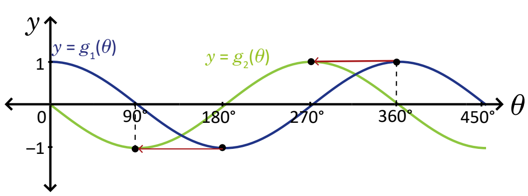
θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
sen θ	0	1	0	–1	0	1
sen(θ – 90°)	–1	0	1	0	–1	0



Cada punto de $f_2(\theta)$ = sen(θ – 90°) es un desplazamiento de 90° hacia la derecha de un punto de la gráfica de $f_1(\theta)$ = sen θ.

b) Se completa la tabla.

θ	0°	90°	180°	270°	360°	450°
cos θ	1	0	–1	0	1	0
cos(θ + 90°)	0	–1	0	1	0	–1



Cada punto de $g_2(\theta)$ = cos(θ + 90°) es un desplazamiento de 90° hacia la izquierda de un punto de la gráfica de $g_1(\theta)$ = cos θ.

Conclusión

La gráfica de $f(\theta)$ = sen(θ – α) es un desplazamiento horizontal de α unidades de la gráfica de sen θ.

- Si α > 0 el desplazamiento es hacia la derecha.
- Si α < 0 el desplazamiento es hacia la izquierda.

Estas reglas también se aplican a la función $f(\theta)$ = cos(θ – α) como desplazamiento de la función cos θ.

En general, la gráfica de $f(x - h)$ es un desplazamiento horizontal de h unidades de la gráfica de $f(x)$:

- Hacia la derecha si $h > 0$.
- Hacia la izquierda si $h < 0$.

Problemas

Grafica las siguientes funciones, en el intervalo [0, 360°], utilizando los desplazamientos:

a) $f(\theta)$ = cos(θ – 45°)

b) $f(\theta)$ = cos(θ – 90°)

c) $f(\theta)$ = sen(θ – (–30°))

d) $f(\theta)$ = sen(θ + 90°)

Indicador de logro:

3.11 Grafica funciones trigonométricas del tipo $y = \text{sen}(\theta - \alpha)$.

Secuencia:

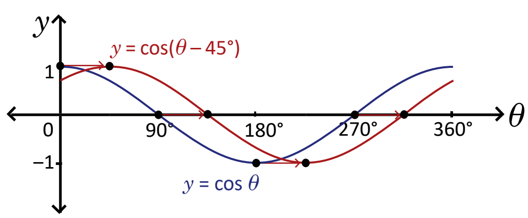
Ahora se grafican las funciones que son desplazamientos horizontales de alguna de las funciones seno o coseno. Hasta aquí se han tratado por separado los desplazamientos, el periodo y la amplitud.

Propósito:

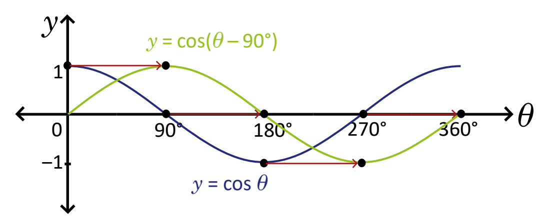
El estudiante debe ser capaz de dibujar la función seno y coseno como gráfica auxiliar para luego dibujar la gráfica desplazada. Dependiendo del dominio que tenga el estudiante podrá dibujar la gráfica sin necesidad de la auxiliar.

Solución de problemas:

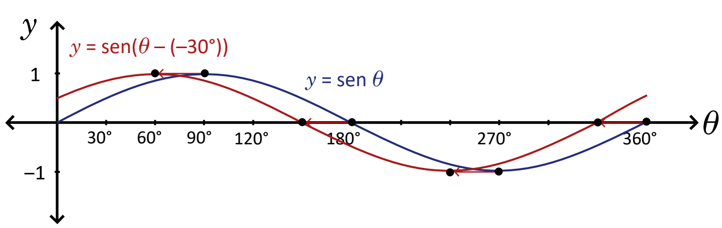
a) $f(\theta) = \cos(\theta - 45°)$



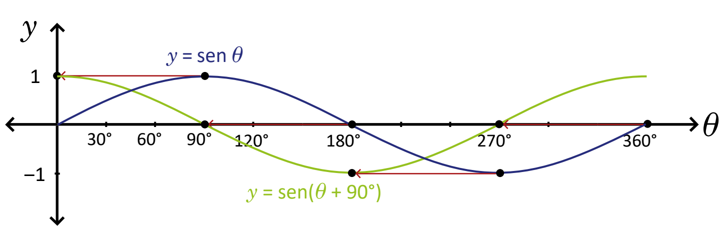
b) $f(\theta) = \cos(\theta - 90°)$



c) $f(\theta) = \text{sen}(\theta - (-30°))$



d) $f(\theta) = \text{sen}(\theta + 90°)$



3.12 Forma general de las funciones trigonométricas

Problema inicial

Grafica la función $f(\theta) = 2\text{sen }(3\theta + 90°)$ en el intervalo [0°, 360°] realizando los siguientes pasos:

1. Considera las funciones $f_1(\theta) = \text{sen } 3\theta$, $f_2(\theta) = 2\text{sen } 3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°)$, luego completa la Tabla 1.
2. Completa la Tabla 2.
3. Grafica en el mismo plano cartesiano las funciones $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$, en el intervalo [0, 120°].
4. Utiliza la periodicidad para completar la gráfica de $f_2(\theta)$ hasta el intervalo [0°, 360°].
5. Grafica en otro plano cartesiano las funciones $f_2(\theta)$ y $f(\theta)$. Utiliza la Tabla 2.

Tabla 1

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$					
$f_2(\theta)$					

Tabla 2

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$					
$f(\theta)$					

Observa que
$f(\theta) = 2\text{sen}(3\theta + 90°) = 2\text{sen } 3(\theta - (-30°))$.

Solución

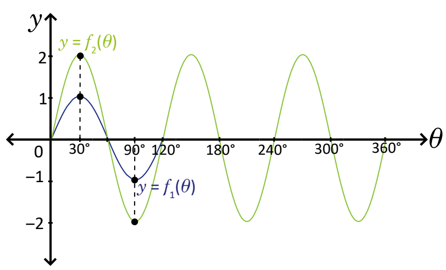
1. Se completa la tabla 1.

θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_1(\theta)$	0	1	0	–1	0
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0

2. Se completa la tabla 2.

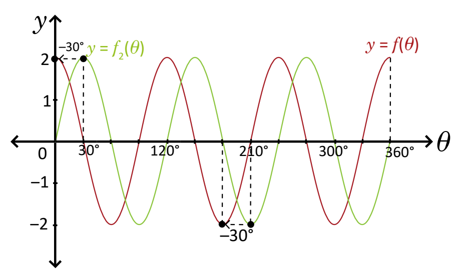
θ	0°	30°	60°	90°	120°
$f_2(\theta)$	0	2	0	–2	0
$f(\theta)$	2	0	–2	0	2

3 y 4. Se grafican las funciones f_1 y f_2.



El periodo de f_1 es $\frac{360°}{3} = 120°$.

5. Se grafican las funciones
$f_2(\theta) = 2\text{sen } 3\theta$ y $f(\theta) = 2\text{sen } 3(\theta - (-30°))$.



La gráfica de $f(\theta)$ es un desplazamiento de 30° hacia la izquierda de la gráfica de $f_2(\theta) = 2\text{sen } 3\theta$.

Conclusión

Una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen } B(\theta - \alpha)$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, tiene las siguientes características:

1. Tiene amplitud $|A|$, por lo que su rango es $[-|A|, |A|]$.
2. Tiene periodo $\frac{360°}{|B|}$ y es un desplazamiento horizontal de α unidades respecto a la función $A\text{sen } B\theta$.

Para graficar una función de la forma $f(\theta) = A\text{sen } B(\theta - \alpha)$ se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se grafica la función $\text{sen } B\theta$ en el intervalo $\left[0, \frac{360°}{|B|}\right]$.
2. Se grafica la función $A\text{sen } B\theta$ y se utiliza la periodicidad para completar el intervalo en el que se graficará.
3. Se efectúa el desplazamiento horizontal de α unidades para obtener $f(\theta) = A\text{sen } B(\theta - \alpha)$.

Problemas

Grafica cada función, en el intervalo [0, 360°] utilizando los desplazamientos, amplitud y periodo:

a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$ b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$ c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°)$

Unidad 5

Indicador de logro:

3.12 Grafica las funciones trigonométricas del tipo y = Asen B(θ – α).

Secuencia:

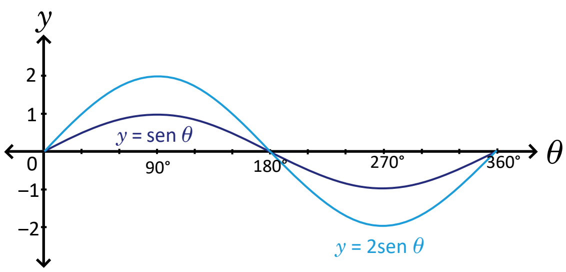
En esta clase se grafican las funciones trigonométricas en las que es necesario identificar amplitud, el periodo y desplazamientos verticales u horizontales.

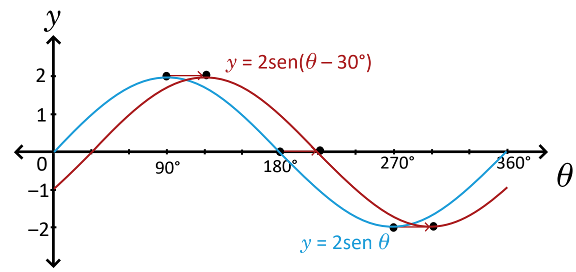
Propósito:

En la Solución se han utilizado dos dibujos con el fin de no saturar la gráfica, cada estudiante evaluará si este proceso le es factible. En el caso que dibujen todas las gráficas en un mismo plano debe resaltarse con color la gráfica de la función dada.

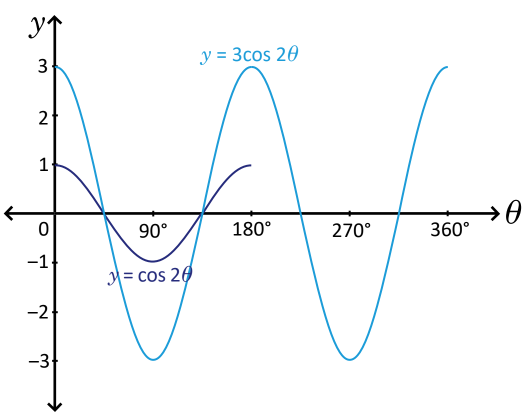
Solución de problemas:

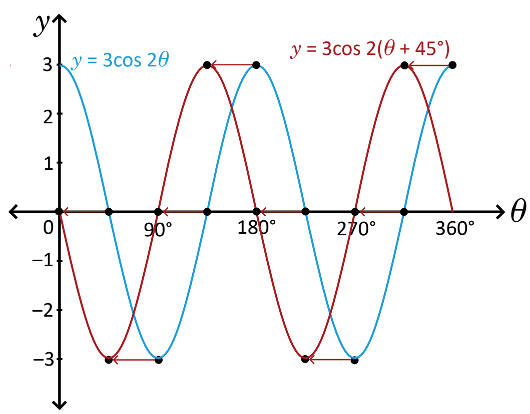
a) $f(\theta) = 2\text{sen}(\theta - 30°)$





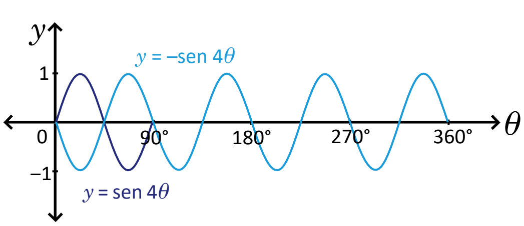
b) $f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°)$

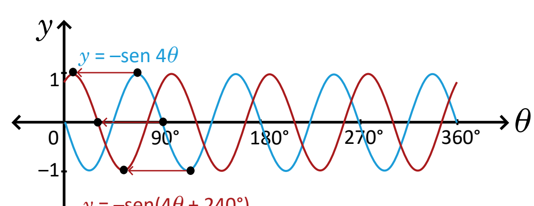




En b) se puede graficar la función que se obtiene aplicando identidades trigonométricas.
$f(\theta) = 3\cos 2(\theta + 45°) = 3\text{sen}(2\theta + 90°) = -3\text{sen } 2\theta$

c) $f(\theta) = -\text{sen}(4\theta + 240°) = -\text{sen } 4(\theta + 60°) = -\text{sen } 4(\theta - (-60°))$





El literal c) se puede graficar hasta 180° y utilizar marcas en el eje x cada 30° para visualizar el desplazamiento de 60° a la izquierda utilizando dos cuadrados del cuaderno.

3.13 Sistema circular de ángulos

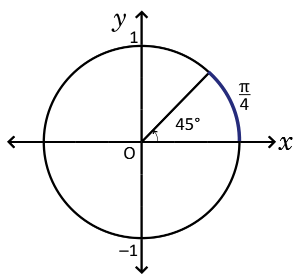
Problema inicial

1. Encuentra la longitud del arco del CT cuyo ángulo central es 45°.
2. Encuentra el ángulo central del CT cuya longitud es $\frac{\pi}{6}$.

En una circunferencia de radio r, la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ está dado por $2\pi r\frac{\theta}{360°}$.

Solución

1. El radio del CT es $r = 1$. La longitud del arco subtendido por el ángulo de 45° está dado por: $2\pi(1)\frac{45°}{360°} = \cancel{2}^{1}\pi\,\frac{1}{\cancel{8}_{4}}$.
   Por lo tanto, la longitud del arco es $\frac{\pi}{4}$.



2. Sea α el ángulo central tal que $2\pi\frac{\alpha}{360°} = \frac{\pi}{6}$.
   Se despeja $\alpha = \frac{\pi}{6}\left(\frac{360°}{2\pi}\right) = 30°$.
   Por lo tanto, el ángulo que subtiende un arco de longitud $\frac{\pi}{6}$ es 30°.

Definición

En el círculo trigonométrico se define: **1 radián** como el ángulo que subtiende un arco de longitud 1.

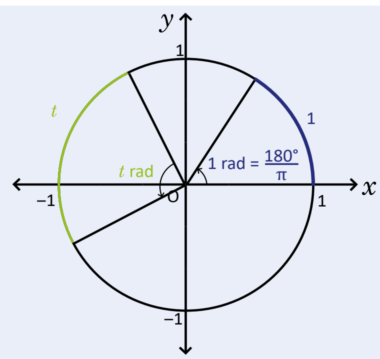
Así t **radianes** es el ángulo que subtiende un arco de longitud t y se representa como t rad (o solo t).

El ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360°$, subtiende un arco de longitud $\frac{\theta}{180°}\pi$, entonces el ángulo θ, con $0 \leq \theta \leq 360°$, tiene un valor de $\frac{\theta}{180°}\pi$ rad.

Esta definición se extiende a cualquier ángulo de la siguiente manera: si θ es un ángulo cualquiera, entonces su valor en radianes está dado por

$$\frac{\theta}{180°}\pi \text{ rad.}$$

Si se tiene la medida de un ángulo t en radianes, su valor θ en grados está dado por $\theta = \frac{180°}{\pi}t$.



El sistema en el que se escriben los ángulos en grados se denomina **sistema sexagesimal de ángulos**.

Ejemplo

a) Expresar en radianes el ángulo 120°.

$$120° = \frac{120°}{180°}\pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Escribe en grados el valor de $\frac{\pi}{5}$.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{5}\right) = 36°$$

Problemas

1. Se tienen los siguientes ángulos en grados, determina su valor en radianes:

a) 60°	b) 15°	c) 10°	d) 270°
e) 135°	f) 150°	g) 210°	h) 315°

2. Se tiene los siguientes ángulos en radianes, determina su valor en grados:

a) 2π rad	b) π rad	c) $\frac{\pi}{2}$ rad	d) $\frac{5\pi}{12}$ rad
e) 1 rad	f) $\frac{2\pi}{9}$ rad	g) $\frac{5\pi}{4}$ rad	h) $\frac{9\pi}{5}$ rad

Indicador de logro:

3.13 Convierte ángulos del sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.

Secuencia:

El estudio de las funciones trigonométricas se ha realizado utilizando los valores de los ángulos en el sistema sexagesimal, pues el estudiante está acostumbrado a este sistema con el cual se ha trabajado desde la educación básica, además se facilita la construcción de las gráficas ya que se evita el uso de fracciones. La introducción del sistema circular o radial se realiza en esta clase.

Propósito:

En esta clase se relaciona la longitud de un arco de círculo con el ángulo escrito en grados, de esta forma se introduce el radián y se explica la conversión de valores en el sistema sexagesimal y el radial.

Solución de problemas:

1a) $60° = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

1b) $15° = \frac{15°}{180°}\pi = \frac{\pi}{12}$ rad

1c) $10° = \frac{\pi}{18}$ rad

1d) $270° = \frac{3\pi}{2}$ rad

1e) $135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

1f) $150° = \frac{5\pi}{6}$ rad

1g) $210° = \frac{7\pi}{6}$ rad

1h) $315° = \frac{7\pi}{4}$ rad

2a) 2π rad $= 2\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 360°$

2b) π rad $= 180°$

2c) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

2d) $\frac{5\pi}{12}$ rad $= 75°$

2e) 1 rad $= \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$

2f) $\frac{2\pi}{9}$ rad $= 40°$

2g) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$

2h) $\frac{9\pi}{5}$ rad $= 324°$

3.14 Practica lo aprendido

1. Dibuja el círculo trigonométrico y grafica el punto P(cos θ, sen θ) para cada valor de θ.
   a) $\theta = 60°$ b) $\theta = 150°$ c) $\theta = 240°$ d) $\theta = 330°$

2. Utiliza la representación del seno y coseno en el CT para demostrar la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

3. Utiliza la periodicidad de las funciones trigonométricas para calcular los siguientes valores.
   a) sen 750° b) cos 765° c) tan 600°
   d) sen(–660°) e) cos(–690°) f) tan(–495)

4. Realiza lo que se pide:
   a) Demuestra que la función f: $[-90°, 90°] \rightarrow [-1, 1]$; $\theta \rightarrow \operatorname{sen}\theta$, es biyectiva.
   b) Restringe la función coseno para que sea biyectiva. Utiliza la gráfica de la clase 3.6.

5. Utiliza la representación de la función tangente en el CT para demostrar la identidad $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

6. Realiza los siguientes problemas:
   a) Traza la recta $y = 1$, que es tangente al CT en el punto (0,1).
   b) Sea θ un ángulo en el primer cuadrante. Dibuja los puntos R(0,1), P(cos θ, sen θ) y Q el punto de intersección de la recta $y = 1$ con la prolongación del segmento OP.
   c) Demuestra que $OQ = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.
   d) Determina las coordenadas del punto Q(a, b)
   e) Demuestra que $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$.

7. Determina el periodo de las siguientes funciones y grafícalas en el intervalo dado.
   a) $\tan(\theta - 90°)$; [0, 360°] b) $\tan 2\theta$; [0, 270°]

8. Determina el periodo y la amplitud de las siguientes funciones, luego grafícalas en el intervalo dado.
   a) $f(\theta) = \operatorname{sen} 5\theta$; [0°, 360°] b) $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{3}$; [0°, 1 080°]
   c) $f(\theta) = 4\cos\theta$; [0°, 360°] d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$; [0°, 360°]

9. Grafica las siguientes funciones utilizando desplazamientos, amplitud y periodo. Además determina su dominio y rango.
   a) $f(\theta) = 2\cos(6\theta - 120°)$ b) $f(\theta) = 4\operatorname{sen}(2\theta + 120°)$
   c) $f(\theta) = -2\cos(4\theta + 180°)$ d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3\theta - 225°)$

10. Reescribe los ángulos en el sistema sexagesimal al sistema circular y viceversa.
   a) 20° b) 50° c) 140° d) 345°
   e) 500° f) –150° g) $\frac{\pi}{8}$ rad h) $\frac{4\pi}{9}$ rad
   i) $\frac{5\pi}{3}$ rad j) $\frac{\pi}{180}$ rad k) 3π rad l) $-\frac{\pi}{2}$ rad

11. Si un arco circular de 9 centímetros subtiende el ángulo central de 45° en una circunferencia, ¿cuál es la longitud del radio de la circunferencia?

12. El radio de una circunferencia es 5 cm, determina la medida del ángulo central, en radianes, que subtiende un arco de 12 cm.

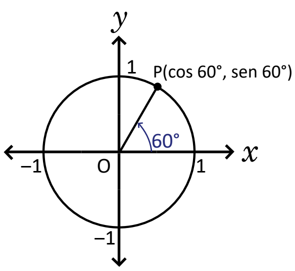
Unidad 5

Indicador de logro:

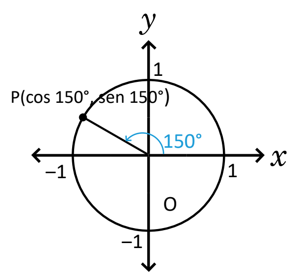
3.14 Resuelve problemas utilizando funciones trigonométricas.

Solución de problemas:

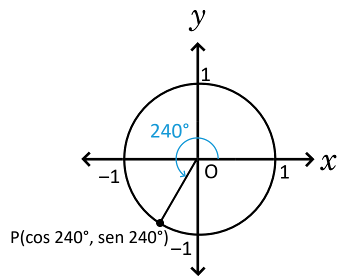
1a) $\theta = 60°$



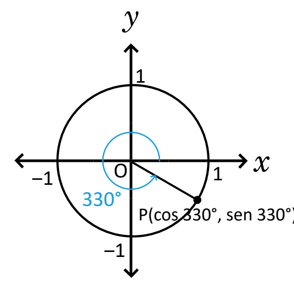
1b) $\theta = 150°$



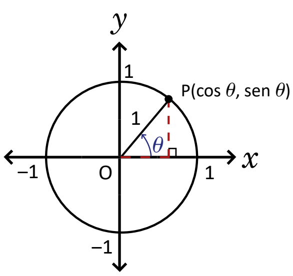
1c) $\theta = 240°$



1d) $\theta = 330°$



2.



d(P, O) = 1, para cada valor de θ

$\Rightarrow \sqrt{(\text{sen}\ \theta - 0)^2 + (\cos\theta - 0)^2} = 1$

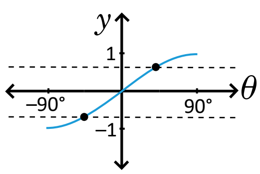
$\Rightarrow (\text{sen}\ \theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$

$\Rightarrow \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

3a) $\text{sen}\ 750° = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$ **3b)** $\cos 765° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **3c)** $\tan 600° = \tan 60° = \sqrt{3}$

3d) $\text{sen}(-660°) = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **3e)** $\cos(-690°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **3f)** $\tan(-495°) = \tan 45° = 1$

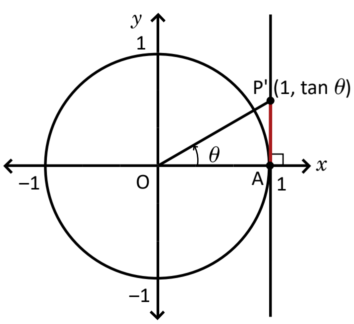
4a)



Al trazar rectas horizontales sobre la gráfica de f se obtiene un único punto de intersección por lo que f es inyectiva. Además $R_f = [-1, 1]$ por lo que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva.

4b) g: [0, 180°] $\longrightarrow$ [–1, 1]; $x \longrightarrow \cos x$

5.



Si se supone que $-90° < \theta < 90° \Rightarrow \cos\theta = \frac{\text{OA}}{\text{OP'}} = \frac{1}{\text{OP'}} \Rightarrow \text{OP'} = \frac{1}{\cos\theta}$

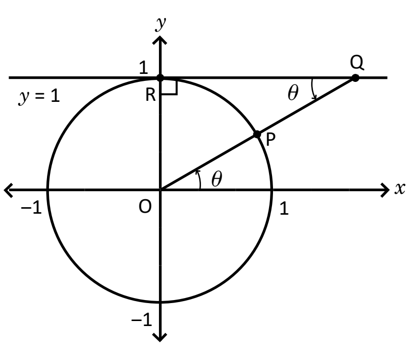
$\Rightarrow d(\text{P'}, \text{O}) = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (\tan\theta - 0)^2} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

Luego por la periodicidad de la tangente y la identidad $\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta$,

para todo $\theta \neq 90° + 180°n$, donde n es un número entero, se cumple que

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

6a) y **6b)**



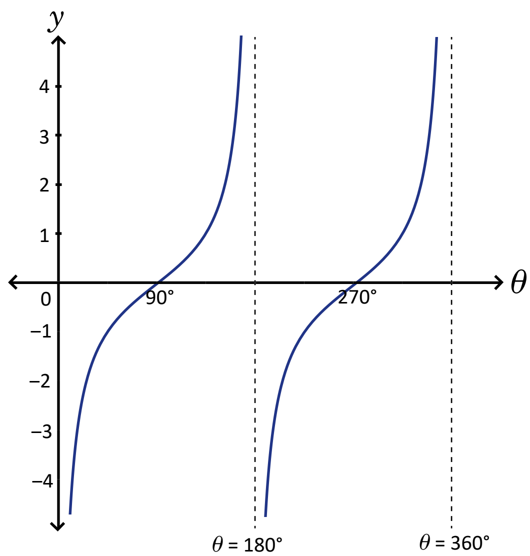
6c) $\text{sen}\ \theta = \frac{\text{OR}}{\text{OQ}} = \frac{1}{\text{OQ}} \Rightarrow \text{OQ} = \frac{1}{\text{sen}\ \theta}$

6d) Sea $\text{Q}(a, b) \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \text{Q}(a, b) = \text{Q}\left(\frac{1}{\tan\theta}, 1\right)$

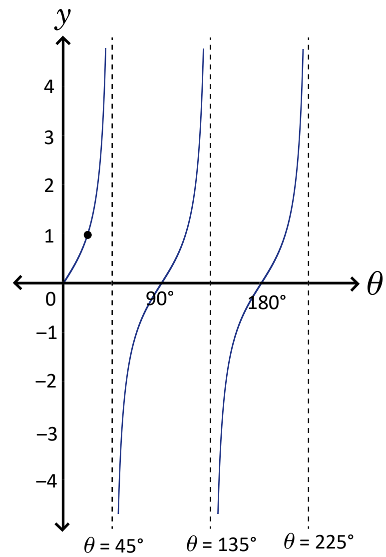
6e) $d(\text{Q}, \text{O}) = \frac{1}{\text{sen}\ \theta} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{\tan\theta} - 0\right)^2} = \frac{1}{\text{sen}\ \theta}$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2 = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

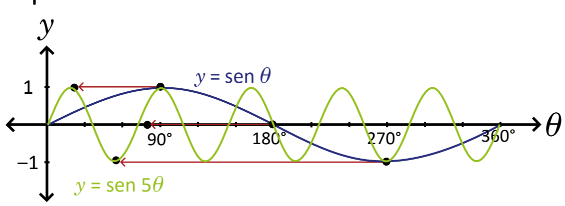
7a) tan (θ – 90°); [0, 360°]; periodo: 180°



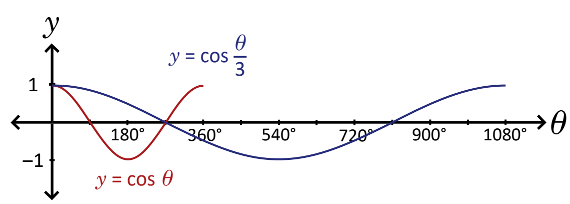
7b) tan 2θ; [0, 270°]; periodo: 90°



8a) Amplitud: 1 Periodo: 72°



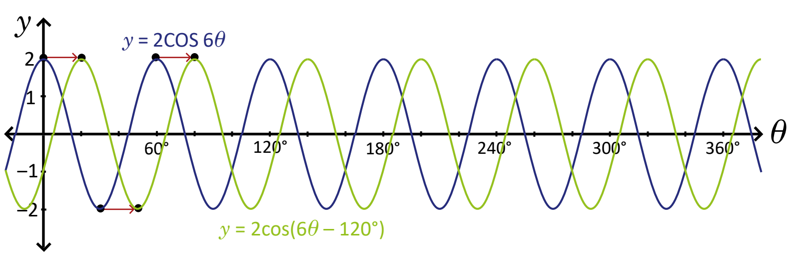
8b) Amplitud: 1 Periodo: 1080°



8c) Amplitud: 4 Periodo: 360°

8d) Amplitud: $\frac{1}{2}$ Periodo: 360°

9a)

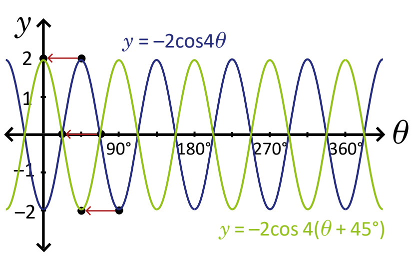


Amplitud: 2
Periodo: 60°
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: [–2, 2]

9b) $f(\theta) = 4\text{sen}(2\theta + 120°)$

Amplitud: 4
Periodo: 180°
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: [–4,4]

9c)



Amplitud: 2
Periodo: 90°
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: [–2, 2]

9d) $f(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}(3\theta - 225°)$

Amplitud: $\frac{1}{2}$ Periodo: 120°

Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

10a) $20° = 20°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{9}$ **10b)** $50° = \frac{5\pi}{18}$ **10c)** $140° = \frac{7\pi}{9}$ **10d)** $345° = \frac{23\pi}{12}$

10e) $500° = \frac{25\pi}{9}$ **10f)** $-150° = -\frac{5\pi}{6}$ **10g)** $\frac{\pi}{8}\text{ rad} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 22.5°$ **10h)** $\frac{4\pi}{9} = 80°$

10i) $\frac{5\pi}{3}\text{ rad} = 300°$ **10j)** $\frac{\pi}{180}\text{ rad} = 1°$ **10k)** $3\pi\text{ rad} = 540°$ **10l)** $-\frac{\pi}{2}\text{ rad} = -90°$

11. $2\pi r\frac{45°}{360°} = 9 \Rightarrow r = \frac{36}{\pi}$cm.

12. $5\theta = 12\text{ cm} \Rightarrow \theta = \frac{12}{5}$rad

3.15 Problemas de la unidad

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $\log_2(x^2 - 8) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ c) $\log_3 x = -\frac{1}{2}$
   d) $2^{3x+2} = 256$ e) $2^x = 3^{x-2}$ f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$

2. Utiliza desplazamientos horizontales y verticales para graficar las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \log_3(x - 1)$ b) $f(x) = \log_2 x + 2$ c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$ d) $f(x) = \log_4(x + 2) - 3$

3. Para cada función del problema anterior determina: dominio, rango, asíntotas y su función inversa.

4. **Interés compuesto.** Si una cantidad de dinero C se invierte durante t años, con un interés del r% anual, recapitalizable (que se reinvierte) n veces al año. El dinero que se obtiene al final de los t años está dado por la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$.

   María realiza un depósito a plazo de $500, en una Cooperativa de Ahorro. El interés anual del depósito es del 4%. El dinero se recapitaliza 4 veces al año (cada tres meses).
   a) Sustituye los valores conocidos en la fórmula $D(t) = C\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$, para obtener una fórmula que dé el dinero acumulado por María después de t años.
   b) ¿Cuánto dinero habrá acumulado María después de 2 años?
   c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que María acumule al menos $750?

5. **Crecimiento poblacional.** El crecimiento de una población a lo largo del tiempo está dado por la siguiente función exponencial: $P(t) = C(1 + r)^t$. Donde C es la población inicial, r es la tasa de crecimiento y t la cantidad de años transcurridos. La población de El Salvador para el año 2017 se estimó en 6 172 011 con una tasa de crecimiento poblacional de 0.3%. Utilizando la información anterior resuelve los siguientes problemas:
   a) Si la tasa de crecimiento se mantiene igual, ¿cuál será, aproximadamente, la población en El Salvador en el año 2030?
   b) ¿En qué año la población superará los 7 millones de habitantes?

6. Justifica la veracidad de la siguiente proposición: para todo número natural n se cumple que si 2^n tiene k dígitos entonces 2^{n+1} tiene k dígitos o 2^{n-1} tiene k dígitos.

7. Restringe la función tangente para que sea una función biyectiva y grafícala.

8. Grafica las funciones inversas de las funciones trigonométricas utilizando las funciones restringidas del problema 4 del Practica lo aprendido 3.14 y el problema anterior.

   Utiliza los ángulos en el sistema circular.

9. Demuestra que para todo ángulo θ se cumple que
   a) $\text{sen}^2\theta \leq 1$
   b) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq 2$ Utiliza la desigualdad triangular.
   c) $(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}\,2\theta$
   d) $|\text{sen}\,\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$ Utiliza el literal anterior.
   e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1$, $\theta \neq 90° + 180°n$, donde n es un número entero.

10. Aproximación del valor de π. Con los siguientes polígonos inscritos en el círculo de radio 1, calcula el cociente del perímetro del polígono entre el diámetro del círculo:
    a) Octágono regular b) Dodecágono regular

El método de exhaución fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 a. C.) para hallar la fórmula exacta del área del círculo. El método consiste es inscribir polígonos regulares en el círculo para aproximar su área. Con este método también realizó aproximaciones del cociente del perímetro de la circunferencia por su diámetro, es decir, de la constante π.
Dunham, W. *(2004) Viaje a través de los genios*.

Indicador de logro:

3.15 Resuelve problemas utilizando funciones logarítmicas y trigonométricas.

Solución de problemas:

1a) $\log_2(x^2 - 8) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 2^3 \Leftrightarrow x = \pm 4$

1b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$

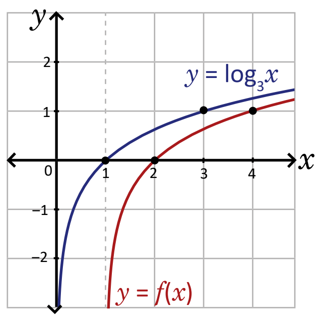
1c) $\log_3 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

1d) $2^{3x+2} = 256 \Leftrightarrow 2^{3x+2} = 2^8 \Leftrightarrow 3x + 2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

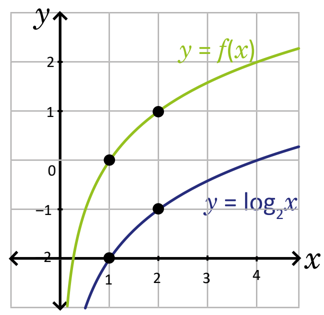
1e) $2^x = 3^{x-1}$, $x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = 2.70951...$

1f) $2^{x+5} = 3^{x-2}$, $x = \frac{2\log 3 + 5\log 2}{\log 3 - \log 2} = 13.96657...$

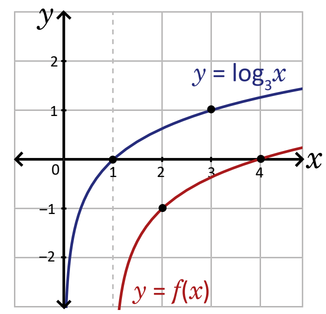
2a) $f(x) = \log_3(x - 1)$



2b) $f(x) = \log_2 x + 2$



2c) $f(x) = \log_3(x - 1) - 1$



3a) $D_f =]1, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$, Asíntotas: $x = 1$

Función inversa: si $y = f^{-1}(x) \Rightarrow f(y) = x \Rightarrow \log_3(y - 1) = x \Rightarrow y - 1 = 3^x \Rightarrow y = 3^x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^x + 1$.

3b) $D_f =]0, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$
Asíntotas: $x = 0$
$f^{-1}(x) = 2^{x-2}$

3c) $D_f =]1, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$
Asíntotas: $x = 1$
$f^{-1}(x) = 3^{x+1} + 1$

3d) $D_f =]-2, \infty[$, $R_f = \mathbb{R}$
Asíntotas: $x = -2$
$f^{-1}(x) = 4^{x+3} - 2$

4a) $D(t) = 500\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{4t}$

4b) \$541.43

4c) $500\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{4t} \geq 750 \Rightarrow \left(\frac{101}{100}\right)^{4t} \geq \frac{750}{500} \Rightarrow \log\left(\frac{101}{100}\right)^{4t} \geq \log\frac{3}{2} \Rightarrow 4t\log\frac{101}{100} \geq \log\frac{3}{2} \Rightarrow t \geq \frac{\log\frac{3}{2}}{4\log\frac{101}{100}} = 10.18...$

Deben transcurrir 11 años.

5a) $t = 2030 - 2017 = 13$.
$P(13) = 6\,172\,011(1 + 0.003)^{13} = 6\,417\,100$.

La población y la tasa de crecimiento poblacional se obtuvieron del archivo The World Factbook 2017.

5b) $6\,172\,011(1 + 0.003)^t \geq 7\,000\,000 \Rightarrow 1.003^t \geq \frac{7\,000\,000}{6\,172\,011} \Rightarrow \log 1.003^t \geq \log\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011} \Rightarrow t \geq \frac{\log\frac{7\,000\,000}{6\,172\,011}}{\log 1.003} \geq 42.02...$

La población superará los 7 millones de habitantes en el año 2060.

6. Si 2^n tiene k dígitos entonces $k - 1 \leq \log 2^n < k$,
Si la parte decimal de $\log 2^n$ es menor a $1 - \log 2$ entonces $k - 1 \leq \log 2^n + \log 2 < k$ es decir $k - 1 \leq \log 2^{n+1} < k$ entonces 2^{n+1} tiene k dígitos.

Si la parte decimal de $\log 2^n$ es mayor o igual que $\log 2$ entonces $k - 1 \leq \log 2^n - \log 2 < k$ es decir $k - 1 \leq \log 2^{n-1} < k$ entonces 2^{n-1} tiene k dígitos.

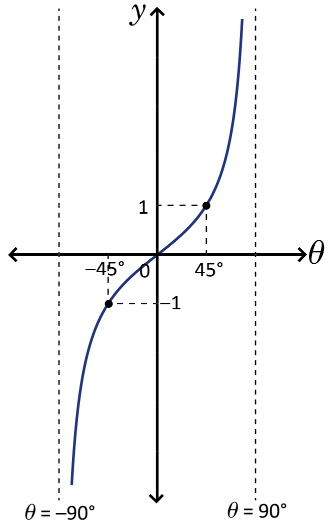
Y ya que $\log 2 < 1 - \log 2$, se abarcan todos los posibles valores de la parte decimal de $\log 2^n$.

Otra solución:
Si 2^n tiene k dígitos $\Leftrightarrow 2^n = a \times 10^{k-1}$, con $1 \leq a < 10$.

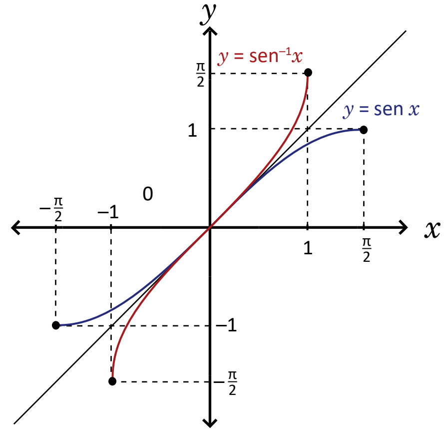
Si $1 \leq a < 5 \Rightarrow 2^{n+1} = (2a) \times 10^{k-1}$ con $2 \leq 2a < 10$
$\Leftrightarrow 2^{n+1}$ tiene k dígitos.

Si $5 \leq a < 10 \Rightarrow 2^{n-1} = \left(\frac{a}{2}\right) \times 10^{k-1}$ con $\frac{5}{2} \leq \frac{a}{2} < 5$
$\Leftrightarrow 2^{n-1}$ tiene k dígitos.

7. f: $]-90°, 90°[\longrightarrow \mathbb{R}$
$\theta \longrightarrow \tan\theta$

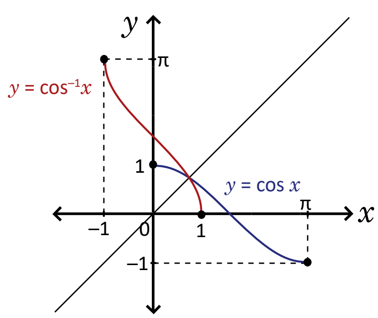


8. f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ $\quad f^{-1}$: $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \longrightarrow \text{sen } x \qquad x \longrightarrow \text{sen}^{-1}x$

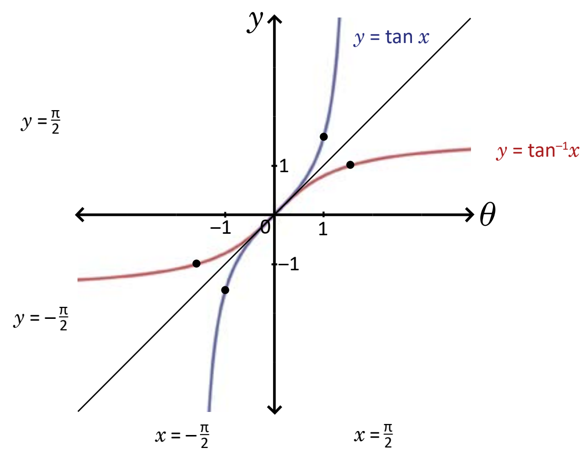


8. f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f^{-1}$: $\mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$x \longrightarrow \tan x \qquad x \longrightarrow \tan^{-1}x$

8. f: $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ $\qquad f^{-1}$: $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$
$x \longrightarrow \cos x \qquad x \longrightarrow \cos^{-1}x$



Puede mostrar a los estudiantes la notación de las funciones trigonométricas inversas.



9a) Si $0 \leq \text{sen }\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq \text{sen }\theta$
$\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq \text{sen }\theta \leq 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta \leq 1$

Si $-1 \leq \text{sen }\theta < 0 \Rightarrow 0 < -\text{sen }\theta \leq 1$
$\Rightarrow 0 \leq (-\text{sen }\theta)^2 \leq -\text{sen }\theta$
$\Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq -\text{sen }\theta \leq 1$
$\Rightarrow \text{sen}^2\theta \leq 1$

Otra solución: Para todo θ se cumple que $0 \leq |\text{sen }\theta| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\text{sen}^2\theta| \leq |\text{sen }\theta| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen}^2\theta \leq 1$.

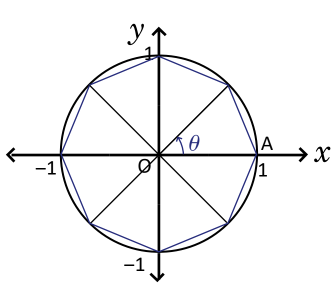
9b) $|\text{sen }\theta + \cos\theta| \leq |\text{sen }\theta| + |\cos\theta| \leq 1 + 1$
$\Rightarrow |\text{sen }\theta + \cos\theta| \leq 2$

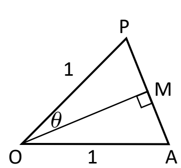
9c) $(\text{sen }\theta + \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2\text{sen }\theta\cos\theta + \cos^2\theta$
$= (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 2\text{sen }\theta\cos\theta$
$= 1 + \text{sen } 2\theta$

9d) $(\text{sen }\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen } 2\theta \leq 1 + 1$
$\Rightarrow 0 \leq (\text{sen }\theta + \cos\theta)^2 \leq 2$
$\Rightarrow \sqrt{(\text{sen }\theta + \cos\theta)^2} \leq \sqrt{2}$
$\Rightarrow |\text{sen }\theta + \cos\theta| \leq \sqrt{2}$

9e) $\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \leq 1 \Leftrightarrow 2\tan\theta \leq 1 + \tan^2\theta$
$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2\tan\theta + \tan^2\theta$
$\Leftrightarrow 0 \leq (1 - \tan\theta)^2$

10a)





$\theta = \frac{360°}{8} = 45°$ Sea OM bisectriz del ΔOAM $\Rightarrow \measuredangle$MOA = 22.5°
ΔOAP es isósceles $\Rightarrow$ AP = 2AM y $\measuredangle$AMO = 90°

En el ΔOAM se tiene: $\frac{\text{AM}}{\text{OA}} = \text{sen } 22.5° \Rightarrow \text{AM} = \text{sen } 22.5°$

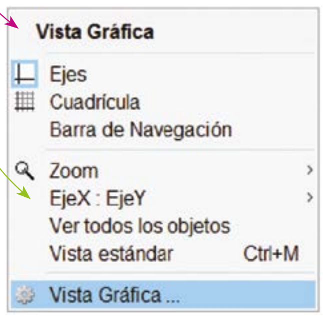
Así AP = 2sen 22.5° $\Rightarrow$ Si p es el perímetro de la circunferencia
$\frac{p}{2} = \frac{8\text{AP}}{2} = 4\text{AP} = 8\text{sen } 22.5° = 3.06146...$

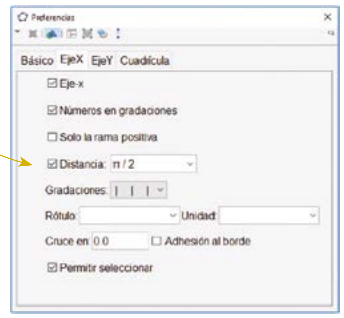
4.1 Práctica en GeoGebra: funciones trigonométricas

Con el desarrollo de esta práctica aprenderás sobre las gráficas de las funciones trigonométricas en GeoGebra y sus propiedades: amplitud, periodo y desplazamientos.

Práctica

1. Cambiar la numeración del eje.
   a) Clic derecho en la Vista Gráfica.
   b) Selecciona Vista Gráfica 
   c) Selecciona EjeX.
   d) Selecciona el cuadro Distancia.
   e) Selecciona en el cuadro desplegable π / 2.



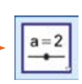


2. Gráfica de funciones trigonométricas.
   a) Función Seno. Escribe en la barra de Entrada sen x.

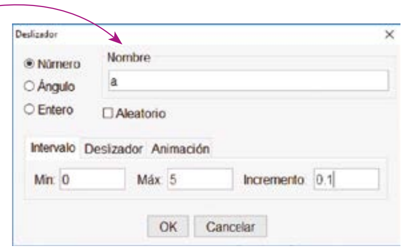
   b) Evaluando valores en la función seno. Cuando se evalúan ángulos en grados en las funciones trigonométricas debe colocarse el símbolo de grados correspondiente. Escribe en la barra de Entrada a = f(90°), b = f(90), c = f(π / 2). Observa que en b = f(90) el programa evalúa 90 radianes.

3. Amplitud de las funciones trigonométricas.
   Grafica la función $g(x) = 2\text{sen } x$. Escribe en la barra de entrada g(x) = 2*f(x).

4. El comportamiento de la función $f(x) = a\text{sen}(x)$ con $a > 0$.
   Creación de un deslizador.
   a) En la barra de herramientas selecciona Deslizador.

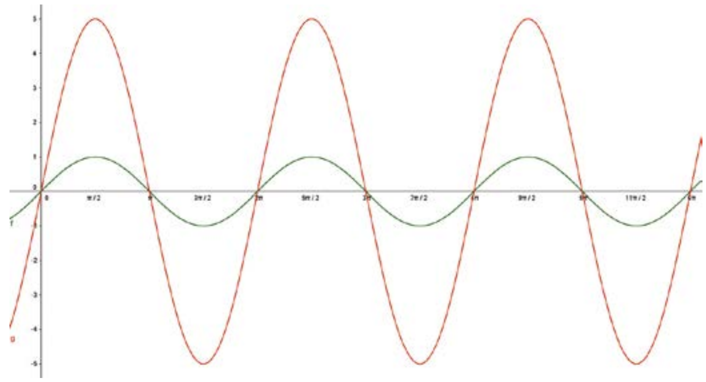


   b) Clic en la Vista Gráfica.
   c) Aparecerá un cuadro en el que debe colocarse el nombre al deslizador, en este caso **a**. Coloca en mínimo 0 y en máximo 5. Incremento 0.1, y clic en Ok.



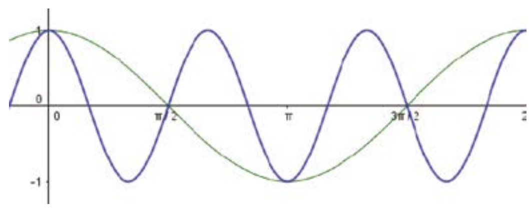
   d) Dibuja la función $f(x) = \text{sen } x$.
   e) Dibuja la función $g(x) = a\text{sen } x$.
   f) Selecciona el punto del deslizador y observa que a medida que se mueve hacia la derecha la función se dilata, mientras que hacia la izquierda se contrae.
   g) Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

Unidad 5



5. Periodo

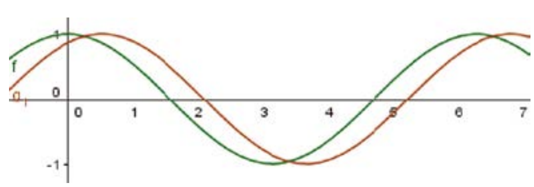
   a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
   b) Grafica la función cos $3x$. Escribe en la barra de Entrada g(x)=f(3x).
   c) Grafica la función cos $\frac{x}{3}$. Escribe en la barra de Entrada h(x)=f(x/3).



6. Desplazamientos verticales u horizontales.

   a) Grafica la función $f(x)$=cos x.
   b) Grafica la función $g_1(x)$ = cos $(x - 30°)$.
   c) Grafica la función $h_1(x)$ = cos $(x + 60°)$.
   d) Grafica la función $g_2(x)$ = cos(x) + 3.
   e) Grafica la función $h_2(x)$ = cos(x) – 2.

Para escribir subíndice en GeoGebra se utiliza guion bajo como se muestra a continuación. → Entrada: g_1(x) = f(x-30°)



Actividades

1. Grafica las funciones del problema 8 de la clase 3.14.
2. Grafica las funciones del problema 9 de la clase 3.14.
3. Crea un deslizador **B**, con mínimo 0, máximo 5 e incremento 0.1. Luego grafica las funciones $f(x)$ = sen x y $g(x)$ = sen Bx. Observa el comportamiento de la función g a medida que el valor de **B** aumenta o disminuye.
4. Realiza una animación utilizando deslizadores para desplazamiento vertical y horizontal.

Indicador de logro:

4.1 Identifica la variación de las funciones trigonométricas al cambiar su periodo, amplitud y al realizar desplazamientos.

Secuencia:

Ya que se han estudiado los desplazamientos de las funciones trigonométricas y se ha introducido el concepto de radián, ahora se utilizará GeoGebra para graficar funciones, así como para visualizar con animaciones la manera en que cambia una función al realizar un desplazamiento o cambiar su amplitud o periodo.

Propósito:

Se cambia la escala en el eje x para observar los ángulos en radianes, sin embargo en la barra de entrada se escribirán los valores en grados (°) pues el programa lo convierte automáticamente. El estudiante debe interpretar las animaciones para corroborar lo aprendido.

Solución de problemas:

1a) Escribe en la barra de entrada sen (5x).

1b) Escribe en la barra de entrada cos (x/3).

1c) Escribe en la barra de entrada 4cos x.

1d) Escribe en la barra de entrada (1/2)sen x.

No es necesario que los estudiantes grafiquen la función en el intervalo dado en los Problemas.

2a) Escribe en la barra de entrada 2cos (6x – 120°).

2b) Escribe en la barra de entrada 4sen (2x + 120°).

2c) Escribe en la barra de entrada –2cos (4x + 180°).

2d) Escribe en la barra de entrada (1/2)sen(3x – 225°).

Fe de errata:
En el numeral 2 de la sección de "Actividades" del libro de texto, la referencia al problema 10 es un error, debe ser al problema 9.

3. En la barra de herramientas selecciona Deslizador. Clic en la Vista Gráfica. Nombra B al deslizador. Coloca en mínimo 0 y en máximo 5. Incremento 0.1, y clic en Ok. Escribe en la barra de entrada f(x) = sen x. Escribe en la barra de entrada g(x) = sen Bx. Selecciona el punto del deslizador y observa cómo cambia la función a medida que se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda. Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

4. Horizontal: En la barra de herramientas selecciona Deslizador. Clic en la Vista Gráfica. Nombra k al deslizador. Coloca en mínimo –90° y en máximo 90°. Incremento 0.1° y clic en Ok. Escribe en la barra de entrada f(x) = sen x. Escribe en la barra de entrada g(x) = sen (x – k). Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

Vertical: En la barra de herramientas selecciona Deslizador. Clic en la Vista Gráfica. Nombra c al deslizador. Con mínimo -5 y máximo 5. Incremento 0.1 y clic en Ok. Escribe en la barra de entrada f(x) = cos x. Escribe en la barra de entrada g(x) = cos x + c. Haz clic derecho sobre el deslizador e inicia animación.

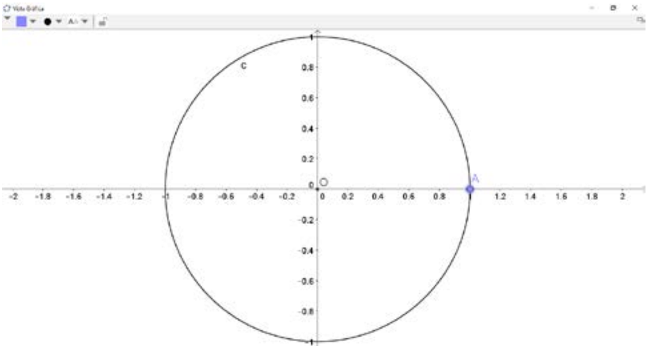
4.2 Práctica en GeoGebra: construcción de las funciones seno y coseno

Es posible construir las funciones trigonométricas observando su comportamiento en el círculo trigonométrico. A continuación se graficará la función seno.

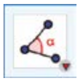
Práctica

1. Dibujar el círculo trigonométrico.

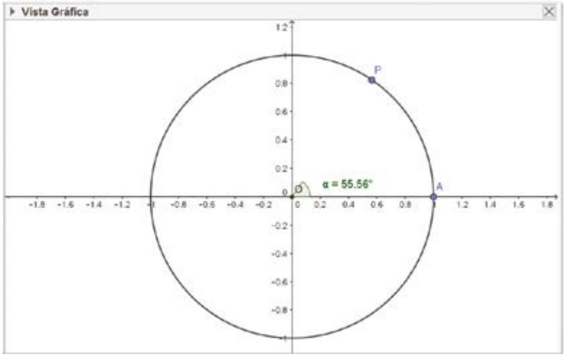
   a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).
   b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.



2. Dibujar el ángulo.

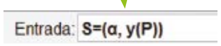


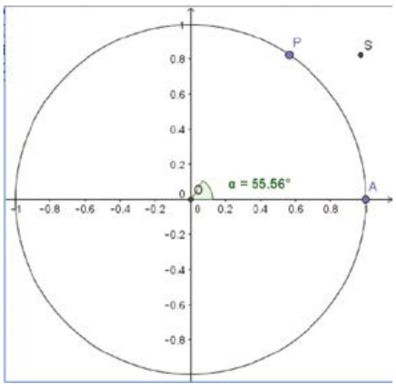
   a) Selecciona un punto P en el CT.
   b) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.
   c) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



3. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto P (es decir sen α).

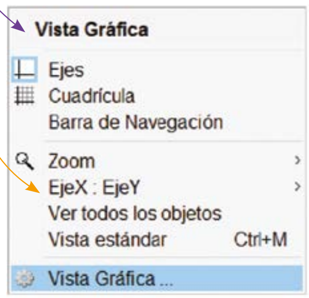
   a) En la barra de Entrada escribe S = (α, y(P)) y presiona Enter.

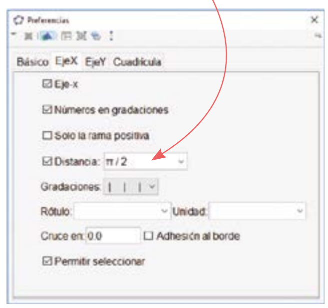


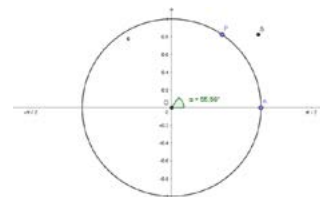


Unidad 5

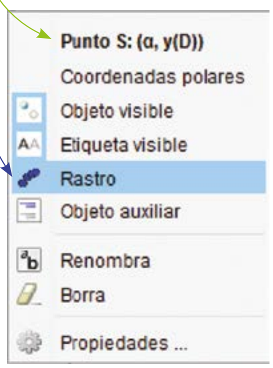
4. Cambiar la numeración del eje x.
   a) Clic derecho en la Vista Gráfica (ningún elemento debe estar seleccionado).
   b) Clic en Vista Gráfica.
   c) Clic en EjeX.
   d) Clic en el cuadro Distancia y selecciona la opción π / 2. Luego salir.

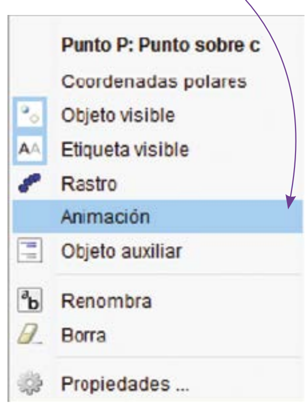


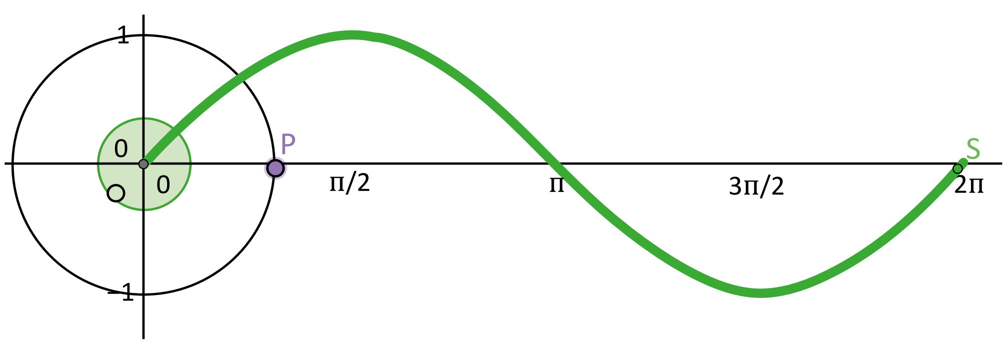




5. Graficando la función seno.
   a) Selecciona el punto S y dar clic derecho.
   b) Clic en rastro.
   c) Selecciona el punto P, clic derecho y luego inicia la animación.







Actividades

Construye la función coseno a partir del círculo trigonométrico.

Indicador de logro:

4.2 Utiliza las herramientas del software para construir las funciones seno y coseno a partir del círculo trigonométrico.

Secuencia:

Se graficó la función seno a partir de la ubicación de puntos en el plano cartesiano, ahora el estudiante observará cómo se obtiene la gráfica de las funciones seno y coseno a partir del círculo trigonométrico utilizando las coordenadas de cada punto.

Propósito:

Observar la utilidad del círculo trigonométrico para obtener de manera dinámica la gráfica de las funciones seno y coseno.

Solución de problemas:

Pasos para resolver el problema:

1. Dibujar el círculo trigonométrico (ver Practica).

2. Dibujar el ángulo (ver Práctica).

3. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en x del punto P (es decir cos α). Escribir en la barra de entrada R = (α, x(P)) y presiona enter.

4. Cambiar la numeración del eje x (ver Práctica).

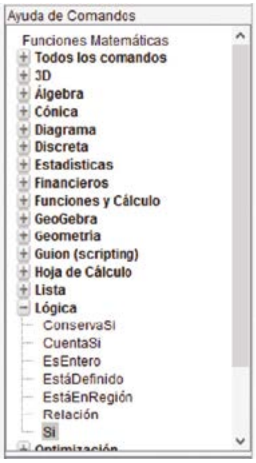
5. Graficando la función coseno.
   a) Selecciona el punto R y dar clic derecho.
   b) Clic en rastro.
   c) Selecciona el punto P, clic derecho y luego inicia la animación.

4.3 Práctica en GeoGebra: construcción de la función tangente

De igual manera que las funciones seno y coseno, la función tangente se puede dibujar a partir del círculo trigonométrico. Sin embargo, se tiene la dificultad que el ángulo al recorrer los valores $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ en el CT, la función debe evaluarse en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Para realizar esto se explicará la utilidad de la función **Si** del bloque de lógica.

Práctica

1. Clic en el botón Ayuda de Comandos, que se encuentra a la derecha de la barra de entrada. Se desplegará el panel de comandos.



2. Selecciona la función Si del bloque de lógica. En este comando deben ingresarse 2 o 3 datos separados por coma.

   Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

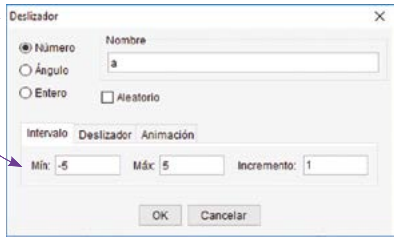
   Condición: Se introduce una condición en la que está involucrada una variable, puede ser una igualdad, una desiguladad, entre otras.

   Entonces: Es el valor que el comando devolverá si la condición es verdadera.

   Si no: Es el valor que el comando devolverá si la condición no es verdadera.

3. Se creará un número **b** a partir de un deslizador **a**, de tal manera que si el valor de **a** es negativo entonces el valor de **b** será 0 y si el valor de **a** es positivo entonces **b** tomará el valor de **a**.

   a) Crea un deslizador con nombre **a**, de -5 a 5 e incremento 1.



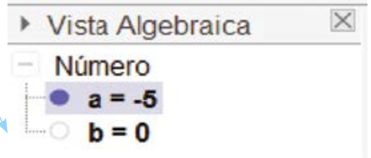
   b) Escribe en la barra de Entrada **b =**, luego pegar el comando Si del bloque de lógica.

   Entrada: b=Si[]

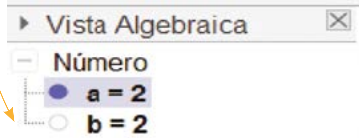
   c) Se debe evaluar si **a** es negativo por lo que la condición a ingresar es **a**<0. El valor que el comando devolverá es 0 si se cumple **a**<0. El valor que el comando devolverá es **a** si no se cumple que **a**<0.

   Entrada: **b=Si[a<0, 0, a]**

En el caso que **a** sea negativo **b** tomará el valor de 0.



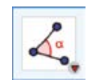
En el caso que a sea positivo **b** tomará el valor de **a**.



Unidad 5

4. Dibujar el Círculo Trigonométrico:
   a) Selecciona en la Barra de Herramientas la opción Circunferencia (centro, punto).
   b) Selecciona los puntos O(0, 0) como centro y A(1, 0) como punto.
   c) Grafica la recta $x = 1$.

5. Dibujar el ángulo:
   a) Coloca el punto A(1, 0).
   b) Selecciona un punto P en el CT.
   c) Selecciona en la Barra de Herramientas: Ángulo, tres puntos o dos rectas.
   d) Selecciona los puntos A, O y P, en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.



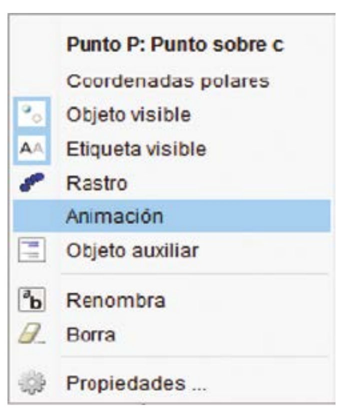
6. Representación de la tangente.
   a) Traza la recta que pasa por los puntos O y P.
   b) Nombra Q al punto de intersección de la recta trazada y la recta $x = 1$.
   c) Oculta la recta trazada.

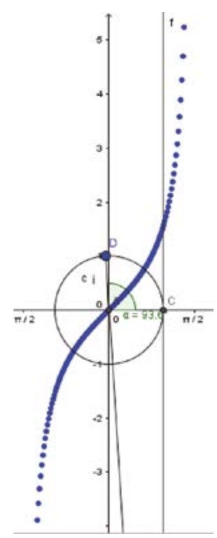
7. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en y del punto Q (es decir tan α).

   a) Construye el ángulo θ. Entrada: **θ = Si[α > 3* π /2 , α - 2 π , α]**

   b) Nombra T al punto de construcción.
   En la barra de Entrada escribe T = (θ, y(Q)) y presiona Enter. Entrada: **T = (θ, y(Q))**

8. Gráfica de la función.
   a) Cambia la numeración del eje x en términos de π.
   b) Selecciona el punto T, clic derecho y clic en Rastro.
   c) Seleciona el punto P, clic derecho y luego iniciar Animación.





Actividades

Construye la función cotangente a partir del círculo trigonométrico.

158

Indicador de logro:

4.3 Utiliza las herramientas del software para construir la función tangente a partir del círculo trigonométrico.

Secuencia:

La función tangente también se graficará en GeoGebra por medio de su representación en el círculo trigonométrico, introduciendo una herramienta de GeoGebra: la función Si.

Propósito:

La función Si se introduce para poder graficar la función tangente como se graficó en la clase, en dicha gráfica el intervalo posee valores negativos.

Solución de problemas:

Para la representación de la cotangente se construirá la figura del problema 6 de la clase 3.14, en la cual RQ = cot θ.

1. Dibujar el círculo trigonométrico.
   a) El punto O(0, 0) es el centro y A(1, 0) el punto de la circunferencia.
   b) Grafica la recta y = 1.

2. Dibujar el ángulo.
   a) Selecciona un punto P en el CT en el primer cuadrante.
   b) Construye el ángulo con los puntos A, O y P, selecciónalos en ese orden. El ángulo se nombra automáticamente como α.

3. Representación de la cotangente.
   a) Traza la recta que pasa por los puntos O y P.
   b) Nombra Q al punto de intersección de la recta trazada y la recta y = 1.
   c) Oculta la recta trazada.

4. Punto de construcción. Este punto tendrá como coordenada en x el ángulo α en radianes (el programa lo convierte automáticamente) y como coordenada en y la coordenada en x del punto Q (es decir cot α).

   En la barra de Entrada escribir U = (α, x(Q)) y presiona Enter.

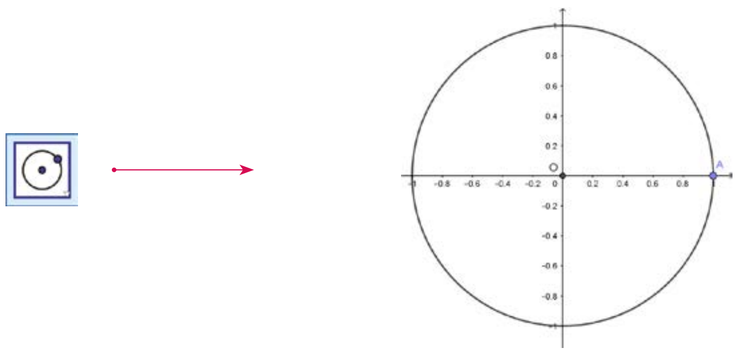
5. Gráfica de la función.
   a) Cambia la numeración del eje x en términos de π.
   b) Dar rastro al punto U y luego dar Animación al punto P.

4.4 Práctica en GeoGebra: el método de exhaución

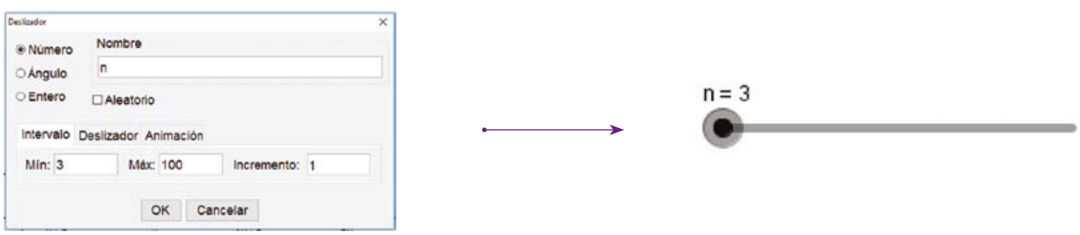
Se construirá un polígono inscrito en el círculo trigonométrico para observar la aproximación que tiene el área del polígono, a medida que sus lados aumentan, respecto al área del círculo.

Práctica

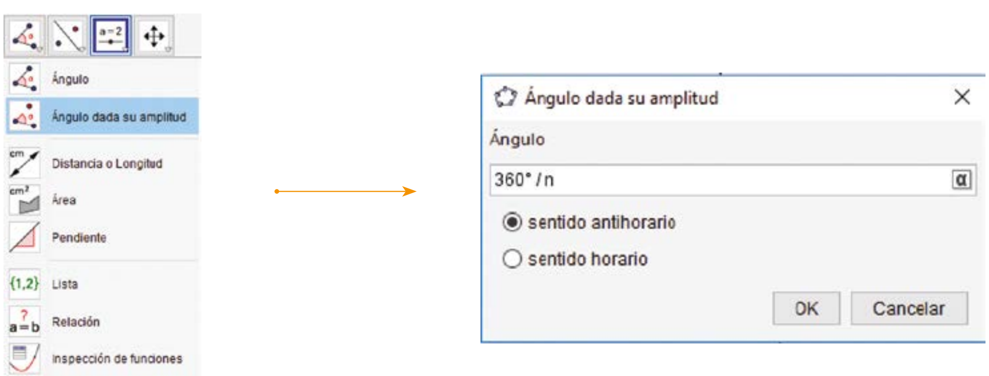
1. Construcción del círculo trigonométrico.
   El centro debe ser O(0, 0) y A(1, 0) el punto.



2. Construir un deslizador para el número de lados de un polígono regular con nombre n.
   Mínimo 3, máximo 100 e incremento 1.



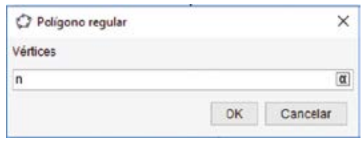
3. Construcción del ángulo central α dada su amplitud.
   a) Selecciona los puntos A, 0 y como amplitud 360° /n. Clic en OK.
   b) Aparecerá otro punto en el CT. Dar el nombre B.

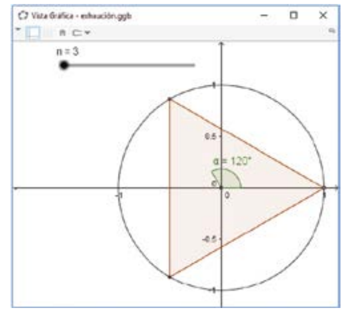


4. Contrucción del polígono regular.
   a) Selecciona la opción Polígono regular y escoge los puntos A y B.

Unidad 5

b) En el cuadro que aparecerá a continuación, escribe el número de vértices n.





Aparecerá automáticamente el valor del área del polígono construido.

polígono1 = 1.29904

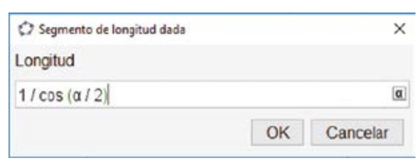
5. Calcular el área del círculo, con el comando Área del bloque de Geometría. Observa cómo se aproxima el área del polígono regular a la del círculo a medida que se incrementa el número de lados.

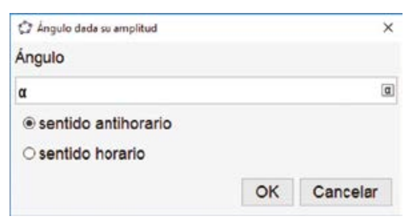
6. Determinar los perímetros del polígono y de la circunferencia.
   Perímetro del polígono — Entrada: perpoligono=Perímetro[polígono1]
   Perímetro de la circunferencia — Entrada: percircunferencia=Perímetro[c]

7. Comparar los perímetros del polígono y la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono.

8. La constante π se define como el cociente del perímetro del círculo entre su radio. Utiliza la contrucción realizada para obtener una aproximación del valor de π.

9. Construcción de un polígono regular que circunscriba al Círculo trigonométrico.
   Construye un segmento OO_1 de longitud dada, con longitud $\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. El punto O_1 se debe colocar en el eje x.





10. Construir el ángulo central β dada su amplitud.
    a) Selecciona los puntos O_1, O y como amplitud α. Clic en OK.
    b) Cambia el nombre al punto resultante por O_2.

11. Construir el polígono regular utilizando los puntos O_1 y O_2. El número de lados debe ser n.

Actividades

Efectúa las 3 aproximaciones realizadas en los problemas anteriores (área, perímetro y el valor π) con el polígono construido en el numeral 10.

Indicador de logro:

4.4 Explica el método de exhaución en el círculo trigonométrico por medio de un software para aproximar el valor de π.

Secuencia:

En sexto grado se estudió el valor de la constante π, que es útil para determinar el área y el perímetro de un círculo. En esta clase se utiliza el método de exhaución con ayuda de GeoGebra para determinar el área del círculo trigonométrico en el que se refleja el valor de π.

Propósito:

Al desarrollar la práctica el estudiante determina el área del círculo a partir de aproximaciones por medio de polígonos regulares y a la vez aproxima el valor de un número irracional.

Solución de problemas:

El polígono que circunscribe a la circunferencia se puede construir sobre la misma Práctica desarrollada, de esta manera pueden compararse los valores del área, perímetro y π con el polígono inscrito. Para realizar las aproximaciones basta desarrollar los pasos 5, 6 y 8 utilizando los valores del nuevo polígono.

Unidad 6. Sucesiones aritméticas y geométricas

Competencia de la unidad

Establecer el término general de una sucesión aritmética y geométrica para calcular términos o sumas parciales, utilizando las propiedades de estas sucesiones.

Relación y desarrollo

Tercer ciclo

Unidad 4: Ecuación (9°)
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notable y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales I
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 6: Sucesiones aritméticas y geométricas
- Sucesiones aritméticas
- Suceciones geométricas

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Sucesiones aritméticas	1	1. Patrones
	1	2. Patrones generalizados
	1	3. Sucesiones aritméticas: definición
	1	4. Sucesiones aritméticas: término general
	1	5. Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 1
	1	6. Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 2
	1	7. Sucesiones aritméticas: problemas
2. Sucesiones geométricas	1	1. Sucesiones geométricas: definición
	1	2. Sucesiones geométricas: término general
	1	3. Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 1
	1	4. Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 2
	1	5. Sucesiones geométricas: problemas
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 6
	2	Prueba del tercer periodo

14 horas clase + prueba de la unidad 6 + prueba del tercer periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Sucesiones aritméticas

La unidad inicia con la identificación de patrones de figuras y numéricos para introducir la definición de término general de una sucesión. Luego, se define una sucesión aritmética, se define su término general, se calculan sumas parciales, conocidas como series aritméticas, y se resuelven problemas diversos que requieren del uso de sucesiones aritméticas.

Lección 2: Sucesiones geométricas

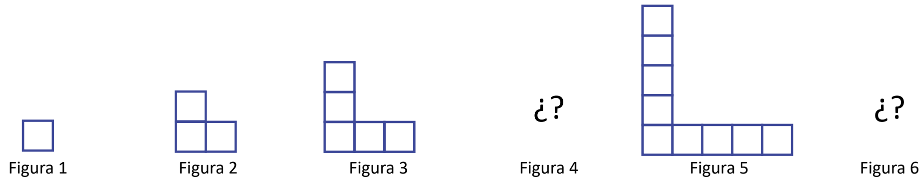
Se define una sucesión geométrica y su término general, se calculan sumas parciales, conocidas como series geométricas, además, se resuelven problemas diversos que requieren del uso de sucesiones geométricas.

1.1 Patrones

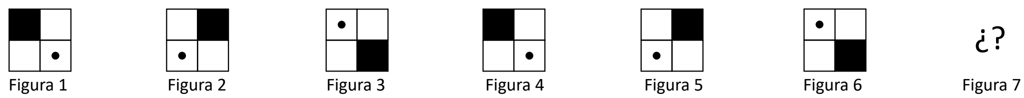
Problema inicial

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina en la Figura 4 y la Figura 6 si la secuencia se va formando de igual manera.



b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7 si la secuencia se va formando de la misma manera?

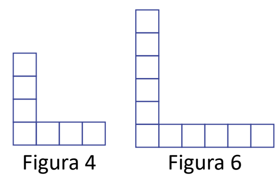


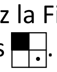
c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	3	5	8	12	17	23	¿?
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6	Posición 7	Posición 8

Solución

a) Puede observarse que cada figura se obtiene agregando dos cuadrados a la figura anterior, acomodándolos en forma de L. Entonces, la Figura 4 y la Figura 6 son las que muestran las figuras de la derecha.



b) Si se considera que el cuadrado grande va rotando 90° en el sentido horario respecto a su centro, la Figura 2 se obtiene rotando una vez la Figura 1, la Figura 3 se obtiene rotando una vez la Figura 2, la Figura 4 se obtiene rotando dos veces la Figura 3, la Figura 5 se obtiene rotando una vez la Figura 4 y la Figura 6 se obtiene rotando una vez la Figura 5. Por lo tanto, la Figura 7 se obtiene rotando dos veces la Figura 6, por lo que la Figura 7 es .

c) Puede observarse que

	+1		+2		+3		+4		+5		+6	
2		3		5		8		12		17		23
Posición 1		Posición 2		Posición 3		Posición 4		Posición 5		Posición 6		Posición 7

Entonces, el siguiente número deberá ser 23 + 7 = 30.

Para generar un número se suma el número anterior y su posición.

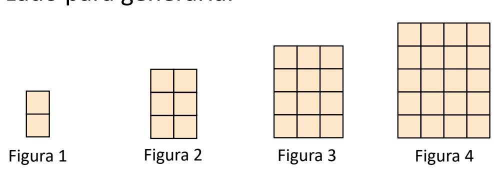
Conclusión

Un **patrón** matemático es una secuencia de números o figuras que satisfacen cierta regla y con la cual puede generarse cualquier elemento de la secuencia.

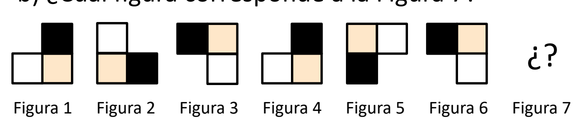
Problemas

Observa las siguientes secuencias de figuras y números. Responde lo pedido en cada caso.

a) Determina las figuras 5, 6 y 7 que corresponden a la secuencia e identifica la regla que se ha utilizado para generarla.



b) ¿Cuál figura corresponde a la Figura 7?



c) Determina el número faltante y la regla que se ha utilizado para generar la secuencia.

2	6	12	20	30	42	¿?

162

Indicador de logro:

1.1 Identifica patrones numéricos o de figuras y establece la regla que los genera.

Secuencia:

Se inicia la unidad con la identificación de patrones, ya sean numéricos o de figuras y se busca una regla que los genera. Se establece la definición de patrón numérico.

Propósito:

En la unidad 4 de séptimo grado se abordan los patrones numéricos. Esta clase tiene el objetivo de recordar los patrones y la forma de determinar un elemento en particular de este.

Solución de problemas:

a) Se observa primero el número de elementos de cada figura.

Figura 1: 2 = 1 × 2   Figura 2: 6 = 2 × 3   Figura 3: 12 = 3 × 4   Figura 4: 20 = 4 × 5

El número de elementos que tiene cada figura puede obtenerse multiplicando el número de columnas por el número de filas que tiene. Además, el número de la figura corresponde con el número de columnas que tiene. Por otra parte, el número de filas es siempre una unidad mayor que el número de columnas.

Por lo dicho anteriormente, la Figura 5, Figura 6 y Figura 7 son como se muestra a la derecha.

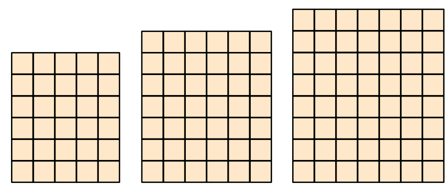
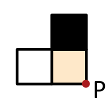


Figura 5   Figura 6   Figura 7

b) De la Figura 1 se toma el punto P, como muestra la figura. Se realizan rotaciones (o giros) con respecto a este punto.



Si se rota la Figura 1 un ángulo de 90°, se obtiene la Figura 2. Al rotar la Figura 2, un ángulo de 180° se obtiene la Figura 3. Se rota la Figura 3 un ángulo de 90°, se obtiene la Figura 4. Se rota la Figura 4 un ángulo de 180°, se obtiene la Figura 5. Continuando de la misma forma, la Figura 7 se obtiene girando 180° la Figura 6. Entonces, se obtiene la figura mostrada a la derecha.

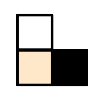


Figura 7

c) Se identifica primero cada elemento con su posición.

2	6	12	20	30	42
Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	Posición 6

Al buscar una relación entre los elementos y sus posiciones se pueden identificar dos formas de generar el patrón.

Forma 1. El elemento puede obtenerse sumándole al número anterior el doble de su posición.

Posición 1: 2
Posición 2: 2 + 2 × **2** = **6**
Posición 3: 6 + 2 × **3** = **12**
Posición 4: 12 + 2 × **4** = **20**
Posición 5: 20 + 2 × **5** = **30**

Entonces, a la Posición 7 le corresponde
42 + 2 × 7 = 56.

Forma 2. El elemento puede obtenerse multiplicando el número de posición por su consecutivo.

Posición 1: 1 × 2 = 2
Posición 2: 2 × 3 = 6
Posición 3: 3 × 4 = 12
Posición 4: 4 × 5 = 20
Posición 5: 5 × 6 = 30

Entonces, a la Posición 7 le corresponde
7 × 8 = 56.

1.2 Patrones generalizados

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia:

3	6	9	12	15	18	21	¿?	¿?	...
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	

a) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la secuencia?
b) ¿Cuáles son los números que corresponden a las posiciones 8 y 9?
c) ¿Cuál sería el número correspondiente a la posición 20? ¿y a la posición 100?
d) ¿Cuál sería el número correspondiente a una posición cualquiera n?

Solución

a) Al observar la secuencia se puede determinar que todos los números son múltiplos de 3, por lo que la regla utilizada es multiplicar por 3 el número de posición en la que se encuentra.

b) Por el resultado del literal a, en las posiciones 8 y 9 corresponden los números 3(8) = 24 y 3(9) = 27.

c) Como el número se obtiene multiplicando la posición por 3, entonces 3(20) = 60 es el número que corresponde a la posición 20 y 3(100) = 300 es el número que corresponde a la posición 100.

d) El número que corresponderá a la posición n es $3n$.

La sucesión también puede generarse sumando 3 al número anterior.

Definición

A una secuencia de números que sigue cierta regla también se le conoce como **sucesión**. En una sucesión, sus elementos tienen un orden y habitualmente se denotan por a_n, donde n representa la posición que ocupa dicho elemento. Por ejemplo, en la sucesión del Problema inicial, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_7 = 21$, $a_n = 3n$.

A cada elemento de una sucesión se le llama **término** y al término que ocupa la n-ésima posición (con n un número natural) se le llama **término general**. Por ejemplo, $a_n = 3n$ es el término general del Problema inicial.

Una sucesión es **finita** si tiene una cantidad finita de elementos. Caso contrario, se dice que la sucesión es **infinita**.

Al escribir una sucesión se hace en orden, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, donde los puntos suspensivos indican que la sucesión sigue.

En algunas ocasiones no es posible encontrar el término general, en una forma simple, que describa una sucesión.

Ejemplo

Determina el término general de la siguiente sucesión y calcula los términos 20, 41 y 101.

$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$$

Observa que la sucesión va alternando signo en sus términos, y en cada posición impar su signo es negativo y en cada posición par, su signo es positivo. Nota que esto puede escribirse como:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Unidad 6

163

Además, los valores absolutos de los números que componen la sucesión son todos consecutivos y coinciden con su posición dentro de la sucesión, por lo tanto, el término general es $a_n = (-1)^n\, n$.

Por lo tanto, los términos 20, 41 y 101 son $a_{20} = (-1)^{20}\, 20 = 20$, $a_{41} = -41$ y $a_{101} = -101$.

Problemas

1. Para cada sucesión, encuentra el término general y los términos que se piden.
   a) 2, 4, 6, 8, ... ¿cuál es el término 42?
   b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... ¿cuál es el término 21?
   c) 1, 4, 9, 16, 25, ... ¿cuál es el término 11?
   d) 1, 8, 27, 64, 125, ... ¿cuál es el término 8?
   e) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$ ¿cuál es el término 954?
   f) 2, 0, 2, 0, 2, ... ¿cuál es el término 10?, ¿y el 55?

2. Enlista los primeros cinco términos de la sucesión que tiene término general a_n, en cada uno de los siguientes casos:

   a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 4n - 2$ c) $a_n = -n + 2$ d) $a_n = n^2 - 3$

3. Observa el siguiente proceso: sea T_5 el número de elementos de la Figura 5, en la siguiente sucesión:

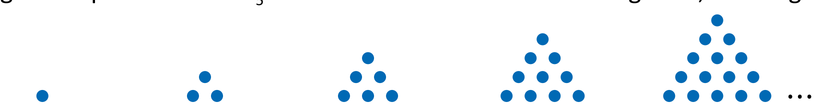
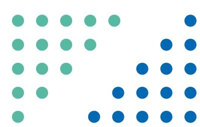


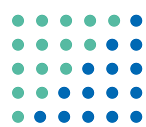
Figura 1   Figura 2   Figura 3   Figura 4   Figura 5

- Se reordenan los elementos de la figura 5.

- Se duplica la figura.



- Se unen las dos figuras iguales formando un rectángulo de 5 × 6 elementos.



Por lo tanto, $2T_5 = 5(6)$.

Generaliza el proceso anterior para determinar el término general T_n de la sucesión.

Una de las sucesiones más famosas es la conocida Sucesión de Fibonacci.

Fibonacci fue un matemático italiano que nació en Pisa, alrededor de 1175. Su nombre verdadero era Leonardo de Pisa pero comúnmente se le conocía como Fibonacci, nombre que representa la versión corta de Filius Bonaccio, que significa hijo de Bonaccio.

La sucesión de Fibonacci es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...; es decir, los términos de la sucesión de Fibonacci pueden determinarse sumando los dos términos anteriores.

Esta sucesión tuvo su primera aparición cuando se planteó el problema que involucraba la reproducción de un par de conejos, con la hipótesis que estos eran inmortales, se volvían adultos al cabo de un mes, y que de cada pareja de conejos nacía una pareja de conejos (un macho y una hembra).

Indicador de logro:

1.2 Determina el término general de una sucesión.

Secuencia:

Se define una sucesión y la forma de representarla mediante una fórmula. Se define además, el término de una sucesión.

Propósito:

El Problema inicial tiene como objetivo identificar la regla general de una secuencia para luego definir el término general y la forma de denotar una sucesión.
El Ejemplo tiene como objetivo utilizar la notación definida en la Conclusión y calcular algunos términos específicos de una sucesión utilizando su término general.

Solución de problemas:

En cada una de las soluciones, n representa un número natural.

1a) Se observa que 2 = 2(1), 4 = 2(2), 6 = 2(3), 8 = 2(4), por tanto, $a_n = 2n$. Luego, $a_{42} = 2(42) = 84$.

1b) Se observa que la sucesión está compuesta por todos los números impares positivos. Todo número impar positivo puede escribirse como $2n - 1$, que tiene el valor de 1 cuando $n = 1$. Entonces $a_n = 2n - 1$. Luego, $a_{21} = 2(21) - 1 = 41$.

1c) La sucesión está compuesta por los cuadrados de los números naturales: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, ... Por tanto, $a_n = n^2$. Luego, $a_{11} = 11^2 = 121$.

1d) La sucesión está compuesta por los cubos de los números naturales: $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, ... Por tanto, $a_n = n^3$. Luego, $a_8 = 8^3 = 512$.

1e) Se puede observar que la sucesión está formada por fracciones, donde el numerador es siempre 1 y los denominadores son los números naturales. Por tanto, $a_n = \frac{1}{n}$. Luego, $a_{954} = \frac{1}{954}$.

1f) Se observa que los términos de la sucesión son siempre 2 si la posición es impar, y siempre es 0 si la posición es par. Hay dos formas de definir la sucesión: Entonces,

Forma 1. $$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Forma 2. $a_n = 1 - (-1)^n$

Luego, $a_{10} = 0$ y $a_{55} = 2$.

2a) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$, $a_5 = 16$.

2b) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$, $a_4 = 14$, $a_5 = 18$.

2c) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = -2$, $a_5 = -3$.

2d) $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$, $a_4 = 13$, $a_5 = 22$.

3. Con los puntos de la Figura n, que tiene T_n elementos, se puede formar, al reordenarlos, un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen n puntos cada uno.

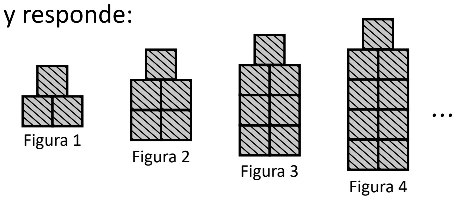
Al duplicar el triángulo, se tiene $2T_n$ elementos. Al ubicar ambos triángulos rectángulos se obtiene un rectángulo cuyos lados están formados por n y $n + 1$ puntos. Pero el número de elementos del rectángulo es $n(n + 1)$, entonces, $2T_n = n(n + 1)$.

Por lo tanto, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.3 Sucesiones aritméticas: definición

Problema inicial

Observa la siguiente secuencia y responde:



a) Enlista el número de elementos de los primeros 10 términos de la sucesión.
b) ¿Cuál es la regla que se ha utilizado para generar la sucesión?
c) Si a un término se le resta su término anterior, ¿qué se puede observar si se hace en repetidas ocasiones?
d) Si sumas los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8 y así sucesivamente, ¿qué sucede?

Solución

a) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Número de elementos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

b) Si se observan las figuras, se han ido añadiendo dos cuadrados respecto a la figura anterior.

c) Al tomar un término y restarle su anterior se puede observar que el resultado siempre es el mismo cuando se hace varias veces. En este caso resulta ser 2.

$a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_5 - a_4 = 11 - 9 = 2$
$a_9 - a_8 = 19 - 17 = 2$

d) Obsérvese que los términos 1 y 10, 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7, y 5 y 6, a pares siempre están a una misma distancia de los extremos. Puede observarse que al sumar términos que están a igual distancia de los extremos, el resultado es siempre el mismo: 24.

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

11 + 13 = 24
9 + 15 = 24
7 + 17 = 24
5 + 19 = 24
3 + 21 = 24

Definición

A la sucesión donde sus términos pueden obtenerse sumando un mismo número al término anterior se llama **sucesión aritmética**.

Una sucesión aritmética tiene la propiedad que al restarle a un término su anterior siempre se obtendrá el mismo resultado. A este resultado se le llama **diferencia**.

Otra de las propiedades de una sucesión aritmética finita es que al sumar términos que están a una misma distancia de los extremos el resultado es el mismo.

Un detalle importante que hay que resaltar sobre las sucesiones aritméticas es que la diferencia puede ser un número cualquiera, esto es, puede ser un número entero, racional, decimal o irracional.

Problemas

Identifica si cada sucesión es una sucesión aritmética. En caso de serlo, determina su diferencia.

a) 5, 11, 17, 23, 29, 35, ...
b) −3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, ...
c) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, ...
d) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots$
e) −4, −4, −4, −4, −4, −4, ...
f) 11, 7, 3, −1, −5, −9, ...

Indicador de logro:

1.3 Determina si una sucesión es aritmética utilizando su definición.

Secuencia:

Se inicia la clase con el análisis de una secuencia de figuras y el número de elementos de cada una de ellas. Se establece la definición de una sucesión aritmética y la diferencia de una sucesión de este tipo.

Solución de problemas:

a) Se observa que 11 – 5 = 17 – 11 = 23 – 17 = 29 – 23 = 35 – 29 = 6. Como la diferencia obtenida es siempre la misma, la sucesión es aritmética, donde su diferencia es 6.

b) Se observa que 0 – (–3) = 3 – 0 = 6 – 3 = 9 – 6 = 12 – 9 = 15 – 12 = 3. Como la diferencia obtenida es siempre la misma, la sucesión es aritmética, donde su diferencia es 3.

c) Se observa que 2 – 1 = 1, mientras que 7 – 5 = 2. Como ambas diferencias son distintas, la sucesión no es aritmética.

d) Se observa que $\frac{5}{2} - 2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} - 3 = 4 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} - 4 = 5 - \frac{9}{2} = \frac{11}{2} - 5 = \frac{1}{2}$. Como la diferencia obtenida es siempre la misma, la sucesión es aritmética, donde su diferencia es $\frac{1}{2}$.

e) Al hacer la diferencia de cualesquiera dos términos consecutivos, se tiene que –4 – (–4) = 0. Por tanto, la sucesión es aritmética con diferencia igual a 0.

f) Al realizar las restas se obtiene que 7 – 11 = 3 – 7 = –1 – 3 = –5 – (–1) = –9 – (–5) = –4. Por tanto, la sucesión es aritmética, con diferencia igual a –4.

1.4 Sucesiones aritméticas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión aritmética del Problema inicial de la clase 1.3.

Solución

Obsérvese primero que si a_{n-1} es un término cualquiera, a_n es el término que le sigue. Como cada figura se obtiene sumando dos cuadrados a la figura anterior, se tiene que

$$\underbrace{5 = 3 + 2}_{a_2 = a_1 + 2}, \quad \underbrace{7 = 5 + 2}_{a_3 = a_2 + 2}, \quad \underbrace{9 = 7 + 2}_{a_4 = a_3 + 2}, \quad \ldots \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Se tiene entonces que

$$a_2 = a_1 + 2, \quad a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = a_3 + 2, \quad a_5 = a_4 + 2, \ldots, \quad a_{n-2} = a_{n-3} + 2, \quad a_{n-1} = a_{n-2} + 2\ , \quad a_n = a_{n-1} + 2$$

Se necesita encontrar una fórmula en términos de la posición que ocupa en la sucesión. Nótese entonces que,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \\ &= a_{n-2} + (2 + 2) \\ &= a_{n-3} + (2 + 2 + 2) \\ &= a_{n-4} + (2 + 2 + 2 + 2) \end{aligned}$$

Si se continúa de ese modo

$$\begin{aligned} a_n &= a_4 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) = (a_3 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-4}) \\ &= a_3 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) = (a_2 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-3}) \\ &= a_2 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) = (a_1 + 2) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-2}) \\ &= a_1 + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1}) \end{aligned}$$

Observa que $4 = n - (n - 4)$.

Se tiene entonces que a_n es igual al primer término más $n - 1$ veces 2, es decir, el término general de la sucesión es $a_n = a_1 + 2(n - 1)$.

Conclusión

En una sucesión aritmética, si d es su diferencia, su término general está dado por $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Ejemplo

Calcula los términos 4, 12, 17 y 99 de la sucesión aritmética $a_n = -2 + 6(n - 1)$ y determina cuál es el término a_1 y su diferencia.

Para calcular los términos que se piden, se sustituye la n por la posición del término. Así,

$a_4 = -2 + 6(4 - 1) = -2 + 6(3) = -2 + 18 = 16$

$a_{12} = -2 + 6(12 - 1) = -2 + 6(11) = 64$

$a_{17} = -2 + 6(17 - 1) = -2 + 6(16) = 94$

$a_{99} = -2 + 6(99 - 1) = -2 + 6(98) = 586$

Además, $a_1 = -2$ y su diferencia es $d = 6$.

En muchas ocasiones, el término general de una sucesión aritmética se presenta en la forma $a_n = a_1 - d + dn$. Por ejemplo, $a_n = -2 + 6(n - 1)$ puede escribirse como $a_n = -8 + 6n$.

Problemas

1. Establece el término general de las sucesiones aritméticas de los problemas de la Clase 1.3.

2. Determina los términos 1, 7, 11, 20 y 100 de cada una de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) $a_n = 5 + 4(n - 1)$ b) $a_n = -1 + 7(n - 1)$ c) $a_n = 2 - 3(n - 1)$

d) $a_n = -4 - (n - 1)$ e) $a_n = \frac{1}{2} - (n - 1)$ f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n - 1)$

g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n - 1)$ h) $a_n = -0.6 + 2(n - 1)$ i) $a_n = -0.4 - 0.7(n - 1)$

Indicador de logro:

1.4 Establece el término general de una sucesión aritmética y lo utiliza para calcular algunos términos de esta.

Secuencia:

En esta clase se deduce el término general de una sucesión aritmética mediante un caso particular. Luego se generaliza para una diferencia d cualquiera. Además, se calculan algunos términos de sucesiones aritméticas utilizando su término general.

Propósito:

El Ejemplo tiene como objetivo utilizar el término general de una sucesión aritmética para calcular algunos términos de esta.
Con respecto a la sección de Problemas, el problema 1 es para establecer el término general de sucesiones aritméticas, mientras que el problema 2 es para calcular términos específicos utilizando el término general.

Solución de problemas:

1a) $a_n = 5 + 6(n-1) = -1 + 6n$

1b) $a_n = -3 + 3(n-1) = -6 + 3n$

1c) No es sucesión aritmética

1d) $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n$

1e) $a_n = -4$

1f) $a_n = 11 - 4(n-1) = 15 - 4n$

2a) $a_n = 5 + 4(n-1)$: $a_1 = 5$, $a_7 = 29$, $a_{11} = 45$, $a_{20} = 81$, $a_{100} = 401$

2b) $a_n = -1 + 7(n-1)$: $a_1 = -1$, $a_7 = 41$, $a_{11} = 69$, $a_{20} = 132$, $a_{100} = 692$

2c) $a_n = 2 - 3(n-1)$: $a_1 = 2$, $a_7 = -16$, $a_{11} = -28$, $a_{20} = -55$, $a_{100} = -295$

2d) $a_n = -4 - (n-1)$: $a_1 = -4$, $a_7 = -10$, $a_{11} = -14$, $a_{20} = -23$, $a_{100} = -103$

2e) $a_n = \frac{1}{2} - (n-1)$: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_7 = -\frac{11}{2}$, $a_{11} = -\frac{19}{2}$, $a_{20} = -\frac{37}{2}$, $a_{100} = -\frac{197}{2}$

2f) $a_n = 5 - \frac{1}{3}(n-1)$: $a_1 = 5$, $a_7 = 3$, $a_{11} = \frac{5}{3}$, $a_{20} = -\frac{4}{3}$, $a_{100} = -28$

2g) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(n-1)$: $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_7 = \frac{19}{4}$, $a_{11} = \frac{31}{4}$, $a_{20} = \frac{29}{2}$, $a_{100} = \frac{149}{2}$

2h) $a_n = -0.6 + 2(n-1)$: $a_1 = -0.6$, $a_7 = 11.4$, $a_{11} = 19.4$, $a_{20} = 37.4$, $a_{100} = 197.4$

2i) $a_n = -0.4 - 0.7(n-1)$: $a_1 = -0.4$, $a_7 = -4.6$, $a_{11} = -7.4$, $a_{20} = -13.7$, $a_{100} = -69.7$

1.5 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 1*

Problema inicial

Resuelve cada literal.

a) ¿Cuánto vale la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$? Busca una forma de calcularla sin sumar término a término.

b) Si se tienen los números 1, 2, 3, ..., $n - 3$, $n - 2$ y $n - 1$, ¿cuánto vale la suma de todos ellos?

c) ¿Cuánto vale la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $a_n = a_1 + d(n - 1)$?

d) En la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2n$, ¿cuánto vale la suma de los primeros 10 términos?

Para el literal a, considera también la suma $30 + 29 + 28 + \cdots + 3 + 2 + 1$.

Solución

a) Si se realiza la suma

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & 28 & + & 29 & + & 30 \\ + & 30 & + & 29 & + & 28 & + \cdots + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 31 & + & 31 & + & 31 & + \cdots + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array} \quad \text{------------------ (1)}$$

el resultado es el mismo. En la suma $1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30$ hay 30 términos, por lo que en la suma (1) se está sumando 30 veces el número 31, por lo tanto es igual a 31(30).

Por otra parte, la suma en (1) se obtuvo sumando $1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30$ dos veces, por lo que la suma pedida es igual a $\frac{31(30)}{2}$. Al simplificar, se obtiene

$$\frac{31(30)}{2} = \frac{31(\cancel{30}^{15})}{\cancel{2}_{1}} = 31(15) = 465.$$

Por lo tanto, $1 + 2 + 3 + ... + 28 + 29 + 30 = 465$.

b) Si se utiliza la misma técnica utilizada en la parte a), se tendría

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & n-3 & + & n-2 & + & n-1 \\ + & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + \cdots + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & n & + & n & + & n & + \cdots + & n & + & n & + & n \end{array} \quad \text{------------------ (2)}$$

La suma en (2) tiene $n - 1$ términos, por lo que vale $n(n - 1)$. Pero nuevamente, se ha sumado dos veces $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1$, por lo que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 + n - 2 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) Se colocan los n términos en el nuevo orden

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 \overset{+d}{\curvearrowright} + \; a_2 \overset{+d}{\curvearrowright} + \; a_3 + \cdots + a_{n-2} \overset{+d}{\curvearrowright} + \; a_{n-1} \overset{+d}{\curvearrowright} + \; a_n \\ S_n = & a_n \overset{-d}{\curvearrowright} + \; a_{n-1} \overset{-d}{\curvearrowright} + \; a_{n-2} + \cdots + a_3 \overset{-d}{\curvearrowright} + \; a_2 \overset{-d}{\curvearrowright} + \; a_1 \\ \hline 2S_n = & (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + (a_{n-2} + a_3) + \cdots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

En el último renglón, todas las parejas tienen el mismo valor $a_1 + a_n$ porque en cada suma el primer sumando va aumentando por d y el segundo por $-d$.

Como hay n parejas se tiene $2S_n = n(a_1 + a_n)$. Por lo tanto $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

Si se sustituye $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se tiene que $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n - 1)d]$.

d) Se quieren sumar 10 términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n$, entonces se calcula el primer y décimo término

$$a_1 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_{10} = 1 + 2(10) = 21.$$

Así, la suma de los 10 primeros términos es:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}(10)(3 + 21) = 5(24) = 120.$$

Definición

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es una forma abreviada de escribir la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ y se lee "la sumatoria de a_i desde i igual 1 hasta i igual n".

Bajo esta notación, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)];\text{ con } d \text{ la diferencia de la sucesión.}$$

A esta suma se le conoce como **suma parcial** de una sucesión o **serie**, que en este caso se trata de una sucesión aritmética.

El símbolo Σ es una letra griega que corresponde a la letra mayúscula sigma. Cuando se utiliza para representar una suma se hace referencia a él como "el símbolo de sumatoria".

Problemas

1. Para cada caso, calcula lo que se pide.
   a) La suma de los primeros 21 términos de la sucesión $a_n = -6 + 6n$.
   b) La suma de los primeros 28 términos de la sucesión $a_n = 11 - (n - 1)$.
   c) La suma de los primeros 77 términos de la sucesión $a_n = -4 + 5(n - 1)$.
   d) La suma de los primeros 33 términos de la sucesión $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$.

2. Dos flechas se encuentran dentro de un triángulo y un pentágono de modo que apuntan a los vértices de estos. A continuación se muestran cuatro figuras de la secuencia en la que giran las flechas:

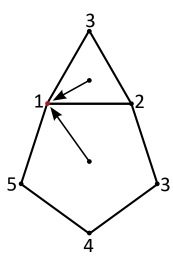


Figura 1

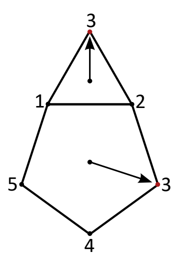


Figura 2

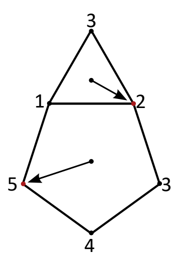


Figura 3

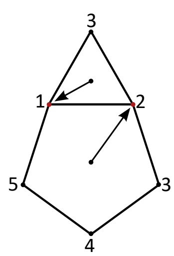


Figura 4

Si las flechas siguen siempre el mismo movimiento, determina el número de figura en la cual las flechas habrán apuntado un mismo vértice por trigésima vez.

Indicador de logro:

1.5 Calcula la suma parcial de una sucesión aritmética.

Secuencia:

Luego de haber establecido el término general de una sucesión aritmética, se deduce la fórmula para calcular la suma parcial de esta.

Propósito:

Primero se calcula la suma de Gauss para los primeros 30 enteros positivos en a) y luego la suma de los primeros $n - 1$ enteros positivos en b), esto último para establecer la fórmula de la suma de Gauss.
Luego, en c) se calcula la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética cualquiera, esta parte para establecer la fórmula de la suma parcial, y por último se calcula la suma parcial para una sucesión en particular, mediante el uso de la fórmula establecida en c).

Solución de problemas:

1a) Para $a_n = -6 + 6n$, se tiene que $a_1 = 0$ y $a_{21} = 120$. Entonces,

$$S_{21} = \sum_{i=1}^{21} a_i = \frac{1}{2}(21)(a_1 + a_{21}) = \frac{1}{2}(21)(0 + 120) = 21(60) = 1\,260.$$

Hay que motivar al estudiante a hacer simplificaciones antes de realizar multiplicaciones. Por otra parte, estos problemas no requieren del uso de la calculadora.

1b) Para $a_n = 11 - (n - 1)$ se tiene que $a_1 = 11$ y $a_{28} = -16$. Entonces,

$$S_{28} = \sum_{i=1}^{28} a_i = \frac{1}{2}(28)(a_1 + a_{28}) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{28})(11 - 16) = 14(-5) = -70.$$

1c) Para $a_n = -4 + 5(n - 1)$ se tiene que $a_1 = -4$ y $a_{77} = 376$. Entonces,

$$S_{77} = \sum_{i=1}^{77} a_i = \frac{1}{2}(77)(a_1 + a_{77}) = \frac{1}{2}(77)(-4 + 376) = \frac{1}{2}(77)(372) = 77(186) = 14\,322.$$

1d) Para $a_n = 0.5 + 2(n - 1)$ se tiene que $a_1 = 0.5$ y $a_{33} = 64.5$. Entonces,

$$S_{33} = \sum_{i=1}^{33} a_i = \frac{1}{2}(33)(a_1 + a_{33}) = \frac{1}{2}(33)(0.5 + 64.5) = \frac{1}{2}(33)(65) = 1\,072.5.$$

2. Se denota con un par ordenado los números hacia los que apuntan ambas flechas, (a, b), donde a denota el número al que apunta la flecha del triángulo y b denota el número al que apunta la flecha del pentágono. Se enlistan algunos elementos de la secuencia para identificar el patrón.

Fig. 1:	$\boxed{(1, 1)}$	Fig. 11:	(3, 1)
Fig. 2:	(3, 3)	Fig. 12:	(2, 3)
Fig. 3:	(2, 5)	Fig. 13:	(1, 5)
Fig. 4:	(1, 2)	Fig. 14:	(3, 2)
Fig. 5:	(3, 4)	Fig. 15:	(2, 4)
Fig. 6:	(2, 1)	Fig. 16:	$\boxed{(1, 1)}$
Fig. 7:	(1, 3)	Fig. 17:	(3, 3)
Fig. 8:	(3, 5)	Fig. 18:	(2, 5)
Fig. 9:	$\boxed{(2, 2)}$	Fig. 19:	(1, 2)
Fig. 10:	(1, 4)	Fig. 20:	(3, 4)

Los elementos encerrados son los que cumplen que ambas flechas han apuntado al mismo vértice. En la Figura 9, las flechas han apuntado al mismo vértice en dos ocasiones; luego, de la Figura 10 a la 24 hay 15 figuras, y además las flechas han apuntado al mismo vértice en dos ocasiones. Luego, en la Figura $a_n = 9 + 15(n - 1)$, las flechas han apuntado $2n$ veces al mismo vértice.

Por lo tanto, en la Figura a_{15} las flechas habrán apuntado por trigésima vez (30 veces) al mismo vértice. Es decir, en la Figura

$$9 + 15(14) = 219.$$

1.6 Sucesiones aritméticas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n - 1)$ deben sumarse para obtener 1 845?

Solución

Como la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es $\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$ se tiene que

$$a_1 = 5 \text{ y } \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\left[2(5) + 2(n-1)\right] = \frac{1}{2}n\left[10 + 2(n-1)\right] = 5n + n(n-1) = n^2 + 4n = 1845.$$

Se ha obtenido una ecuación de grado 2 donde la incógnita es n. Como se desea saber cuántos términos deben sumarse para obtener 1 845, hay que determinar las soluciones de dicha ecuación.

Resolviendo,

$$n(n+4) = 1845 \Rightarrow n^2 + 4n - 1845 = 0 \Rightarrow (n+45)(n-41) = 0.$$

De aquí se tiene que $n = -45$ o $n = 41$. Pero por ser n una posición de la sucesión, este no puede ser negativo, por lo tanto, se deben sumar 41 términos de la sucesión $a_n = 5 + 2(n - 1)$ para obtener 1 845.

Conclusión

Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión aritmética para obtener un resultado específico, debe resolverse la ecuación cuadrática que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina el número de términos que deben sumarse en cada sucesión aritmética para obtener el resultado indicado.

a) $a_n = -1 + (n - 1)$; suma parcial 434

b) $a_n = 3 + 4(n - 1)$; suma parcial 1 081

c) $a_n = -3 + 3(n - 1)$; suma parcial 270

d) $a_n = 5 - 2(n - 1)$; suma parcial -391

e) $a_n = -4 - 7(n - 1)$; suma parcial -129

f) $\sum_{i=1}^{n}\left[-100 + 4(i-1)\right] = 0$

217 es múltiplo de 7.

1 081 y 391 son múltiplos de 23.

2. ¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 1 064?

Carl Friedrich Gauss fue un matemático, físico, astrónomo y geodesta alemán, nació el 30 de abril de 1777 y falleció el 23 de febrero de 1855. Es considerado el príncipe de los matemáticos y desde sus años tempranos mostró extraordinarias pruebas de su habilidad mental. De niño, después de haberle preguntado a varios miembros de su familia sobre la pronunciación de las letras del alfabeto, aprendió a leer por su cuenta.

Gauss ingresó a la escuela cuando alcanzó los 7 años de edad, donde eventualmente se incorporó al curso de Aritmética, estudios en los cuales la mayoría de pupilos permanecían hasta los 15 años, que era la edad en la que terminaban sus estudios obligatorios. En dicho curso ocurrió un evento digno de mencionar, ya que fue de gran influencia para la futura vida de Gauss: en una ocación Büttner, el director de la escuela, quien también era su maestro de Aritmética, dió a la clase el ejercicio de escribir todos los números del 1 al 100 y sumarlos. El problema apenas había sido asignado, cuando Gauss puso la tableta donde escribía sobre la mesa y dijo: ¡Aquí está!, mientras los demás pupilos aún estaban calculando, multiplicando y sumando; en ese momento Büttner vió la tableta de Gauss y encontró escrito un solo número, que era la respuesta correcta.

Gauss estaba en posición de explicar al profesor cómo llegó a este resultado y dijo: “100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, etc., y así tenemos tantos pares como hay en 100. Así, la respuesta es 50 × 101, o 5 050”.

Dunnington, G. W., Gray, J., Fritz-Egbert Dohse. *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathematical Association of America.

Indicador de logro:

1.6 Calcula el número de términos que deben sumarse de una sucesión aritmética si se conoce la suma parcial.

Secuencia:

Luego de haber calculado la suma parcial de sucesiones aritméticas se hace el proceso inverso: conociendo la suma parcial de una sucesión aritmética, se desea encontrar el número de términos que hay que sumar para obtener dicha suma.

Solución de problemas:

En este caso es preferible utilizar la fórmula $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)]$.

1a) Para $a_n = -1 + (n-1)$ se tiene que $a_1 = -1$ y $d = 1$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n[2(-1) + (n-1)] = \frac{1}{2}n(n-3) = 434 \Rightarrow n^2 - 3n - 868 = 0 \Rightarrow (n-31)(n+28) = 0.$$

Entonces, $n = 31$ o $n = -28$. Por lo tanto, hay que sumar 31 términos para obtener una suma de 434.

1b) Para $a_n = 3 + 4(n-1)$ se tiene que $a_1 = 3$ y $d = 4$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(3) + 4(n-1)] = \frac{1}{2}n(4n+2) = 1\,081 \Rightarrow 2n^2 + n - 1081 = 0 \Rightarrow (2n+47)(n-23) = 0.$$

Entonces, $n = -\frac{47}{2}$ o $n = 23$. Por lo tanto, hay que sumar 23 términos para obtener una suma de 1 081.

1c) Para $a_n = -3 + 3(n-1)$ se tiene que $a_1 = -3$ y $d = 3$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(-3) + 3(n-1)] = \frac{1}{2}n(3n-9) = 270 \Rightarrow n^2 - 3n - 180 = 0 \Rightarrow (n+12)(n-15) = 0.$$

Entonces, $n = -12$ o $n = 15$. Por lo tanto, hay que sumar 15 términos para obtener una suma de 270.

1d) Para $a_n = 5 - 2(n-1)$ se tiene que $a_1 = 5$ y $d = -2$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(5) - 2(n-1)] = n(-n+6) = -391 \Rightarrow n^2 - 6n - 391 = 0 \Rightarrow (n+17)(n-23) = 0.$$

Entonces, $n = -17$ o $n = 23$. Por lo tanto, hay que sumar 23 términos para obtener una suma de –391.

1e) Para $a_n = -4 - 7(n-1)$ se tiene que $a_1 = -4$ y $d = -7$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(-4) - 7(n-1)] = \frac{1}{2}n(-7n-1) = -129 \Rightarrow 7n^2 + n - 258 = 0 \Rightarrow (7n+43)(n-6) = 0.$$

Entonces, $n = -\frac{43}{7}$ o $n = 6$. Por lo tanto, hay que sumar 6 términos para obtener una suma de –129.

1f) En este caso, la sucesión está dada por $a_n = -100 + 4(n-1)$ se tiene que $a_1 = -100$ y $d = 4$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(-100) + 4(n-1)] = \frac{1}{2}n(-204 + 4n) = 0 \Rightarrow 2n(n-51) = 0.$$

Entonces, $n = 0$ o $n = 51$. Por lo tanto, hay que sumar 51 términos para que la suma sea 0.

2. Se observa que la sucesión es aritmética, cuyo primer término es $a_1 = 2$ y su diferencia es $d = 6$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2(2) + 6(n-1)] = n(3n-1) = 1\,064 \Rightarrow 3n^2 - n - 1\,064 = 0 \Rightarrow (3n+56)(n-19) = 0.$$

Entonces, $n = -\frac{56}{3}$ o $n = 19$. Por lo tanto, hay que sumar 19 términos para que la suma sea 1 064.

1.7 Sucesiones aritméticas: problemas

Problema inicial

Determina la diferencia de una sucesión aritmética cuyo tercer término es 27 y cuyo quinto término es 35. Calcula el primer término y el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es la sucesión aritmética con diferencia d entonces $a_n = a_1 + d(n-1)$.

De los datos, se tiene que $a_3 = 27$ y $a_5 = 35$. Pero

$$a_3 = a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d = 27,$$
$$a_5 = a_1 + d(5-1) = a_1 + 4d = 35.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 = 35 - 27 = a_1 + 4d - a_1 - 2d &= 2d \\ \Rightarrow 8 &= 2d \\ \Rightarrow d &= 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo $d = 4$ en la primera ecuación $a_1 + 2(4) = 27 \Rightarrow a_1 = 27 - 8 = 19$.
Entonces, el primer término y el término general de la sucesión son

$$a_1 = 19 \text{ y } a_n = 19 + 4(n-1) = 15 + 4n.$$

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión aritmética, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión aritmética y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión aritmética, para determinar el término general se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que resulta de aplicar la definición del término general en cada término conocido.

Problemas

1. El segundo término de una sucesión aritmética es 12 y el cuarto término es 22. Determina el término general de la sucesión.

2. El quinto término de una sucesión aritmética es –11 y el décimo término es –26. Calcula el séptimo término.

3. De una sucesión aritmética se sabe que $a_9 = -5$ y que $a_{15} = 31$. Calcula a_{20}.

4. El octavo término de una sucesión aritmética es 8 y el vigésimo es 44. Determina el término general de la sucesión.

5. Calcula la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética que tiene por séptimo término a –25 y cuyo noveno término es –35.

6. Se tiene que $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 219$ y $a_7 = 34$. Determina el término general a_n de la sucesión aritmética.

7. Dada la sucesión aritmética $a_1 = 43$, $a_2 = 37$, ... , ¿cuál es el primer entero n tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i < 0$?

Indicador de logro:

1.7 Resuelve problemas sobre sucesiones aritméticas si se conocen algunos datos de estas.

Secuencia:

La clase contiene una variedad de problemas que se resuelven mediante sucesiones aritméticas. El tipo de problema más habitual es el de calcular el término general si se conocen dos términos no consecutivos de la sucesión.

Solución de problemas:

1. De los datos, se tiene que $a_2 = 12$ y $a_4 = 22$. Se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado.

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 \\ a_1 + 3d = 22 \end{cases}$$

Al resolverlo se tiene que $a_1 = 7$ y $d = 5$. Por lo tanto,

$a_n = 7 + 5(n - 1) = 5n + 2$.

2. De los datos, se tiene que $a_5 = -11$ y $a_{10} = -26$. Se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado.

$$\begin{cases} a_1 + 4d = -11 \\ a_1 + 9d = -26 \end{cases}$$

Al resolverlo se tiene que $a_1 = 1$ y $d = -3$. Luego, el séptimo término es $a_7 = 1 - 3(6) = -17$.

3. De los datos se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado; al resolverlo se tiene que $a_1 = -53$ y $d = 6$.

$$\begin{cases} a_1 + 8d = -5 \\ a_1 + 14d = 31 \end{cases}$$

Luego, $a_{20} = -53 + 6(19) = 61$.

4. De los datos se tiene que $a_8 = 8$ y $a_{20} = 44$. Se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado.

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 8 \\ a_1 + 19d = 44 \end{cases}$$

Al resolverlo se tiene que $a_1 = -13$ y $d = 3$. Por lo tanto,

$a_n = -13 + 3(n - 1) = 3n - 16$.

5. Basta con calcular el primer término y la diferencia. Con los datos del problema se tiene el sistema de ecuaciones mostrado, que al resolverlo se obtiene que $a_1 = 5$ y $d = -5$.

$$\begin{cases} a_1 + 6d = -25 \\ a_1 + 8d = -35 \end{cases}$$

Luego,

$$S_{10} = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n - 1)] = \frac{1}{2}(10)[2(5) - 5(10 - 1)] = -175.$$

También se puede calcular la diferencia de forma más sencilla. Del séptimo término al noveno hay una distancia de $2d$. Así,

$$2d = a_9 - a_7 = -35 + 25 = -10.$$

Entonces, $d = -5$.

6. Por la propiedad de las sucesiones aritméticas, se tiene que $a_5 + a_{10} = a_6 + a_9 = a_7 + a_8$. Entonces,

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 3(a_7 + a_8) = 219 \Rightarrow a_7 + a_8 = 73.$$

Pero $a_7 = 34$, por lo que $a_8 = 73 - a_7 = 73 - 34 = 39$. Luego, $d = a_8 - a_7 = 39 - 34 = 5$; además,

$$a_7 = a_1 + 5(6) \Rightarrow a_1 = 34 - 30 = 4.$$

Por lo tanto, $a_n = 4 + 5(n - 1) = 5n - 1$.

7. Primero se tiene que $d = a_2 - a_1 = 37 - 43 = -6$. Luego, $\sum_{i=1}^{n} a_i = n[2a_1 + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n(92 - 6n) < 0$.

Es decir, $n(92 - 6n) < 0$. De aquí se tiene que $n < 0$ o bien $92 - 6n < 0$. Pero n es un entero positivo, por lo que $n < 0$ no es posible. Por lo tanto, $92 - 6n < 0$, es decir, $n > \frac{92}{6} = \frac{46}{3} \approx 15.3$.

Por lo tanto, el primer entero que hace que $\sum_{i}^{n} a_i$ sea menor que cero es $n = 16$.

Lección 2 Sucesiones geométricas

2.1 Sucesiones geométricas: definición*

Problema inicial

a) Si el área del cuadrado en la Figura 1 es 1, determina el área sombreada si cada cuadrado se ha dividido en cuatro cuadrados iguales.

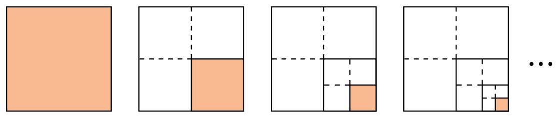


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

b) ¿Qué regla se puede establecer para encontrar el valor del área sombreada en cada figura?
c) De acuerdo al literal b), enlista los 7 primeros términos de la sucesión.
d) Si se divide un término entre su anterior, ¿qué se observa? Realiza este procedimiento al menos tres veces.

Solución

a) Si el área sombreada en la Figura 1 es 1, al haberse dividido en cuatro partes iguales, el área sombreada en la Figura 2 representa la cuarta parte respecto al área sombreada del cuadrado de la Figura 1, es decir, el área sombreada es igual a $\frac{1}{4}$.

De igual forma, el área sombreada en la Figura 3 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 2, por lo que el área sombreada es $\frac{1}{4} \div 4 = \frac{1}{16}$.

Continuando con el mismo análisis, el área sombreada en la Figura 4 es la cuarta parte del cuadrado que está sombreado en la Figura 3, es decir que el área sombreada es $\frac{1}{16} \div 4 = \frac{1}{64}$.

b) Para encontrar el área sombreada en una figura se puede dividir entre 4 el valor del área sombreada de la figura anterior.

c) Se puede elaborar una tabla para enlistar los elementos que tiene cada figura.

Término	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Valor del área	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1\,024}$	$\frac{1}{4\,096}$

d) Al dividir un término entre su anterior se tiene

$$a_2 \div a_1 = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4} \qquad a_7 \div a_6 = \frac{1}{4\,096} \div \frac{1}{1\,024} = \frac{1}{4} \qquad a_5 \div a_4 = \frac{1}{256} \div \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

Se puede observar entonces que siempre se obtiene el mismo resultado: $\frac{1}{4}$.

Conclusión

Una sucesión donde sus términos pueden obtenerse multiplicando por un mismo número el término anterior se llama **sucesión geométrica**.

Una sucesión geométrica tiene la propiedad que al dividir un término entre su anterior, el resultado siempre es el mismo. A este resultado se le llama **razón**.

Problemas

Determina si las siguientes sucesiones son geométricas. En caso de serlo, especifica la razón.

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
b) 1, 3, 9, 27, 81, ...
c) 3, –6, 12, –24, 48, –96, ...
d) –1, –2, –4, –6, –8, –10, ...

Indicador de logro:

2.1 Determina si una sucesión es geométrica utilizando su definición.

Secuencia:

Se inicia la clase con el análisis de una secuencia de figuras en las cuales se analiza el área sombreada de cada una de ellas, relacionándola con el área de la figura anterior. La sucesión de las áreas resulta ser una sucesión geométrica. Se establece la definición de una sucesión geométrica y su razón.

Solución de problemas:

a) Se observa que $4 \div 2 = 2$, pero $6 \div 4 = \frac{3}{2} \neq 2$. Como la razón no es la misma en ambas, la sucesión no es geométrica.

b) Se observa que $3 \div 1 = 9 \div 3 = 27 \div 9 = 81 \div 27 = 3$. Como la razón es siempre la misma, la sucesión es geométrica, con razón igual a 3.

c) Se observa que $-6 \div 3 = 12 \div (-6) = -24 \div 12 = 48 \div (-24) = -96 \div 48 = -2$. Como la razón es siempre la misma, la sucesión es geométrica, con razón igual a -2.

d) Se observa que $-10 \div (-8) = \frac{5}{4}$, $-8 \div (-6) = \frac{4}{3}$. Como la razón no es la misma, la sucesión no es geométrica.

2.2 Sucesiones geométricas: término general*

Problema inicial

Encuentra el término general de la sucesión geométrica de la clase 2.1.

Solución

Se sabe que si a_{n-1} es el término $n-1$, a_n es el siguiente término. Como cada término de la sucesión geométrica se obtiene multiplicando por $\frac{1}{4}$ el término anterior, se tiene que

$$\underbrace{\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times 1}_{a_2=\frac{1}{4}\times a_1},\qquad \underbrace{\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}_{a_3=\frac{1}{4}\times a_2},\qquad \underbrace{\frac{1}{64}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}}_{a_4=\frac{1}{4}\times a_3},\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

Es decir,

$$a_2=\frac{1}{4}\times a_1,\quad a_3=\frac{1}{4}\times a_2,\quad a_4=\frac{1}{4}\times a_3,\ \ldots,\quad a_{n-2}=\frac{1}{4}\times a_{n-3},\quad a_{n-1}=\frac{1}{4}\times a_{n-2},\quad a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}$$

Se desea encontrar una fórmula que describa la sucesión en términos de la posición que ocupa un elemento. Nótese que,

$$a_n=\frac{1}{4}\times a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-2}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-3}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\times a_{n-4}$$

Si se continúa de ese modo,

$$a_n=\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}}_{n-4}\Big)\times a_4=\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}}_{n-3}\Big)\times a_3=\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}}_{n-2}\Big)\times a_2=\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{4}}_{n-1}\Big)\times a_1$$

Entonces, a_n es igual al primer término multiplicado por el producto de $n-1$ veces la razón $\frac{1}{4}$; es decir, que el término general de la sucesión geométrica es $a_n=a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, donde $a_1=1$.

Conclusión

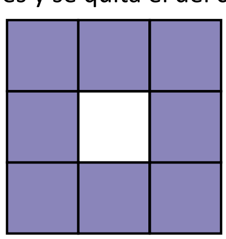
En una sucesión geométrica, si r es su razón, su término general está dado por $a_n=a_1r^{n-1}$.

Problemas

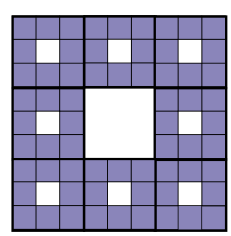
1. Establece el término general de las sucesiones geométricas del problema de la clase 2.1.

2. Observa el siguiente proceso:

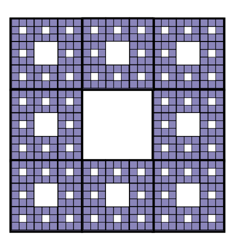
Paso 1. Se divide un cuadrado de lado 1 en 9 partes iguales y se quita el del centro.



Paso 2. De cada cuadrado que queda, se divide en 9 partes iguales y se quita el cuadrado del centro de cada uno de ellos.



Paso 3. Se realiza el mismo proceso con los cuadrados que quedan, dividiéndolos en 9 partes iguales y quitando el del medio.



Si se sigue de ese modo, determina el valor del área del cuadrado más pequeño en el que queda dividido el cuadrado inicial, después de haber realizado el proceso n veces. A esta figura se le conoce con el nombre de **Alfombra de Sierpinski**.

Indicador de logro:

2.2 Encuentra el término general de una sucesión geométrica.

Secuencia:

En esta clase se deduce el término general de una sucesión geométrica mediante un caso particular. Luego, se establece el término general para una razón r cualquiera.

Propósito:

La idea es utilizar la definición de sucesión geométrica (observe el primer párrafo de la Solución), para luego comenzar a hacer sustituciones sucesivas a partir del término n–ésimo hasta llegar a una relación con el término a_1 (observe el tercer y cuarto párrafo de la Solución).

Solución de problemas:

1a) No es sucesión geométrica

1b) $a_n = 3^{n-1}$

1c) $3(-2)^{n-1}$

1d) No es sucesión geométrica

2. Se analiza el área de cada cuadrado en cada paso.

Paso 1. Como el cuadrado tiene lado 1, su área es 1. Entonces, al dividirlo en 9 partes iguales, se obtienen 9 áreas iguales; es decir, el área de cada cuadrado es $\frac{1}{9}$.

Paso 2. Del paso 1, cada cuadrado tiene $\frac{1}{9}$ de área. Entonces, al dividir uno de estos cuadrados en 9 partes iguales se tiene que cada área vale $\frac{1}{9} \div 9 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^2}$.

Paso 3. Del paso 2, cada cuadrado tiene $\frac{1}{9^2}$ de área. Entonces, al dividir uno de estos cuadrados en 9 partes iguales se tiene que cada área vale $\frac{1}{9^2} \div 9 = \frac{1}{9^2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^3}$.

Paso 4. Siguiendo la misma idea de los pasos anteriores, al dividir uno de los cuadrados del paso 3 en 9 partes iguales se tiene que cada área vale $\frac{1}{9^3} \div 9 = \frac{1}{9^3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^4}$.

En este punto se puede observar una secuencia. El área de cada cuadrado en cada paso es $\frac{1}{9^n} = \left(\frac{1}{9}\right)^n$, donde n es el número de paso.

2.3 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 1

Problema inicial

1. Sea $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$. Calcula el valor de $S - rS$ y determina otra expresión para S.
2. Calcula la suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión geométrica $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Solución

1. Se tiene que $S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}$ se multiplica por r toda la expresión y se obtiene $rS = r(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n$.

   Si se resta rS de S se obtiene

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \ldots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} \\ rS = & \phantom{1 +{}} \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \ldots + \cancel{r^{n-3}} + \cancel{r^{n-2}} + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ \hline S - rS = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - r^n \end{array}$$

   Por lo que $S(1 - r) = 1 - r^n$. Si $r \neq 1$, se despeja S y se tiene que $S = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$.
   Es decir, si $r \neq 1$, $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Si $r = 1$ la suma significa sumar n veces 1 por lo que $S = n$.

2. Al enlistar los primeros n términos de la sucesión

$$a_1,\ a_2 = ra_1,\ a_3 = r^2a_1,\ a_4 = r^3a_1,\ \ldots,\ a_{n-2} = r^{n-3}a_1,\ a_{n-1} = r^{n-2}a_1,\ a_n = r^{n-1}a_1.$$

   Y calcular la suma

$$\begin{aligned} a_1 + ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \ldots + r^{n-3}a_1 + r^{n-2}a_1 + r^{n-1}a_1 &= a_1(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}) \\ &= a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \quad \text{si } r \neq 1. \end{aligned}$$

   Si $r = 1$, entonces la suma es na_1.

3. Utilizando el resultado de 2, como se quiere calcular la suma de los primeros 5 términos, $n = 5$, además $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{4}$, entonces la suma buscada es

$$1\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5 - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right) = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{4}} = \frac{1023}{1024} \div \frac{3}{4} = \frac{341}{256}.$$

La fracción compleja se calcula como

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Unidad 6

Conclusión

La suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = a_1 r^{n-1}$, escrita con el símbolo de sumatoria, está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^n = \begin{cases} a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) & \text{si } r \neq 1 \\ na_1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Problemas

1. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 15(2)^{n-1}$.
2. Calcula la suma de los primeros 6 términos de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$.
3. Calcula la suma de los primeros 5 términos de la sucesión $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$
4. Calcula la suma $2 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{18}\right) + \cdots$ hasta el término 5. Deja expresado con exponentes.

Puede utilizarse la calculadora cuando hay que efectuar potencias grandes. También es recomendable dejar la respuesta expresada en fracción y no aproximar.

Indicador de logro:

2.3 Calcula la suma parcial de una sucesión geométrica.

Secuencia:

Luego de haber establecido el término general de una sucesión geométrica, se deduce la fórmula para calcular la suma parcial de esta.

Propósito:

Para deducir la fórmula de la suma parcial de una sucesión geométrica se calcula primero la suma de las primeras n potencias de un número r. La técnica para calcular esta suma es la tradicional técnica de restarle a la suma, la suma misma multiplicada por r; al realizar esta resta, se cancelan todos los términos excepto el primero y el último. Luego se calcula la suma parcial de una sucesión geométrica con término a_1 cualquiera utilizando el resultado anterior. Finalmente, en el último numeral del Problema inicial se muestra la forma de utilizar la fórmula deducida en el numeral 2.

Solución de problemas:

1. Como $r \neq 1$, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{6} a_i = a_1\left(\frac{r^6 - 1}{r - 1}\right) = 15\left(\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\right) = 15(63) = 945.$$

2. Como $r \neq 1$, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{6} a_i = a_1\left(\frac{r^6 - 1}{r - 1}\right) = 3\left(\frac{(-2)^6 - 1}{-2 - 1}\right) = 3\left(-\frac{63}{3}\right) = -63.$$

3. La sucesión es geométrica con razón $r = -\frac{1}{3}$, entonces,

$$S_n = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1\left(\frac{r^5 - 1}{r - 1}\right) = 4\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right) \div \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 4\left(-\frac{244}{243}\right) \div \left(-\frac{4}{3}\right) = 4\left(-\frac{244}{243}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{244}{81}.$$

4. La sucesión es geométrica con razón $r = -\frac{1}{6}$, entonces,

$$S_n = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1\left(\frac{r^5 - 1}{r - 1}\right) = 2\left(\left(-\frac{1}{6}\right)^5 - 1\right) \div \left(-\frac{1}{6} - 1\right) = 2\left(-\frac{7\,777}{6^5}\right) \div \left(-\frac{7}{6}\right) = 2\left(-\frac{7\,777}{6^5}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right) = 2\left(\frac{1\,111}{6^4}\right) = \frac{1\,111}{648}.$$

Fe de errata: en la conclusión la suma se debe expresar de la siguiente forma:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}$$

2.4 Sucesiones geométricas: suma parcial, parte 2

Problema inicial

¿Cuántos términos de la sucesión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y razón –4 deben sumarse para obtener 102.5?

Solución

Se sabe que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4)^n - 1}{-4-1}\right) = 102.5.$

Entonces

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-4)^n}{5}\right) = \frac{1}{10}\left[1-(-4)^n\right] = 102.5$$
$$\Rightarrow 1-(-4)^n = 102.5(10) = 1\,025$$
$$\Rightarrow \quad (-4)^n = -1\,024 \qquad \text{------------------ (1)}$$

Un primer análisis que puede hacerse es que, se tiene la potencia de un número negativo y este resulta ser negativo, por lo tanto, n debe ser impar. Como n es impar, $(-4)^n = -4^n$, por lo que resolver (1) es equivalente a resolver $4^n = 1\,024$.

Se escribe 1 024 como potencia de 4: $1\,024 = 4^5$. Al sustituir se obtiene $4^n = 4^5$. Entonces $n = 5$.

Por lo tanto, deben sumarse los primeros 5 términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2}(-4)^{n-1}$ para obtener 102.5.

Conclusión

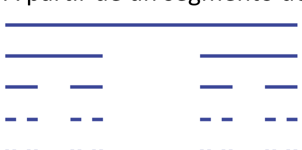
Para determinar el número de términos que deben sumarse de una sucesión geométrica para obtener un resultado específico debe resolverse la ecuación exponencial que resulta de igualar la fórmula de la suma parcial con el total que se desea.

Problemas

1. Determina cuántos términos deben sumarse de cada sucesión para obtener el resultado indicado
   a) 1, 2, 4, 8, 16, ..., suma parcial 511
   b) 2, 6, 18, 54, ..., suma parcial 2 186
   c) 4, –20, 100, – 500, ..., suma parcial –10 416
   d) $a_n = \frac{1}{3}(2^{n-1})$, suma parcial $\frac{127}{3}$
   e) $a_n = \frac{2}{3}(-3)^{n-1}$, suma parcial $-\frac{364}{3}$
   f) $a_n = 3\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$, suma parcial $\frac{6\,303}{2\,401}$

2. Determina los posibles valores que pueden obtenerse al calcular una suma parcial de la sucesión 1, –1, 1, –1, 1, ...

3. A partir de un segmento de longitud 1 se construye la siguiente sucesión:



Paso 1. Se divide el segmento en tres partes iguales y se extrae el segmento del medio. Se tienen dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$.
Paso 2. Luego se dividen los otros dos segmentos en tres partes iguales y se extraen los segmentos del medio. Se tienen cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{9}$.

Si se continúa este proceso, responde:
a) En el paso n, ¿cuántos segmentos se han extraído?
b) ¿Cuál es la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen en el paso 10?
c) ¿En qué paso la suma de las longitudes de los segmentos que se tienen es menor a 0.1?

Indicador de logro:

2.4 Determina el número de términos que deben sumarse de una sucesión geométrica para obtener una suma específica.

Secuencia:

Luego de haber calculado la suma parcial de sucesiones geométricas se hace el proceso inverso: conociendo la suma parcial de una sucesión geométrica, se desea encontrar el número de términos que hay que sumar para obtener dicha suma.

Solución de problemas:

1a) La sucesión es geométrica con razón $r = 2$ y $a_1 = 1$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 511 \Rightarrow 2^n - 1 = 511 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9.$$

Por lo tanto, hay que sumar 9 términos para obtener 511.

1b) $2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = 2\,186 \Rightarrow 3^n = 2\,187 \Rightarrow 3^n = 3^7 \Rightarrow n = 7$

Hay que sumar 7 términos para obtener 2 186.

1c) $4\left(\frac{(-5)^n - 1}{-5 - 1}\right) = -10\,416 \Rightarrow (-5)^n = 5^6 \Rightarrow n = 6$

Hay que sumar 6 términos.

1d) $\frac{1}{3}\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = \frac{127}{3} \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$

Hay que sumar 7 términos.

1e) $\frac{2}{3}\left(\frac{(-3)^n - 1}{-3 - 1}\right) = -\frac{364}{3} \Rightarrow (-3)^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$

Hay que sumar 6 términos.

1f) $3\left(\left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1\right) \div \left(-\frac{1}{7} - 1\right) = 3\left(\left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1\right) \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{6\,303}{2\,401} \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)^n - 1 = -\frac{2\,101}{2\,401} \times \frac{8}{7} \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right)^n = -\frac{1}{16\,807} = -\frac{1}{7^5}$

$\Rightarrow n = 5$

2. Al sumar algunos términos: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Se van anulando los términos consecutivos, por lo que la suma vale 0 si se suma un número par de términos y vale 1 si se suma un número impar de términos.

3a) Se busca relacionar el número de pasos con el número de segmentos extraídos y el número de segmentos obtenidos.

En el Paso 1 se ha extraído un segmento y quedan 2 segmentos después de extraerlo.

En el Paso 2 se extraen 2 segmentos; estos dos segmentos, más el segmento extraído en el paso anterior, se tienen 3 segmentos extraídos. Luego, por cada segmento que se tenía del paso anterior se obtienen dos segmentos nuevos; por tanto, se tienen $2 \times 2 = 4$ segmentos en el Paso 2.

En el Paso 3, el número de segmentos que se extraen es igual al número de segmentos que se tienen, es decir, 4. Luego, el número de segmentos extraídos hasta este paso es $3 + 4$ (segmentos extraídos en el paso anterior más los segmentos extraídos en el paso actual).

Al construir una tabla con estos datos, se observa lo siguiente:

Paso	Segmentos extraídos	Segmentos obtenidos
1	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$
2	$3 = 1 + 2^1 = 1 + 2^1$	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$7 = 3 + 4 = 1 + 2^1 + 2^2$	$2 \times 4 = 8 = 2^3$
4	$15 = 7 + 8 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	$2 \times 8 = 16 = 2^4$
5	$31 = 15 + 16 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$	$2 \times 16 = 32 = 2^5$

Entonces, los segmentos extraídos en el Paso n es igual a $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1}$. Esta suma es igual a $\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$.

3b) Se sabe que los segmentos que se tienen en el Paso 1 tienen longitud de $\frac{1}{3}$. Luego, los segmentos del Paso 2 tienen longitud de $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$. En el Paso 3, los segmentos tienen longitud de $\frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^3}$. Por tanto, en el Paso 10, los segmentos tienen longitud de $\frac{1}{3^{10}}$.

En cada paso, todos los segmentos tienen la misma longitud, por lo que la suma de las longitudes del Paso 10 es igual al número de segmentos que hay en dicho paso por la longitud de cada uno de ellos. Es decir,

$$2^{10} \times \frac{1}{3^{10}} = \frac{2^{10}}{3^{10}}.$$

El estudiante puede calcular esta cantidad, sin embargo, es preferible dejarlo indicado.

3c) De acuerdo a 3b), la suma de las longitudes de los segmentos del Paso n es igual a $\frac{2^n}{3^n}$. Entonces,

$$\frac{2^n}{3^n} < 0.1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10.$$

Para calcular el valor de n se utiliza la función logaritmo base 10. $f(x) = \log x$ es creciente, por lo que

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^n > 10 &\Rightarrow \log\left(\frac{3}{2}\right)^n > \log 10\\ &\Rightarrow n\log\left(\frac{3}{2}\right) > 1\\ &\Rightarrow n > 1 \div \log\left(\frac{3}{2}\right) = 5.6788...\end{aligned}$$

Es decir, n debe ser mayor que 5.6788... Por lo tanto, la suma de las longitudes de los segmentos será menor que 0.1 en el Paso 6.

2.5 Sucesiones geométricas: problemas

Problema inicial

El tercer término de una sucesión geométrica es 20 y el octavo término es –640. Determina el término general de la sucesión.

Solución

Si a_n es el término general de la sucesión geométrica y r su razón entonces $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Se sabe que $a_3 = 20$ y $a_8 = -640$. Pero $a_3 = a_1 r^2 = 20$ y $a_8 = a_1 r^7 = -640$. Si se divide a_8 entre a_3 se tiene

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^2} = r^5 = \frac{-640}{20} = -32.$$

De $r^5 = -32$ puede deducirse que $r = -2$, ya que $(-2)^5 = -32$.

Falta calcular el primer término de la sucesión, y para ello se toma a_3 o a_8 y se utiliza el hecho que $r = -2$.

$$a_3 = a_1(-2)^2 = 4a_1 = 20 \Rightarrow a_1 = 5.$$

Por lo tanto, $a_n = 5(-2)^{n-1}$.

Conclusión

En ocasiones se conocen algunos datos de una sucesión geométrica, y para determinar el término general de esta, se utiliza la definición de sucesión geométrica y los datos conocidos.

Si se conocen dos términos de la sucesión geométrica, para determinar el término general se dividen ambos términos y se resuelve la ecuación que resulta. En este caso, la ecuación es de la forma $r^n = c$, por lo que hay que calcular un número r tal que al elevarlo a la potencia n resulte el número c.

Problemas

1. El cuarto término de una sucesión geométrica es 1 y el séptimo término es $\frac{1}{8}$. Determina el término general y el quinto término.

2. El primer término de una sucesión geométrica es 3 y el tercer término es $\frac{4}{3}$. Determina el término general y el cuarto término.

   Hay dos posibles soluciones.

3. En una sucesión geométrica, el quinto término es 48 y el octavo es 384. Determina el décimo segundo término.

4. ¿Qué término de la sucesión geométrica 2, 6, 18, ... es 13 122?

5. El segundo y quinto término de una sucesión geométrica son 10 y 1 250, respectivamente. ¿Es 31 250 un término de esta sucesión? Si es así, ¿qué término es?

6. Calcula la suma parcial de los primeros 6 términos de la sucesión geométrica cuyo tercer término es 28 y su sexto término es 224.

Unidad 6

Indicador de logro:

2.5 Resuelve problemas sobre sucesiones geométricas si se conocen algunos datos de estas.

Solución de problemas:

1. $\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1r^6}{a_1r^3} = r^3 = \frac{1}{8} \div 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$. Luego, $a_4 = a_1r^3 \Rightarrow 1 = a_1\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow a_1 = 8$. Entonces, $a_5 = a_1r^4 = 8\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}$.

Además, el término general es $a_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$.

2. Como $a_1 = 3$ y $a_3 = \frac{4}{3}$, entonces $\frac{a_3}{a_1} = r^2 = \frac{4}{3} \div 3 = \frac{4}{9}$. Por lo tanto, $r = \pm\frac{2}{3}$.

- Si $r = \frac{2}{3}$, entonces $a_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ y $a_4 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$.
- Si $r = -\frac{2}{3}$, entonces $a_n = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ y $a_4 = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{9}$.

3. Como $a_5 = 48$ y $a_8 = 384$, entonces $\frac{a_8}{a_5} = r^3 = 384 \div 48 = 8$. Por lo tanto, $r = 2$.

Luego, como $\frac{a_{12}}{a_8} = r^4 = 16$, entonces $a_{12} = 16(384) = 6\,144$.

En el problema 3, también puede resolverse calculando el término general primero y luego calcular a_{12}.

4. La sucesión es geométrica cuyo primer término es 2 y su razón es 3. Entonces,

$$a_n = 2(3)^{n-1} = 13\,122 \Rightarrow 3^{n-1} = 6\,561 = 3^8 \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9.$$

Por lo tanto, 13 122 es el noveno término.

5. Como $a_2 = 10$ y $a_5 = 1\,250$, entonces $\frac{a_5}{a_2} = r^3 = 1\,250 \div 10 = 125$. Por lo tanto, $r = 5$.

Por otra parte, $a_2 = a_1(5)$, es decir, $10 = 5a_1$, por lo que $a_1 = 2$. Entonces,

$$a_n = 2(5)^{n-1} = 31\,250 \Rightarrow (5)^{n-1} = 15\,625 = 5^6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7.$$

Por lo tanto, 31 250 es el séptimo término de la sucesión.

6. Como $a_3 = 28$ y $a_6 = 224$, entonces $\frac{a_6}{a_3} = r^3 = 224 \div 28 = 8$. Por lo tanto, $r = 2$. Además, $a_3 = 28 = a_1(2^2)$, por lo que $a_1 = 7$. Por lo tanto,

$$S_6 = a_1\left(\frac{r^6 - 1}{r - 1}\right) = 7\left(\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\right) = 7(63) = 441.$$

2.6 Practica lo aprendido

1. Determina el término general de la sucesión 1, 4, 7, 10, ...

2. Calcula el término 30 de la sucesión aritmética que tiene primer término 2 y diferencia 3.

3. ¿Cuál es el primer término de una sucesión aritmética a_n tal que $a_{50} = 29$ y $d = -3$?

4. Calcula la suma de los primeros 17 términos de $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n - 1)$.

5. Calcula la suma de los primeros 12 términos de $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}n$.

6. Calcula la suma $5 + 9 + 13 + \cdots + 401$.

7. ¿Cuántos términos deben sumarse de la sucesión –9, –6, –3, ... para obtener 66?

8. ¿Cuántos términos deben sumarse de la sucesión 26, 21, 16, ... para obtener 74?

9. Calcula el término 6 de la sucesión 3, 6, 12, 24, ...

10. El término 7 de una sucesión geométrica es 192 y su razón es 2. Calcula los primeros cuatro términos de la sucesión.

11. En una sucesión geométrica se tiene que $a_8 = 16$, $r = -4$. Determina el valor de a_{12}.

12. Calcula la suma $3 + 6 + 12 + \cdots + 6\,144$.

13. ¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión $a_n = 3(-2)^{n-1}$ para obtener 2 049?

14. ¿Cuántos términos hay que sumar de la sucesión del problema 11 para obtener $-\frac{3\,277}{1\,024}$?

2.7 Problemas de la unidad

1. Los ángulos internos de un triángulo están en sucesión aritmética con diferencia 10°. ¿Cuánto mide cada ángulo?

2. El cuarto término de una sucesión aritmética es 10 y el sexto término es 16. Determina una expresión para el término n-ésimo de la sucesión.

3. El quinto término de una sucesión aritmética es 17 y su diferencia es 2. Determina la suma de los primeros 11 términos de la sucesión.

4. Si el término 6 de una sucesión aritmética es 8 y el término 11 es –2, ¿cuál es el primer término?, ¿cuál es la diferencia?

5. ¿Cuántos términos de la sucesión 2, 8, 14, ... hay que sumar para obtener 290?

6. Una deuda puede ser pagada en 32 semanas pagando \$5 la primera semana, \$8 la segunda semana, \$11 la tercera, y así sucesivamente. Hallar la cantidad de dinero que se debe.

7. Sean a y b las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + A = 0$, y sean c y d las soluciones de la ecuación $x^2 - 12x + B = 0$. Se sabe que a, b, c y d forman, en ese orden, una sucesión geométrica. Determina los valores de A y B.

Indicador de logro:

2.6 Resuelve problemas correspondientes a sucesiones aritméticas y geométricas.

Solución de problemas:

1. Cada término puede obtenerse sumando 3 al término anterior. Entonces, la sucesión es aritmética con diferencia 3 y primer término 1. Por lo tanto, $a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$.

2. El término general es $a_n = 2 + 3(n - 1)$. Entonces $a_{30} = 2 + 3(29) = 89$.

3. $a_{50} = a_1 - 3(49) = 29 \Rightarrow a_1 = 176$.

4. $a_1 = 2$ y $d = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$S_{17} = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n - 1)d] = \frac{1}{2}(17)\left(4 + \frac{1}{2}(16)\right) = 17(6) = 102.$$

5. $a_1 = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{3}{4}$. Entonces,

$$S_{12} = \frac{1}{2}(12)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(11)\right) = (6)\left(\frac{35}{4}\right) = \frac{105}{2}.$$

6. La serie es aritmética ya que sus términos pertenecen a una sucesión aritmética de primer término 5 y diferencia 4. Para calcular la suma falta conocer cuántos elementos se están sumando. Entonces,

$$5 + 4(n - 1) = 401 \Rightarrow n - 1 = 99 \Rightarrow n = 100.$$

Por tanto, $5 + 9 + 13 + \cdots + 401 = \frac{1}{2}(100)(5 + 401) = 50(406) = 20\,300$.

7. La sucesión es aritmética, con diferencia $d = 3$ y primer término $a_1 = -9$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[2a_1 + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[-18 + 3(n - 1)] = 66 \Rightarrow n(n - 7) = 44 \Rightarrow n^2 - 7n - 44 = 0 \Rightarrow (n - 11)(n + 4) = 0.$$

Entonces, $n = 11$ o $n = -4$. Por lo tanto, se deben sumar 11 términos para obtener 66.

8. $a_n = 26 - 5(n - 1)$. Entonces,

$$\frac{1}{2}n[52 - 5(n - 1)] = 74 \Rightarrow n(57 - 5n) = 148 \Rightarrow 5n^2 - 57n + 148 = 0 \Rightarrow (5n - 37)(n - 4) = 0.$$

Entonces, $n = \frac{37}{5}$ o $n = 4$. Pero $\frac{37}{5}$ no es entero, por lo tanto, se deben sumar 4 términos para obtener 74.

9. La sucesión es geométrica con primer término 3 y razón 2. Por lo tanto, $a_n = 3(2^{n-1})$. Luego, $a_6 = 3(2^5) = 96$.

10. De los datos se tiene que $a_7 = 192 = a_1(2^6)$; es decir, $a_1 = 3$. Por tanto, $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \times 2 = 6$, $a_3 = 6 \times 2 = 12$ y $a_4 = 12 \times 2 = 24$.

11. $\frac{a_{12}}{a_8} = \frac{a_1 r^{11}}{a_1 r^7} = r^4 = (-4)^4 \Rightarrow a_{12} = (-4)^4 a_8 = (-4)^4(16) = 4\,096$.

En el problema 10 se ha utilizado la propiedad de las sucesiones geométricas: un término puede obtenerse multiplicando el término anterior por la razón.

12. La suma es de la sucesión geométrica del problema 9. Calculando qué término es 6 144:

$$a_n = 3(2^{n-1}) = 6\,144 = 3 \times 2^{11} \Rightarrow n - 1 = 11 \Rightarrow n = 12.$$

Luego, $S_{12} = a_1\left(\frac{r^{12}-1}{r-1}\right) = 3\left(\frac{2^{12}-1}{2-1}\right) = 3(2^{12} - 1)$.

Este resultado puede quedar expresado con el exponente, pero también puede calcularse utilizando propiedades de diferencias de cuadrados:

$$3(2^{12} - 1) = 3(2^6 - 1)(2^6 + 1) = 3(2^3 - 1)(2^3 + 1)(2^6 + 1) = 3(8 - 1)(8 + 1)(64 + 1) = 3(7)(9)(65) = 12\,285.$$

Por tanto, $S_{12} = 3(2^{12} - 1) = 12\,285$.

Motivar al estudiante a que calcule $2^{12} - 1$ sin utilizar la calculadora y sin desarrollar 2^{12}.

13. $S_n = 3\left(\frac{(-2)^n - 1}{-2-1}\right) = 2\,049 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -2\,049 \Rightarrow (-2)^n = -2\,048 \Rightarrow (-2)^n = -2^{11} \Rightarrow n = 11.$

14. Hay que calcular a_1:

$$a_8 = a_1(-4)^7 \Rightarrow 16 = a_1(-4)^7 \Rightarrow a_1 = -\frac{16}{16\,384} = -\frac{1}{1\,024}.$$

Luego,
$$\begin{aligned} S_n = -\frac{1}{1\,024}\left(\frac{(-4)^n - 1}{-4-1}\right) = -\frac{3\,277}{1\,024} &\Rightarrow \frac{(-4)^n - 1}{5} = -3\,277 \\ &\Rightarrow (-4)^n - 1 = -16\,385 \\ &\Rightarrow (-4)^n = -16\,384 \\ &\Rightarrow (-4)^n = -4^7 \\ &\Rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay que sumar 7 términos.

Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas correspondientes a sucesiones aritméticas y geométricas.

Solución de problemas:

1. Sean a_1, a_2 y a_3 los tres ángulos del triángulo. Entonces $a_1 + a_2 + a_3 = 180°$. Por otra parte, a_1, a_2 y a_3 cumplen que $a_2 = a_1 + 10°$ y $a_3 = a_1 + 20°$. Por lo tanto,

$a_1 + a_2 + a_3 = 180° \Rightarrow a_1 + (a_1 + 10°) + (a_1 + 20°) = 180° \Rightarrow 3a_1 + 30° = 180° \Rightarrow 3a_1 + 30° = 180° \Rightarrow 3a_1 = 150°$.

Entonces, $a_1 = 50°$, $a_2 = 60°$ y $a_3 = 70°$.

2. $a_4 = 10$ y $a_6 = 16$. Como $a_6 - a_4 = 16 - 10 = 6 = 2d$, entonces $d = 3$. Por otra parte, $a_4 = a_1 + 3d$, por lo que $a_1 = a_4 - 3d = 10 - 9 = 1$.

Por lo tanto, $a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$.

3. Como $a_5 = 17$ y $d = 2$, entonces $a_1 = a_5 - 2(4) = 17 - 8 = 9$. Entonces,

$$S_{11} = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}(11)\Big(18 + 2(10)\Big) = 11(19) = 209.$$

4. Como $a_6 = 8$ y $a_{11} = -2$, entonces $a_{11} - a_6 = -2 - 8 = -10 = a_1 + 10d - (a_1 + 5d) = 5d$, entonces $d = -2$. Luego, $a_6 = a_1 + 5d \;\Rightarrow\; a_1 = a_6 - 5d = 8 + 10 = 18$.

Por lo tanto, el primer término es 18 y la diferencia es -2.

5. La sucesión es aritmética, con primer término 2 y diferencia 6. Entonces,

$$S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + d(n-1)] = \frac{1}{2}n\Big(4 + 6(n-1)\Big) = n(3n-1) = 290.$$

Es decir, $3n^2 - n - 290 = (3n + 29)(n - 10) = 0$. Entonces, $n = -\frac{29}{3}$ o $n = 10$. Por lo tanto, hay que sumar 10 términos para obtener 290.

6. La sucesión 5, 8, 11, ... es una sucesión aritmética de diferencia 3. Para determinar el total de la deuda, hay que calcular S_{32} para $a_n = 5 + 3(n - 1)$.

$$S_{32} = \frac{1}{2}(32)(10 + 3(31)) = 16(103) = 1\,648.$$

Por tanto, la deuda es de 1,648 dólares.

7. Como a y b son soluciones de $x^2 - 3x + A = 0$, entonces, $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - 3x + A$. Es decir, $a + b = 3$ y $ab = A$. De igual forma se deduce para c y d: cumplen que $c + d = 12$ y $cd = B$. Por otra parte, a, b, c y d forman una sucesión geométrica; suponiendo que la razón de la sucesión es r, entonces, $b = ar$, $c = ar^2$ y $d = ar^3$.

Si se sustituye esto último en $a + b = 3$ y $c + d = 12$ se obtiene lo siguiente:

$$a + b = 3 \;\Rightarrow\; a + ar = 3 \;\Rightarrow\; a(1 + r) = 3,$$
$$c + d = 12 \;\Rightarrow\; ar^2 + ar^3 = 12 \;\Rightarrow\; ar^2(1 + r) = 12.$$

De las ecuaciones se observa que $a \neq 0$ y $r \neq -1$, se puede dividir la segunda ecuación entre la primera y se tiene que

$$\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{12}{3} = 4 \;\Rightarrow\; r^2 = 4 \;\Rightarrow\; r = \pm 2.$$

- Si $r = 2$, entonces de $a(1 + r) = 3$ se tiene $a = 1$. Entonces $b = ar = 2$, $c = ar^2 = 4$ y $d = ar^3 = 8$.
  Por lo tanto, $A = ab = 2$ y $B = cd = 32$.
- Si $r = -2$, entonces de $a(1 + r) = 3$ se tiene $a = -3$. Entonces $b = ar = 6$, $c = ar^2 = -12$ y $d = ar^3 = 24$.
  Por lo tanto, $A = ab = -18$ y $B = cd = -288$.

Unidad 7. Métodos de conteo

Competencia de la unidad

Plantear estrategias para realizar conteos sobre diferentes situaciones del entorno, utilizando los principios básicos de conteo, las permutaciones y combinaciones.

Relación y desarrollo

Segundo año de bachillerato

Unidad 7: Métodos de conteo

- Teoría de conjuntos
- Las permutaciones
- Las combinaciones

↓

Unidad 8: Probabilidad

- Axiomas de Kolmogórov
- Probabilidad condicional

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Teoría de conjuntos	1	1. Teoría de conjuntos
	1	2. Operaciones con conjuntos
	1	3. Cardinalidad de conjuntos
	1	4. Aplicaciones de la cardinalidad de conjuntos
2. Las permutaciones	1	1. Diagrama de árbol
	1	2. Principio de la suma
	1	3. Principio de la multiplicación
	1	4. Factorial de un número
	1	5. Permutaciones
	1	6. Permutaciones y métodos de conteo
	1	7. Permutaciones con repetición
	1	8. Permutaciones circulares
	1	9. Configuraciones circulares
	1	10. Permutaciones con objetos idénticos
	1	11. Conteo por complemento
	1	12. Practica lo aprendido
	1	Prueba de las lecciones 1 y 2
3. Las combinaciones	1	1. Combinaciones
	1	2. Combinaciones y principios de conteo
	1	3. Conteo de caminos

Lección	Horas	Clases
	1	4. Demostraciones utilizando conteo de caminos
	1	5. Identidades combinatorias contando de 2 formas
	1	6. Triángulo de Pascal
	1	7. Binomio de Newton
	1	8. Técnica de los separadores
	1	9. Practica lo aprendido
	2	10. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la lección 3

27 horas clase + prueba de las lecciones 1 y 2 + prueba de la lección 3.

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Teoría de conjuntos
Se establece una base teórica no axiomática de la teoría de conjuntos, en la cual se abordan algunas definiciones y operaciones intuitivas acerca de los conjuntos y sus propiedades, enfocado principalmente a la cardinalidad de conjuntos (que servirá para el conteo de objetos), lo cual será retomado en la unidad de probabilidad, en donde se trabaja con conjuntos llamados eventos.

Lección 2: Las permutaciones
Luego que se establecen las primeras nociones para realizar conteo de objetos, se puede formalizar un poco más las estrategias más efectivas de conteo, iniciando con los principios básicos de la suma y la multiplicación, los cuales serán utilizados en buena parte de las clases siguientes, profundizando en especial el uso de las permutaciones en diferentes condiciones, desde las permutaciones lineales, circulares, en donde se permite repetición, en donde hay objetos idénticos, etc.; esta lección tendrá mucha correspondencia con la siguiente. Durante toda la lección se dará énfasis al análisis, planteamiento y resolución de problemas, pudiendo evaluarse una respuesta indicada con permutaciones (sin realizar el cálculo exacto) como correcta siempre y cuando todo el análisis y los argumentos sean correctos.

Lección 3: Las combinaciones
En esta lección se definirán las combinaciones y se establecerá su diferencia respecto de las permutaciones, esta lección abarcará contenidos un poco más complejos, que llegan hasta la demostración de identidades combinatorias, justificación del patrón del triángulo de Pascal y deducción del binomio de Newton, etc.; por esta razón en algunas clases será necesario una mayor intervención por parte del docente. De igual manera como en la lección 2, se puede valorar evaluar como correctas las respuestas indicadas con combinatorios, puesto que lo esencial de esta unidad es el análisis y resolución correctas de los problemas.

Lección 1 Teoría de conjuntos

1.1 Teoría de conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección de objetos que pueden ser números, letras, personas, y prácticamente cualquier tipo de cosas. Cada objeto del conjunto recibe el nombre de **elemento**. Si a es un elemento de A, se denota por $a \in A$ o $A \ni a$, y se lee "a pertenece a A" o "A contiene al elemento a". La cantidad de elementos que tiene un conjunto se conoce como **cardinalidad del conjunto** y dado un conjunto A se denota la cardinalidad de A por $n(A)$ (o en ocasiones como $|A|$). Un conjunto se denota encerrando entre "llaves" todos los elementos del conjunto. Si los elementos están expresados en forma de lista, se dice que el conjunto está expresado por **extensión**, por ejemplo: A = {1, 2, 3, a, b, c}.

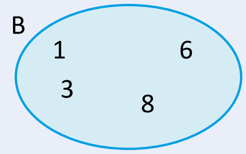
Si los elementos están expresados por una regla o característica de todos los elementos, se dice que el conjunto está expresado por **comprensión**, por ejemplo:

$\{x|\ x$ es un número positivo menor que 6$\}$.

El conjunto se lee: los x tal que x es un número positivo menor que 6.

Se entiende como el conjunto formado por los "x" tal que (o de modo que) dicho "x" cumple ser un número positivo menor que 6.

Para representar gráficamente un conjunto a menudo se utiliza un óvalo en cuyo interior se ubican todos los elementos del conjunto, esta representación se conoce como **diagrama de Venn**, por ejemplo el conjunto B = {1, 3, 6, 8} se puede representar en un diagrama de Venn así:



Ejemplo 1

Determina la cardinalidad del conjunto A = {2, 4, 6, 8, 10} y si es posible, expresa el conjunto por comprensión.
La cardinalidad de A es: $n(A) = 5$.
Se puede expresar por comprensión como: A = $\{x|\ x$ es un número positivo par no mayor que 10$\}$.
También se puede expresar como A = {Los números positivos pares no mayores que 10}.

Ejemplo 2

Expresa los siguientes conjuntos por extensión (si es posible) y determina la cardinalidad del conjunto.

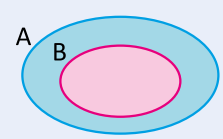
a) A = {Los números positivos impares menores a 8}
b) B = $\{x|\ x = 2n$, para n en los números naturales$\}$

a) A = {1, 3, 5, 7} y $n(A) = 4$.
b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} y $n(A) = \infty$.

Para denotar conjuntos cuyos elementos siguen un patrón pero no terminan, se pueden utilizar puntos suspensivos, como en el literal b, y en este caso la cardinalidad del conjunto se denota por infinito, ∞.

Definición

Un conjunto B es **subconjunto** de un conjunto A si se cumple que todo elemento de B es elemento de A (Si $a \in B$ entonces $a \in A$), y se denota por $B \subset A$ o $A \supset B$, que se lee "B incluido en A" o "A incluye a B".



Por ejemplo, si A = {2, 3, 5, 8, 9} y B = {2, 5}, entonces $B \subset A$.

El conjunto que no posee elementos se conoce como **conjunto vacío**, se denota por $\emptyset$, y se cumple que $n(\emptyset) = 0$. Para todo conjunto A se cumple que $\emptyset \subset A$.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto A se conoce como **conjunto potencia de A**. Si A = {a, b, c} , entonces el conjunto potencia de A es {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

Indicador de logro:

1.1 Define los conceptos sobre teoría de conjuntos y diagramas de Venn.

Secuencia:

En este punto los estudiantes ya cuentan con los conceptos matemáticos necesarios sobre números, álgebra, geometría, funciones, y estadística descriptiva; únicamente hace falta desarrollar una parte de estadística inferencial, y para ello es necesario abordar la teoría de conjuntos que brinda las herramientas necesarias para estudiar los métodos de conteo y posteriormente la probabilidad.

Propósito:

En esta clase se proveen todas las definiciones sobre conjuntos y subconjuntos, por ello se dividen, en la primera Definición se profundiza el concepto de conjunto y sus características; luego se ejemplifican otra Definición donde se trabaja lo correspondiente al concepto de subconjunto y sus características.

En esta clase no hay problemas para resolver porque es muy conceptual (el objetivo es que comprendan y recuerden las definiciones), y por ello se priorizan las definiciones, sin embargo, si los estudiantes comprenden todos los conceptos rápidamente se puede considerar que resuelvan los siguientes problemas:

1. Expresa los siguientes conjuntos por extensión (si es posible) y determina la cardinalidad del conjunto.
   a) A = {Los números positivos pares menores que 10}
   b) B = $\{x \mid 0 < x < 13$ con x número natural$\}$
   c) C = $\{y \mid y$ es divisible por 3$\}$
   d) D = $\{n \mid -5 < n < 7$, con n impar y $n \in \mathbb{Z}\}$
2. Expresa los siguientes conjuntos por comprensión.
   a) A = {5, 7, 9, 11, 13}
   b) B = {–8, –4, 0, 4, 8}
   c) C = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}
   d) D = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...}

Para ejemplificar los diagramas de Venn el docente puede retomar algunos conjuntos de los planteados en los problemas y representarlos con diagramas de Venn.

3. Escribe $\subset$, $\supset$ o = según la relación de inclusión que se cumple.
   a) {3, 7} ____ {1, 3, 5, 7} b) {0, –4, 7, –1} ____ {–4} c) $\mathbb{R}$ ____ $\mathbb{Q}$ d) {} ____ ∅ e) {∅} ____ ∅
4. Determina el conjunto potencia de A = {2, 4, –3, 0}, luego encuentra su cardinalidad.

Solución de problemas:

1a) A = {2, 4, 6, 8}, n(A) = 4
1b) B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, n(B) = 12
1c) C = {... –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}, n(C) = ∞
1d) D = {–3, –1, 1, 3, 5}, n(D) = 5

2a) A = $\{n \mid 4 < n < 14$, con n impar y $n \in \mathbb{Z}\}$
2b) B = $\{y \mid -9 < y < 9$, y es divisible por 4$\}$
2c) C = $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
2d) D = $\{p \mid p$ es un número primo$\}$

Para expresar un conjunto por comprensión, pueden existir muchas alternativas, en este caso el docente debe verificar si las soluciones de los estudiantes son correctas, aunque no sea la que se está presentando.

{∅} es el conjunto formado por el conjunto vacío.

3a) {3, 7} $\underline{\subset}$ {1, 3, 5, 7} **3b)** {0, –4, 7, –1} $\underline{\supset}$ {–4} **3c)** $\mathbb{R}$ $\underline{\supset}$ $\mathbb{Q}$ **3d)** {} $\underline{=}$ ∅ **3e)** {∅} $\underline{\supset}$ ∅

4. Potencia de A = {∅, {2}, {4}, {–3}, {0}, {2, 4}, {2, –3}, {2, 0}, {4, –3}, {4, 0}, {–3, 0}, {2, 4, –3}, {2, 4, 0}, {2, –3, 0}, {4, –3, 0}, A}; y su cardinalidad es 16.

1.2 Operaciones con conjuntos

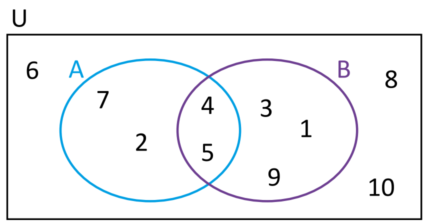
Problema inicial

Considerando los conjuntos A = {2, 4, 5, 7} y B = {1, 3, 4, 5, 9}.

a) Determina el conjunto de los elementos que están en A o en B.
b) Determina el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B.
c) Determina el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B.
d) Considerando U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Determina el conjunto de los elementos que están en U pero no están en A.

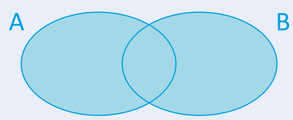
Solución

a) El conjunto es: {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.
b) El conjunto es: {4, 5}.
c) El conjunto es: {2, 7}.
d) El conjunto es: {1, 3, 6, 8 ,9, 10}.

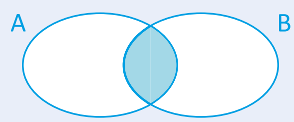


Definición

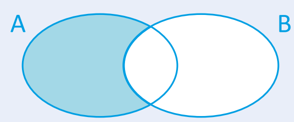
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A o en B se conoce como **unión de conjuntos**, se denota A⋃B, y se lee “A unido B”.



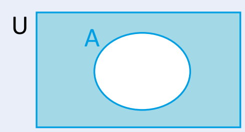
La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B se conoce como **intersección de conjuntos**, se denota A⋂B, y se lee “A intersectado B”.



La operación entre dos conjuntos A y B, que forma el conjunto de los elementos que están en A pero no están en B se conoce como **diferencia de conjuntos**, y se denota A – B.



La operación entre dos conjuntos A y U que cumplen que A ⊂ U y toma los elementos de U que no están en A se conoce como **complemento** del conjunto A, y se denota A^c. Al conjunto U a menudo se le conoce como **conjunto universo** o simplemente **universo**.

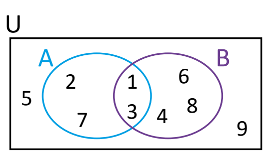


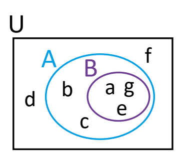
Problemas

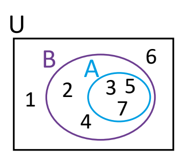
1. Para cada literal, determina los conjuntos A⋃B, A⋂B, A – B y B – A.

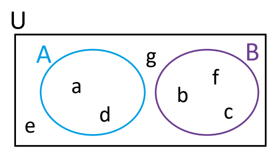
a) A = {a, c, d, e, f, g}, B = {b, d, f, h}
b) A = {–2, 0, 1, 4, 7}, B = {–2, 1, 4}
c) A = {a, b}, B = {a, b, c, d}
d) A = {2, 3, 4}, B = {5, 6, 7}

2. Para cada diagrama de Venn, determina los conjuntos A, B, A⋃B, A⋂B, A – B, B – A, A^c y B^c .

a)


b)


c)


d)


179

Indicador de logro:

1.2 Determina la unión, intersección, diferencia y complemento de conjuntos.

Secuencia:

Después que los estudiantes han asimilado la definición de conjunto, su notación y algunas otras definiciones en torno a los conjuntos, en esta clase los estudiantes aprenderán sobre las operaciones más importantes sobre conjuntos.

Propósito:

En el Problema inicial se espera que los estudiantes realicen las operaciones partiendo del uso de conectivos lógicos intuitivos como el "y" y el "o", que están relacionados con las operaciones entre conjuntos que se definen en esta clase.

Solución de problemas:

1a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A \cap B = \{d, f\}$; $A - B = \{a, c, e, g\}$; $B - A = \{b, h\}$.

1b) $A \cup B = \{-2, 0, 1, 4, 7\} = A$; $A \cap B = \{-2, 1, 4\} = B$; $A - B = \{0, 7\}$; $B - A = \{\} = \emptyset$.

1c) $A \cup B = \{a, b, c, d\} = B$; $A \cap B = \{a, b\} = A$; $A - B = \{\} = \emptyset$; $B - A = \{c, d\}$.

1d) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = A$; $A \cap B = \{\} = \emptyset$; $A - B = \{2, 3, 4\} = A$; $B - A = \{5, 6, 7\} = B$.

2a) $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A - B = \{2, 7\}$, $B - A = \{4, 6, 8\}$, $A^c = \{4, 5, 6, 8, 9\}$ y $B^c = \{2, 5, 7, 9\}$.

2b) $A = \{a, b, c, e, g\}$, $B = \{a, e, g\}$, $A \cup B = \{a, b, c, e, g\} = A$, $A \cap B = \{a, e, g\} = B$, $A - B = \{b, c\}$, $B - A = \{\} = \emptyset$, $A^c = \{d, f\}$ y $B^c = \{b, c, d, f\}$.

2c) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\} = B$, $A \cap B = \{3, 5, 7\} = A$, $A - B = \{\} = \emptyset$, $B - A = \{2, 4\}$, $A^c = \{1, 2, 4, 6\}$ y $B^c = \{1, 6\}$.

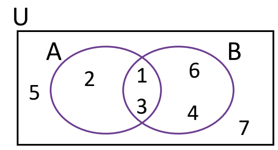
2d) $A = \{a, d\}$, $B = \{b, c, f\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$, $A \cap B = \{\} = \emptyset$, $A - B = \{a, d\}$, $B - A = \{b, c, f\}$, $A^c = \{b, c, e, f, g\}$ y $B^c = \{a, d, e, g\}$.

1.3 Cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los conjuntos A y B representados por el diagrama de Venn de la derecha, resuelve:

a) ¿Cuántos elementos tiene A?
b) ¿Cuántos elementos tiene B?
c) ¿Cuántos elementos tiene A⋂B?
d) ¿Cuántos elementos tiene A⋃B?
e) ¿Cuántos elementos tiene A^c?



Solución

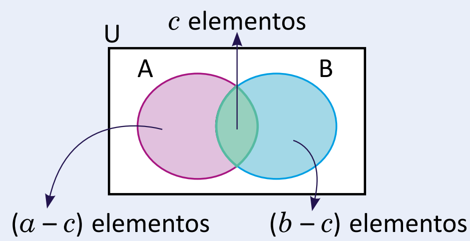
El conjunto universo es: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a) Identificando el conjunto A = {1, 2, 3}, entonces el número de elementos de A será: n(A) = 3.
b) Identificando el conjunto B = {1, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de B será: n(B) = 4.
c) Identificando el conjunto A⋂B = {1, 3}, entonces el número de elementos de A⋂B será: n(A⋂B) = 2.
d) Identificando el conjunto A⋃B = {1, 2, 3, 4, 6}, entonces el número de elementos de A⋃B será: n(A⋃B) = 5.
e) Identificando el conjunto A^c = {4, 5, 6, 7}, entonces el número de elementos de A^c será: $n(A^c) = 4$.

En general

Considerando los conjuntos A y B de modo que $n(A) = a$, $n(B) = b$ y $n(A \cap B) = c$, entonces se cumple que

$$n(A \cup B) = (a - c) + (b - c) + c$$
$$= a + b - c.$$

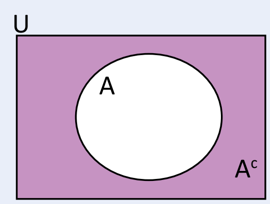


Y esto es equivalente a tener:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

De forma parecida analizando A^c como los elementos de U que no están en A se puede concluir que

$$n(A^c) = n(U) - n(A).$$



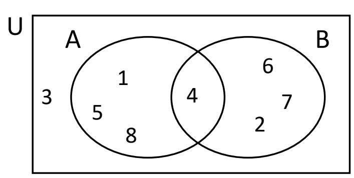
En general, para los conjuntos U, A y B se cumple que

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),}$$
$$\boldsymbol{n(A^c) = n(U) - n(A).}$$

Problemas

1. Considerando el diagrama de Venn de la derecha, resuelve los literales.

a) n(A⋃B) b) n(U) c) $n(A^c)$ d) $n(B^c)$
e) $n[(A \cup B)^c]$ f) $n(A^c \cap B^c)$ g) $n[(A \cap B)^c]$ h) $n(A^c \cup B^c)$



Utilizando diagramas de Venn puedes comprobar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Estas propiedades se conocen como **identidades de De Morgan**.

2. Considerando los conjuntos U, A y B en los que se cumple que $n(U) = 60$, $n(A) = 35$, $n(B) = 21$ y $n(A \cap B) = 14$, determina:

a) n(A⋃B) b) $n(A^c)$ c) $n(B^c)$ d) $n[(A \cup B)^c]$ e) $n[(A \cap B)^c]$ f) $n(A - B)$ g) $n(A \cap B^c)$

Indicador de logro:

1.3 Calcula la cardinalidad de conjuntos y de sus operaciones.

Secuencia:

Una vez teniendo las operaciones sobre conjuntos, es posible analizar resultados sobre la cardinalidad de conjuntos definida por las operaciones con conjuntos, en esta parte se da un énfasis especial a la unión de conjuntos.

Propósito:

El uso de la notación n(A) tiene la intención de no confundir a los estudiantes con la notación de valor absoluto, el contenido de esta clase tiene relación con la unidad de probabilidad, por lo cual esta notación será retomada en esa unidad.

Solución de problemas:

Para este problema es mejor que los estudiantes primero calculen $n(A) = 4$, $n(B) = 4$ y $n(A \cap B) = 1$, para luego aplicar el resultado de la parte En general:

1a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 4 - 1 = 7$

1b) $n(U) = 8$

1c) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 8 - 4 = 4$

1d) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 8 - 4 = 4$

1e) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 8 - 7 = 1$

1f) $n(A^c \cap B^c) = 1$

1g) $n[(A \cap B)^c] = n(U) - n(A \cap B) = 8 - 1 = 7$

1h) $n(A^c \cup B^c) = n(A^c) + n(B^c) - n(A^c \cap B^c) = 4 + 4 - 1 = 7$

En este problema el docente debe invitar a los estudiantes a que apliquen los resultados de la conclusión, y no cuenten todos los elementos de los conjuntos a partir del diagrama de Venn. Únicamente el literal f es necesario hacerlo de esta manera.

2a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 21 - 14 = 42$

2b) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 60 - 35 = 25$

2c) $n(B^c) = n(U) - n(B) = 60 - 21 = 39$

2d) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 60 - 42 = 18$

2e) $n[(A \cap B)^c] = n(U) - n(A \cap B) = 60 - 14 = 46$

2f) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 14 = 21$

2g) Calculando $n(A \cup B^c) = n(B^c) + n(A \cap B) = 39 + 14 = 53$,
luego $n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) = 35 + 39 - 53 = 21$.

Para las soluciones de 2f) y 2g) el docente puede recomendar hacer un diagrama de Venn y comprobar por qué es necesario hacer el cálculo de la manera planteada. Además, en 2g) se puede concluir que $n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) = n(A) + n(B^c) - [n(B^c) + n(A \cap B)] = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 14 = 21$.

Si el docente considera conveniente puede mostrar mediante diagramas de Venn las leyes de De Morgan:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

De lo cual se puede comprobar el hecho de que la solución de 1e) sea igual a la de 1f), y la solución de 1g) sea igual a la de 1h).

1.4 Aplicaciones de la cardinalidad de conjuntos

Problema inicial

Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:

a) ¿Cuántos múltiplos de 3 hay?

b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?

c) ¿Cuántos múltiplos tanto de 3 como de 5 hay?

d) ¿Cuántos múltiplos de 3 o de 5 hay?

Solución

Considerando U como el conjunto de los números naturales del 1 al 100. Denotando como A al conjunto de los números en U que son múltiplos de 3 y como B al conjunto de los múltiplos de 5 que están en U.

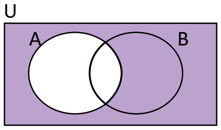
A = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}

B = {5(1), 5(2), 5(3), ... , 5(18), 5(19), 5(20)}

a) La cantidad de múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del conjunto A, es decir, $n(\text{A}) = 33$.

b) La cantidad de números que no son múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del complemento de A, es decir:

$$n(\text{A}^c) = n(\text{U}) - n(\text{A}) = 100 - 33 = 67.$$

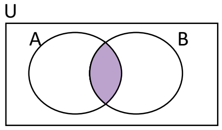


c) El conjunto formado por los múltiplos de 3 y de 5 es el mismo conjunto que el de los múltiplos de 15 que hay entre 1 y 100.

A⋂B = {15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5), 15(6)}.

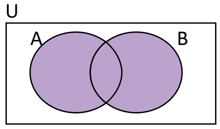
Entonces $n(\text{A}\cap\text{B}) = 6$.

Los múltiplos comunes de 3 y 5 son los múltiplos del mínimo común múltiplo de ellos, es decir, 15.



d) El conjunto formado por los múltiplos de 3 o de 5 está dado por el conjunto A⋃B.

$n(\text{A}\cup\text{B}) = n(\text{A}) + n(\text{B}) - n(\text{A}\cap\text{B}) = 33 + 20 - 6 = 47.$



Conclusión

La teoría de conjuntos puede resultar muy útil para realizar conteo de situaciones que se modelan a partir de conjuntos.

Problemas

1. Determina cuántos números del 1 al 100 no son múltiplos de 3 ni de 5. Luego realiza el diagrama de Venn que representa dicha situación.

2. Considerando los números naturales del 1 al 100, resuelve:
   a) ¿Cuántos múltiplos de 2 hay?
   b) ¿Cuántos que no son múltiplos de 3 hay?
   c) ¿Cuántos múltiplos de 2 y de 3 hay?
   d) ¿Cuántos múltiplos de 2 o de 3 hay?
   e) ¿Cuántos números que no son múltiplos de 2 ni de 3 hay?

3. La tabla muestra la cardinalidad de la intersección de los conjuntos de la fila y de la columna. Considerando los conjuntos A y B, llena la tabla con la información que falta:

	A	A^c	Total
B	42		56
B^c		10	
Total	76		100

Unidad 7

Indicador de logro:

1.4 Resuelve problemas aplicando las propiedades de la cardinalidad de las operaciones con conjuntos.

Secuencia:

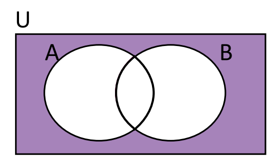
Para finalizar la lección sobre teoría de conjuntos, se pueden comenzar a introducir problemas de conteo que se solucionen a partir de las propiedades de la cardinalidad de conjuntos.

Propósito:

En el Problema inicial se espera que los estudiantes resuelvan utilizando conceptos de conjuntos, en los Problemas se continúa con la misma situación del Problema inicial, y siempre son dos números primos para facilitar el cálculo del mcm.

Solución de problemas:

1. Utilizando los resultados del Problema inicial, y analizando que los números del 1 al 100 que no son múltiplos de 3 ni de 5 equivale a determinar $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 47 = 53$.



2a) Considerando U como el conjunto de los números naturales del 1 al 100. Denotando como A al conjunto de los números en U que son múltiplos de 2 y como B al conjunto de los múltiplos de 3 que están en U.

A = {2(1), 2(2), 2(3), ... , 2(48), 2(49), 2(50)}

B = {3(1), 3(2), 3(3), ... , 3(31), 3(32), 3(33)}

La cantidad de múltiplos de 2 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del conjunto A, es decir, $n(A) = 50$.

2b) La cantidad de números que no son múltiplos de 3 entre 1 y 100 es igual a la cardinalidad del complemento de B, es decir:

$$n(B^c) = n(U) - n(B) = 100 - 33 = 67.$$

2c) El conjunto formado por los múltiplos de 2 y de 3 es el mismo conjunto que el de los múltiplos de 6 que hay entre 1 y 100.

$A \cap B$ = {6(1), 6(2), 6(3), ... , 6(14), 6(15), 6(16)}.

Entonces $n(A \cap B) = 16$.

Para determinar la cantidad de múltiplos de un número, que hay entre 1 y 100, se puede dividir 100 por dicho número (del que se desea saber la cantidad de múltiplos) y la cantidad de múltiplos será el cociente de la división efectuada.

2d) El conjunto formado por los múltiplos de 2 o de 3 está dado por el conjunto $A \cup B$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 33 - 16 = 67.$

2e) $n[(A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 67 = 33.$

En el problema 3 se pretende que los estudiantes conozcan y trabajen con las tablas de doble entrada, lo cual será de utilidad en la siguiente unidad; si los estudiantes no logran llegar a este problema, solamente habría que abordar este concepto en la siguiente unidad durante la clase de probabilidad condicional.

3. Para encontrar el valor de la casilla que está en la segunda columna de la primera fila, se calcula $n(A^c \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 56 - 42 = 14$.

Para encontrar el valor de la casilla que está en la primera columna de la segunda fila, se calcula $n(A \cap B^c) = n(A) - n(A \cap B) = 76 - 42 = 34$.

Para encontrar el valor de la casilla que está en la tercera columna de la segunda fila, se calcula $n(B) = n(A \cap B^c) + n(A^c \cap B^c) = 34 + 10 = 44$.

Para encontrar el valor de la casilla que está en la segunda columna de la tercera fila, se calcula $n(A^c) = n(A^c \cap B) + n(A^c \cap B^c) = 14 + 10 = 24$, o bien, $n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 76$.

	A	A^c	Total
B	42	14	56
B^c	34	10	44
Total	76	24	100

Lección 2 Las permutaciones

2.1 Diagrama de árbol

Problema inicial

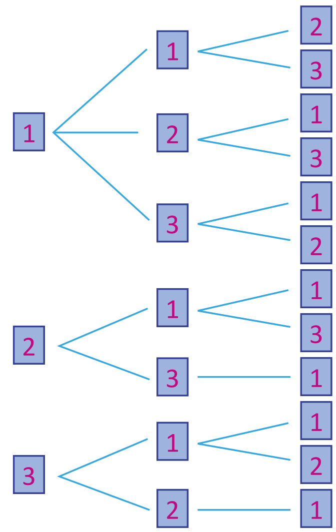
Hay 4 tarjetas numeradas de la siguiente manera 1, 1, 2, 3; determina de cuántas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila.

Solución

Analizando la posición de las tarjetas como muestra el diagrama de la derecha.

A partir de él se puede observar que cada camino que se pueda tomar es una forma en que se pueden colocar las tres cartas, y estas se pueden contar a partir de la última columna de tarjetas numeradas.

Por lo tanto hay 12 formas.



Definición

El diagrama en donde se listan todas las posibilidades de un suceso por casos y se representa por líneas rectas se conoce como **diagrama de árbol**, el diagrama de la solución es un ejemplo de diagrama de árbol.

En los eventos sobre extracción de objetos, se dice que es **con reemplazo** cuando al extraer un objeto este se devuelve al grupo de extracción, y **sin reemplazo** cuando el objeto no se devuelve.

Problemas

1. Utiliza un diagrama de árbol para determinar de cuántas formas se pueden extraer sin reemplazo 3 bolitas de color rojo, amarillo y verde (una de cada color) de una bolsa, si se extrae una bolita a la vez.

2. Utiliza un diagrama de árbol para calcular cuántas formas hay para repartir 4 dulces de diferente sabor entre 4 personas, si ninguna puede quedar sin dulces.

3. María tiene 2 pantalones, 1 falda, 2 blusas y 3 pares de zapatos, todos diferentes. Utiliza diagrama de árbol para determinar cuántas formas diferentes tiene María para vestirse.

4. Utiliza un diagrama de árbol para calcular el total de maneras que hay para extraer 2 cartas con reemplazo de entre 5 cartas diferentes.

5. Se lanzan tres dados diferentes. Determina el número de casos donde la suma sea 5.

En el primer dado solo puede caer 1, 2 o 3, sino ya no podría sumar 5.

Indicador de logro:

2.1 Utiliza el diagrama de árbol para resolver situaciones sobre conteo.

Secuencia:

Habiendo estudiado los conceptos fundamentales sobre teoría de conjuntos, y habiéndola utilizado como una herramienta para resolver problemas de conteo, en esta lección se introducen las herramientas básicas de conteo hasta el concepto de permutaciones.

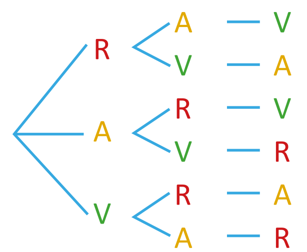
Propósito:

En esta clase se pretende iniciar con una herramienta intuitiva como el diagrama de árbol para la resolución de problemas de conteo, luego se necesitará una herramienta más eficiente para problemas que impliquen números más grandes. En los Problemas, el criterio de dificultad es la forma que tendrá el diagrama de árbol en cada uno.

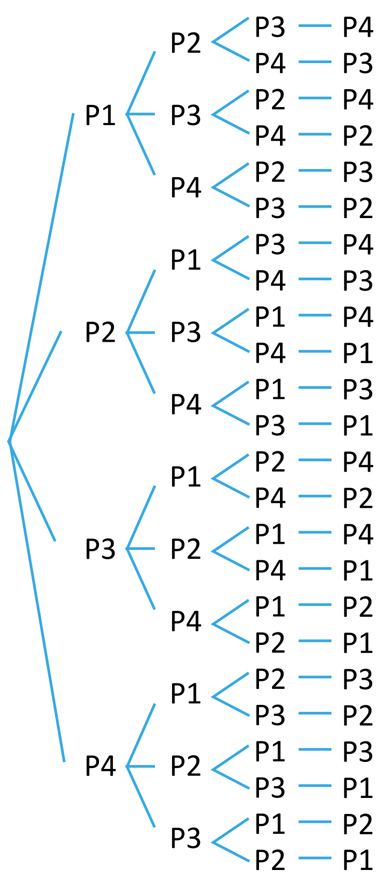
Solución de problemas:

1. En la primera extracción puede sacarse cualquiera de las 3 bolitas, luego cualquiera de las 2 bolitas que quedaron y finalmente la bolita restante. De modo que la extracción se puede realizar de 6 formas diferentes.

RAV, RVA, ARV, AVR, VRA, VAR.

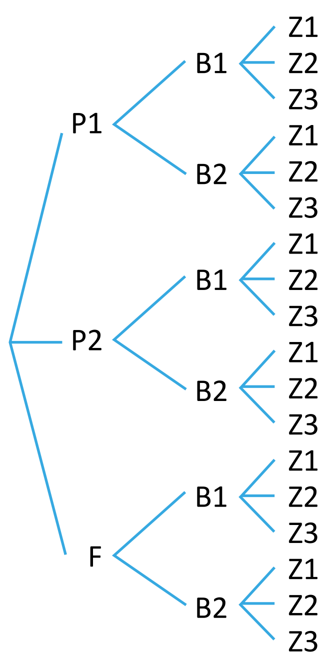


2.



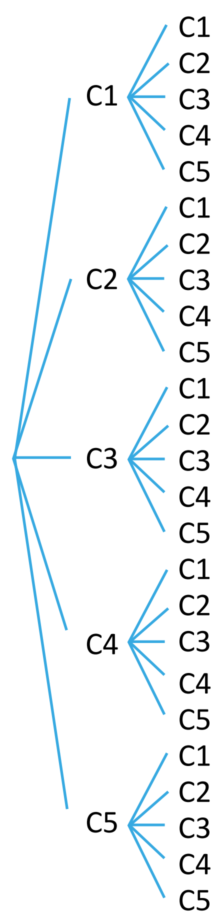
Hay 24 formas diferentes de repartir los dulces.

3.



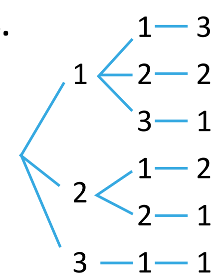
Hay 18 formas diferentes en que puede vestirse María.

4.



Hay 25 formas diferentes de extraer las cartas.

5.

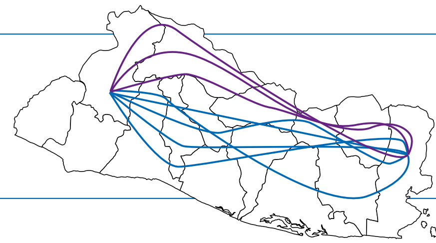


Hay 6 formas diferentes de obtener 5 al tirar 3 dados.

2.2 Principio de la suma

Problema inicial

¿De cuántas maneras se puede viajar de Santa Ana a La Unión, si pasando por San Salvador hay 5 caminos diferentes y pasando por Chalatenango hay 3 formas diferentes? Considera que ningún camino pasa por ambos lugares.



Solución

Para viajar de Santa Ana a La Unión hay 2 opciones: pasar por San Salvador o bien pasar por Chalatenango, y ninguna ruta pasa por ambos lugares a la vez. De forma que para saber el total de maneras que hay para ir de Santa Ana a La Unión es 5 + 3 = 8.

Conclusión

Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, y ambos eventos no ocurren al mismo tiempo, entonces el total de maneras en que puede ocurrir el evento A o B (es decir uno de los dos) es $a + b$. Este resultado se conoce como **principio de la suma**.

Ejemplo

En una zapatería tienen 4 tipos de sandalias, 2 tipos de zapatillas y 3 tipos de botas, ¿cuántos tipos de zapatos diferentes ofrece la zapatería?

La zapatería ofrece 3 tipos de zapatos: sandalias, de las cuales hay 4 tipos diferentes; zapatillas, de las cuales hay 2 tipos diferentes; y botas, de las cuales hay 3 tipos de botas diferentes.

Así se cumple que la zapatería ofrece 4 + 2 + 3 = 9 tipos de zapatos diferentes.

Problemas

1. En una zona de comedores hay 3 locales en donde se puede comprar, si el primero tiene 4 opciones de comida, el segundo 5 y el tercero 7, determina de cuántas formas se puede comprar comida en alguno de los locales.

2. María tiene 4 centros escolares para realizar sus horas sociales, en el primer centro escolar tiene 2 opciones, en el segundo tiene 3 opciones, en el tercero tiene 4 opciones y en el cuarto solamente una opción para realizar las horas sociales. Determina cuántas opciones tiene en total María para realizar sus horas sociales.

3. Si se lanzan 2 dados al mismo tiempo, de cuántas maneras la suma de los puntos es 7 o 4.

4. En la situación del problema 3, determina cuántas maneras hay para que la diferencia de los puntos sea 2 o 3.

Indicador de logro:

2.2 Aplica el principio de la suma para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego de haber introducido el diagrama de árbol como otra herramienta para resolver problemas de conteo, se estudiará uno de los principios básicos de conteo, conocido como principio de la suma.

Propósito:

En el Ejemplo y en los Problemas se espera que el estudiante identifique fácilmente las condiciones para aplicar el principio de la suma, además en los problemas 3 y 4 es necesario que los estudiantes apliquen lo aprendido sobre el diagrama de árbol.

Solución de problemas:

1. Puesto que no puede comprar comida en dos locales, los eventos pueden ser, comprar en el local 1 (4 opciones), comprar en el local 2 (hay 5 opciones) o comprar en el local 3 (hay 7 opciones), por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de formas en que se puede comprar comida en alguno de los locales es: 4 + 5 + 7 = 16.

2. De manera análoga al problema anterior, María no puede hacer las horas sociales en dos centros escolares a la vez, por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de formas que tiene María para realizar sus horas sociales es: 2 + 3 + 4 + 1 = 10.

3. Puesto que al lanzar 2 dados al mismo tiempo no puede caer 7 y 4 a la misma vez, se pueden identificar los eventos: cae 7 o cae 4; y analizando cada caso:

Para que caiga 7

Dado 1	Dado 2
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

Para que caiga 4

Dado 1	Dado 2
1	3
2	2
3	1

Entonces, hay 6 opciones para que caiga 7, y 3 para que caiga 4, por lo tanto, por el principio de la suma, el total de maneras para que al lanzar 2 dados caiga 7 o 4 es: 6 + 3 = 9.

4. Puesto que al lanzar 2 dados la diferencia no puede ser 2 y 3 al mismo tiempo, se pueden identificar los eventos, la diferencia es 2 o la diferencia es 3; y analizando cada caso:

Diferencia 2

Dado 1	Dado 2
1	3
2	4
3	1
	5
4	2
	6
5	3
6	4

Diferencia 3

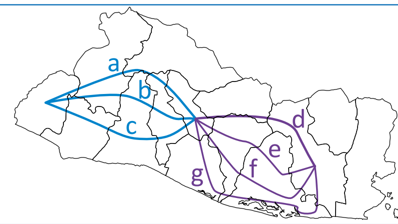
Dado 1	Dado 2
1	4
2	5
3	6
4	1
5	2
6	3

Entonces, hay 8 opciones para que la diferencia sea 2, y 6 para que la diferencia sea 3, por lo tanto, por el principio de la suma, el total de maneras para que al lanzar 2 la diferencia sea 2 o 3 es: 8 + 6 = 14.

2.3 Principio de la multiplicación

Problema inicial

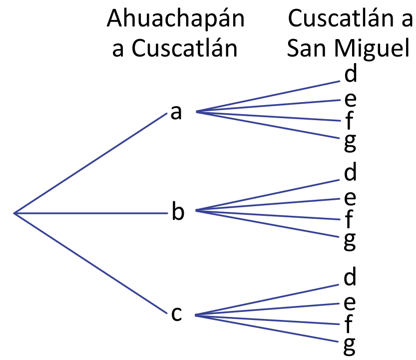
¿De cuántas maneras se puede viajar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán, si para llegar de Ahuachapán a Cuscatlán hay 3 formas diferentes de llegar a, b y c, y para llegar de Cuscatlán a San Miguel hay 4 formas diferentes para llegar d, e, f y g?



Solución

Para salir de Ahuachapán a Cuscatlán existen 3 formas diferentes, y por cada una de ellas al llegar a Cuscatlán hay 4 formas diferentes de llegar a San Miguel, entonces el total de maneras para llegar de Ahuachapán a San Miguel pasando por Cuscatlán es 3 × 4 = 12 maneras diferentes.

Las 12 maneras son: ad, ae, af, ag, bd, be, bf, bg, cd, ce, cf y cg.



Conclusión

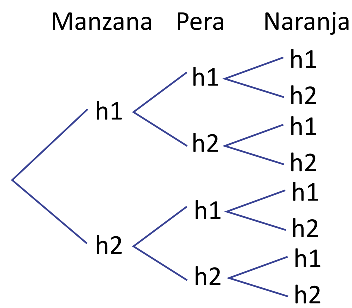
Si un evento o condición A puede ocurrir de a maneras, y para cada una de estas maneras un evento o condición B puede ocurrir de b maneras, entonces el total de formas en que puede ocurrir el evento A y el evento B (es decir los dos) es ab. Este resultado se conoce como **principio de la multiplicación**.

Es posible que para resolver algunos problemas sea necesario aplicar tanto el principio de la suma como el principio de la multiplicación.

Ejemplo

José quiere repartir una manzana, una pera y una naranja a sus dos hermanos. Determina de cuántas maneras puede repartir las frutas si incluso puede darse el caso que le dé a un hermano todo y al otro nada.

Tomando como referencia la fruta, para cada una de estas, la manzana tiene 2 posibilidades: que se dé al hermano 1 o al hermano 2; luego, la pera también tiene 2 posibilidades, y la naranja igualmente tiene 2 posibilidades, entonces José puede repartir la fruta de 2 × 2 × 2 = 8 maneras diferentes.



Problemas

1. Determina de cuántas maneras se puede formar una pareja de un niño y una niña de entre 4 niños y 3 niñas.

2. En un comedor hay 3 tipos de platos fuertes, 2 tipos de arroz y 3 tipos de ensalada. Determina de cuántas maneras se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada.

3. Determina de cuántas maneras se pueden repartir una pera y un mango entre 3 personas diferentes. Considera que no se pueden dar ambas frutas a una sola persona.

4. María tiene 4 calzonetas y 3 camisetas para baloncesto, y tiene 5 calzonetas y 4 camisetas para fútbol. ¿De cuántas maneras puede vestirse María para jugar baloncesto o fútbol?

Indicador de logro:

2.3 Aplica el principio de la multiplicación para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Otro contenido básico para resolver problemas sobre conteo es el principio de la multiplicación, el cual se puede abordar directamente a partir del diagrama de árbol.

Propósito:

En el Ejemplo se presenta el diagrama de árbol para que sirva de apoyo para los estudiantes, sin embargo, en la resolución de los Problemas no es necesario que los estudiantes realicen dicho diagrama, es suficiente con que identifiquen las condiciones y apliquen el principio de la multiplicación directamente.

Solución de problemas:

1. El evento "ser niño" puede ocurrir de 4 maneras, y por cada uno de ellos hay 3 niñas con las que se puede hacer la pareja, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de formar una pareja con estas condiciones es: $4 \times 3 = 12$.

2. Puesto que hay 3 tipos de platos fuertes, y por cada uno de ellos se puede escoger entre 2 tipos de arroz, lo cual, por el principio de la multiplicación, se puede calcular que hay $3 \times 2 = 6$ posibles maneras de escoger un plato fuerte y un tipo de arroz; luego por cada posible combinación de plato fuerte y arroz hay 3 tipos de ensalada, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras en que se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada es $6 \times 3 = 18$.

Para este problema también pueden considerarse válidas las soluciones en donde se multiplican de una sola vez las tres cantidades: $3 \times 2 \times 3 = 18$.

Se presenta la otra forma porque formalmente en la clase el principio de la multiplicación está definido únicamente para 2 eventos, sin embargo, los estudiantes pueden analizar inductivamente que dicho resultado se cumple para n eventos, con n finito.

3. Considerando que se reparte primero la pera, esta tendrá 3 posibilidades (cualquiera de las 3 personas), luego, por cada una de ellas, el mango tendrá 2 posibilidades (las 2 personas a las que no se les da la pera), por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras para repartir una pera y un mango entre 3 personas es: $3 \times 2 = 6$.

4. Primero hay que notar que María no puede ir vestida para jugar baloncesto y fútbol al mismo tiempo, entonces se tiene los casos: "vestida para jugar baloncesto" y "vestida para jugar fútbol", luego analizando cada caso:

Vestida para jugar baloncesto

Tiene 4 calzonetas para baloncesto y por cada una de ellas puede usar cualquiera de las 3 camisetas para baloncesto que tiene, entonces, aplicando el principio de la multiplicación, puede vestirse de 4×3 maneras para jugar baloncesto.

Vestida para jugar fútbol

Tiene 5 calzonetas para fútbol y por cada una de ellas puede usar cualquiera de las 4 camisetas para fútbol que tiene, entonces, aplicando el principio de la multiplicación, puede vestirse de 5×4 maneras para jugar fútbol.

Por lo tanto, aplicando el principio de la suma a estos casos, se tiene que el total de maneras en que se puede vestir María para jugar baloncesto o fútbol es: $(4 \times 3) + (5 \times 4) = 12 + 20 = 32$.

2.4 Factorial de un número

Problema inicial

Determina de cuántas maneras es posible ordenar 4 personas en una fila.

Solución

En la primera posición de la fila puede colocarse cualquiera de las 4 personas, entonces hay 4 posibilidades.

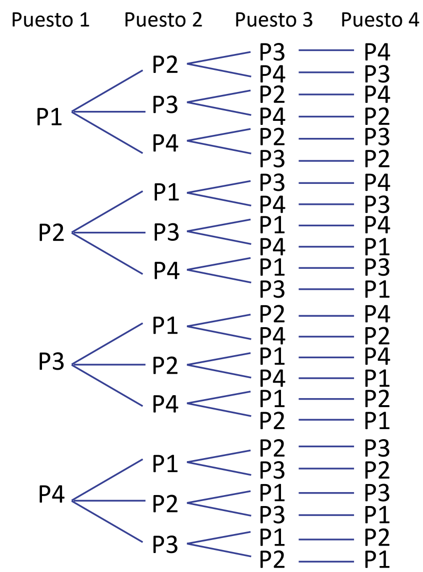
Luego, en la segunda posición de la fila ya solo se tienen 3 personas (porque en la primera posición ya quedó una) entonces hay 3 posibilidades.

Análogamente, para la tercera posición solo hay 2 posibilidades y para la última posición solo habrá 1 posibilidad.

Por lo tanto, por principio de la multiplicación, el total de maneras de arreglar 4 personas en una fila es:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Hay 24 maneras diferentes para ordenar 4 personas en una fila.



Definición

Para un número natural n, se define el **factorial de n** como el producto de los números consecutivos desde 1 hasta n. Se denota el factorial de n por $n!$, y se lee "n factorial". Entonces:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Observa que $n! = n \times (n-1)!$

Ejemplo

Calcula o simplifica el resultado de las operaciones con factorial.

a) $3!$

$3! = 3 \times 2 \times 1$
$= 6$

b) $6! \div 4!$

$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$
$= 30$

c) $4! - 3!$

$4! - 3! = (4 \times 3!) - 3!$
$= 3!(4-1)$
$= 6(3)$
$= 18$

Primero calcula lo que está entre paréntesis.

d) $\frac{2\,018!}{2\,018}$

$\frac{2\,018!}{2\,018} = \frac{\cancel{2\,018} \times 2\,017!}{\cancel{2\,018}}$
$= 2\,017!$

Problemas

1. Calcula el resultado de las operaciones con factorial.

a) $4!$ b) $5!$ c) $(5-3)!$ d) $6! - 4!$
e) $(2+3)!$ f) $4! + 3!$ g) $4! \times 3!$ h) $(2 \times 3)!$

2. Calcula o simplifica las siguientes expresiones con factoriales.

a) $\frac{5!}{3!}$ b) $\left(\frac{6}{3}\right)!$ c) $\frac{4!}{6}$ d) $\frac{2\,019!}{2\,019}$ e) $\frac{7!}{(7-2)!}$ f) $\frac{7!}{2!(7-2)!}$ g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)}$

3. Determina el valor de x.

a) $x! = 110(x-2)!$ b) $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$

4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra ÁRBOL.

Unidad 7

185

Indicador de logro:

2.4 Calcula el resultado de expresiones con factoriales.

Secuencia:

Luego de tener las herramientas básicas para resolver problemas de conteo, se tomará un poco de tiempo para introducir la notación y definición del factorial de un número, el cual será retomado posteriormente para expresar las permutaciones y combinaciones.

Propósito:

En esta clase se espera que los estudiantes practiquen la parte operativa de los factoriales (para evitar al máximo el uso de la calculadora) y puedan realizar algunas simplificaciones utilizando la definición del factorial de un número. Las expresiones del problema 2 están relacionadas con diferentes tipos de permutaciones y combinaciones, para que en las clases correspondientes, se profundice más en el análisis y resolución de los problemas que en el cálculo del resultado final.

Solución de problemas:

1a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

1b) $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

1c) $(5 - 3)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

1d) $6! - 4! = 720 - 24 = 696$

1e) $(2 + 3)! = 5! = 120$

1f) $4! + 3! = 24 + 6 = 30$

1g) $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

1h) $(2 \times 3)! = 6! = 720$

Se recomienda que los estudiantes no utilicen calculadora para estos problemas. La intención es que analicen que en general no se cumple que la suma, resta y multiplicación de factoriales da como resultado el factorial de la suma, resta y multiplicación.

2a) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

2b) $\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2$

2c) $\frac{4!}{6} = \frac{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{6}} = 4$

2d) $\frac{2\,019!}{2\,019} = \frac{\cancel{2\,019} \times 2\,018!}{\cancel{2\,019}} = 2\,018!$

2e) $\frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42$

2f) $\frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{\cancelto{42}{7!}}{2!\cancelto{1}{5!}} = \frac{42}{2} = 21$

2g) $\frac{9!}{2!(3!)(4!)} = \frac{9 \times \cancelto{4}{8} \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancelto{1}{2}(\cancelto{1}{6})(\cancelto{1}{4!})} = 1\,260$

El docente debe orientar a los estudiantes a utilizar la definición del factorial para simplificar y facilitar los cálculos en cada problema, para el literal g), no es necesario calculadora, solamente deben hacerse las multiplicaciones en un orden adecuado, primero $4 \times 5 = 20$, luego $9 \times 7 = 63$ y finalmente $63 \times 20 = 1260$.

3a) $x! = 110(x - 2)! \Rightarrow x(x - 1)\cancel{(x - 2)!} = 110\cancel{(x - 2)!} \Rightarrow x^2 - x - 110 = 0 \Rightarrow (x - 11)(x + 10) = 0 \Rightarrow x = 11$ o $x = -10$, pero para que la definición de la clase tenga sentido, x debe ser positivo, por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x = 11$.

3b) $12x! + 5(x + 1)! = (x + 2)! \Rightarrow 12\cancel{x!} + 5(x + 1)\cancel{x!} = (x + 2)(x + 1)\cancel{x!} \Rightarrow 12 + 5x + 5 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 5$ o $x = -3$, pero para que la definición de la clase tenga sentido, x debe ser positivo, por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x = 5$.

4. Puesto que las letras de la palabra ÁRBOL son todas diferentes entre sí, de manera análoga al Problema inicial, el primer puesto tendrá 5 opciones, el segundo puesto tendrá 4 (quitando la que quedó en el primer puesto), y así sucesivamente se tendrá que hay $5! = 120$ maneras de arreglar las letras de la palabra ÁRBOL.

2.5 Permutaciones

Problema inicial

Determina la cantidad de maneras en que se puede colocar 3 vocales diferentes en una fila.

Solución

Se pueden considerar los 3 puestos de la siguiente manera.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Para elegir la vocal que estará en el primer puesto hay 5 posibilidades (cualquiera de las 5 vocales, a, e, i, o, u).

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\;5\;}} \qquad \underset{\text{Segundo}}{\underline{\qquad}} \qquad \underset{\text{Tercero}}{\underline{\qquad}}$$

Luego para el segundo y tercer puesto quedarán únicamente 4 y 3 posibilidades respectivamente.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{\;5\;}} \times \underset{\text{Segundo}}{\underline{\;4\;}} \times \underset{\text{Tercero}}{\underline{\;3\;}}$$

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de colocar 3 de las 5 vocales en una fila es: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Conclusión

Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como **permutación**.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando r de n ($0 \leq r \leq n$) está dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observa que ${}_n\mathrm{P}_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

Este total se denota por ${}_n\mathrm{P}_r$, y se lee "n permuto r", es decir

$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}_{r \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

El total de maneras de ordenar n objetos diferentes es $n!$, por otro lado, con la fórmula de permutaciones se tiene que ${}_n\mathrm{P}_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$, y esto debe ser $n!$, por lo tanto se cumple que $0! = 1$.

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 1 al 9, si no se repite ningún dígito?

Al tomar 3 cifras, es importante el orden entre ellas (forman números diferentes), entonces considerando la permutación tomando 3 de 9 objetos, ${}_9\mathrm{P}_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$. Por lo tanto, se pueden formar 504 números.

$${}_9\mathrm{P}_3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{3 \text{ factores}}$$

Problemas

1. ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 1 al 5?
2. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 caramelos de diferente sabor para 6 estudiantes, considerando que ningún estudiante recibe más de un caramelo?
3. Calcula la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero de un grupo de 6 personas.
4. Determina la cantidad de maneras que hay para sentar 5 personas en 3 asientos.
5. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar 5 personas en una fila, si una persona específica de ellas debe estar al inicio?

Indicador de logro:

2.5 Utiliza las permutaciones para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego que ya se han visto las herramientas y estrategias básicas para resolver problemas sobre conteo, se introduce la definición formal de permutación, el énfasis principal de esta clase no debe ser el cálculo, sino la comprensión, modelación y solución de los problemas utilizando las permutaciones.

Propósito:

En algunos libros de matemática, normalmente se hace la diferencia entre permutaciones y variaciones, las primeras como ordenamientos de todos los objetos de los que se dispone y las segundas como ordenamientos de una parte de estos objetos, sin embargo, en el libro de texto no se hace la diferencia para no introducir demasiadas definiciones que puedan confundir al estudiante, además de que no genera ningún problema definir las permutaciones como se hace en el libro de texto; esto se hace con el objetivo de enfatizar la resolución de los problemas, y que la notación o el cálculo no sean una dificultad extra para ello.

Solución de problemas:

1. Se pueden considerar los dos puestos como se hizo en la Solución del Problema inicial, es una permutación tomando 2 de 5 objetos, el primero tendrá 5 opciones (cualquiera de los 5 dígitos) y el segundo 4 (puesto que no se pueden repetir). Por lo tanto, se pueden formar ${}_5P_2 = 20$ números de 2 cifras sin repetir con los dígitos del 1 al 5.

$$\underset{\text{Primero}}{\underline{5}} \times \underset{\text{Segundo}}{\underline{4}}$$

2. En este problema hay que tener cuidado entre cuáles son los espacios en blanco y cuáles son los objetos que se colocarán, si se consideran los estudiantes como los espacios y se quieren colocar los caramelos como objetos, se vuelve un problema un poco más complicado que si se consideran los caramelos como los espacios y los estudiantes como los objetos, es una permutación tomando 3 de 6 objetos, para este último caso el primer caramelo tendría 6 opciones (ser dado a cualquiera de los 6 estudiantes), el segundo caramelo tendría 5 opciones (puesto que ningún estudiante recibe más de un caramelo, se saca el estudiante que recibe el primero), y finalmente el tercer caramelo tendría 4 opciones, por lo tanto, el total de maneras de repartir los 3 caramelos entre los 6 estudiantes es ${}_6P_3 = 120$.

3. Dado que los 3 puestos son diferentes, es una permutación tomando 3 de 6 objetos, para el presidente se tienen 6 opciones, para el vicepresidente 5 y para el tesorero se tienen 4, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden elegir los puestos de un grupo de 6 personas es ${}_6P_3 = 120$.

4. Considerando los asientos como los espacios en blanco, es una permutación tomando 3 de 5 objetos, en el primer asiento puede ir cualquiera de las 5 personas, luego el otro espacio tendrá 4 opciones, y el último espacio tendrá 3 opciones, por lo tanto, la cantidad de maneras que hay para sentar a 5 personas en 3 asientos es ${}_5P_3 = 60$.

$$\underset{\text{Asiento 1}}{\underline{5}} \times \underset{\text{Asiento 2}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Asiento 3}}{\underline{3}}$$

5. Dado que hay una persona específica que debe estar al inicio, se coloca dicha persona y luego se arreglan las demás, lo cual se puede hacer de 4!, por lo tanto, las 5 personas bajo estas condiciones se pueden arreglar de 4! = 24.

$$\text{Persona específica} \longrightarrow \underset{\text{Lugar 1}}{\underline{1}} \times \underset{\text{Lugar 2}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Lugar 3}}{\underline{3}} \times \underset{\text{Lugar 4}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Lugar 5}}{\underline{1}}$$

2.6 Permutaciones y métodos de conteo

Problema inicial

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niños y 4 niñas en fila, si todos los niños deben estar juntos.

Solución

Se puede considerar los niños como un solo bloque y luego arreglar únicamente 5 objetos en fila (las 4 niñas y el bloque de niños).

Niña	Niña	Niña	__ __ __ Niños	Niña

Se pueden ordenar los 5 elementos (las 4 niñas y el bloque de los niños) de 5! maneras, y luego, se puede ordenar el bloque de los niños de 3! maneras.

5	4	3	2	1
Niña	Niña	Niña	3 2 1 Niños	Niña

Y aplicando el principio de la multiplicación, se tiene que el total de maneras que hay para ordenar 3 niños y 4 niñas de modo que los 3 niños estén juntos es 5! × 3! = 720.

Conclusión

En permutaciones es común utilizar la estrategia de considerar un conjunto de elementos que deben ir juntos como un solo objeto, y ordenar tanto los elementos del bloque como todos los objetos, aplicando el principio de la multiplicación.

Ejemplo

Determina de cuántas maneras se pueden ordenar 3 hombres y 4 mujeres en fila, de tal manera que los hombres no estén a la par (uno a la par de otro).

Las maneras de colocar las 4 mujeres en una fila se puede hacer de 4! maneras. Entonces los hombres pueden estar en cualquiera de los espacios que se marcan en la figura de abajo.

___ Mujer ___ Mujer ___ Mujer ___ Mujer ___

Entonces los hombre se pueden arreglar separados de 5P3 maneras. Aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas para arreglar 3 hombres y 4 mujeres de modo que los hombres no están uno a la par de otro es 4! × 5P3 = 24 × 60 = 1 440.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ordenar 4 hombres y 3 mujeres, si los 4 hombres deben estar juntos siempre.
2. Se tiene 9 libros de historia y 6 de matemática (todos distintos), ¿cuántas formas hay para ordenar 5 libros en un estante si se debe cumplir que estos 5 libros son de una misma materia?
3. ¿Cuántas cadenas de 6 letras diferentes se pueden formar si las primeras 2 deben ser vocales y las últimas 4 consonantes utilizando las letras de la “a” a la “j”?
4. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila 4 hombres y 4 mujeres, si estos deben ir intercalados?
5. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 4 estudiantes en 6 sillas colocadas en una fila, si dos específicos de ellos siempre se sientan juntos (sin dejar sillas vacías de por medio)?

Indicador de logro:

2.6 Integra las permutaciones con los principios de la suma y la multiplicación para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego de utilizar el concepto de permutación para resolver problemas sobre conteo, en esta clase se resolverán problemas en los que se tengan que idear estrategias para modelar situaciones más complejas, además en algunos problemas será necesario aplicar los principios de la suma y multiplicación.

Propósito:

En los Problemas se utilizará la estrategia de considerar un conjunto de objetos como un solo elemento de otro conjunto, y se contarán las permutaciones tanto en el conjunto más pequeño como en el más grande, para ello será necesario aplicar el principio de la multiplicación, en otros problemas también se aplicará el principio de la suma.

Solución de problemas:

1. Analizando de manera análoga a como se resolvió el Problema inicial, considerando los 4 hombres juntos se pueden ordenar de 4! maneras, y luego considerando el conjunto de los 4 hombres como un solo elemento y agregando las 3 mujeres, esto se puede ordenar de (1 + 3)! = 4! maneras; por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas para ordenar 4 hombres y 3 mujeres, si los 4 hombres deben estar juntos siempre es 4! × 4! = 24 × 24 = 576.

$$\underset{\text{Mujer}}{\underline{4}} \times \underset{\text{Mujer}}{\underline{3}} \times \underset{\substack{\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1} \\ \text{Hombres}}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Mujer}}{\underline{1}}$$

En algunos problemas el cálculo exacto requiere calculadora, pero puede considerarse correcto si el estudiante deja indicados los factoriales y las permutaciones.

2. Para este problema se pueden dar dos casos que no pueden suceder al mismo tiempo, pueden ser libros de historia o de matemática; si se colocarán 5 de los 9 libros de historia en el estante, esto se puede hacer de ${}_9P_5$ = 15 120 maneras diferentes, por otro lado, si se colocaran 5 de los 6 libros de matemática en el estante, esto se puede hacer de ${}_6P_5$ = 720 maneras diferentes; por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de formas que hay para ordenar 5 libros en el estante bajo las condiciones del problemas es ${}_9P_5 + {}_6P_5$ = 15 120 + 720 = 15 840.

3. Para las primeras dos posiciones se tienen 3 vocales entre la "a" y la "j", es decir hay ${}_3P_2$ = 6 formas de ordenar la dos vocales que se requieren; además entre la "a" y la "j" hay 7 consonantes, entonces hay ${}_7P_4$ = 840 maneras de ordenar las últimas cuatro posiciones; por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de cadenas que se pueden formar es ${}_3P_2 \times {}_7P_4$ = 6 × 840 = 5 040.

4. Para cumplir las condiciones del problema se pueden dar dos casos, la fila puede comenzar con un hombre o con una mujer, para el primer caso los hombres se pueden ordenar de 4! maneras y las mujeres de 4! maneras, luego por el principio de la multiplicación se tiene que el primer caso tiene 4! × 4! maneras de suceder; y el segundo caso se analiza de manera análoga y puede darse también de 4! × 4! maneras; por lo tanto por el principio de la suma el total de maneras para ordenar intercaladamente 4 hombre y 4 mujeres es (4! × 4!) + (4! × 4!) = 2(4! × 4!) = 2(24 × 24) = 1 152.

5. Este problema es parecido al Problema inicial, y se pueden considerar los dos estudiantes que desean estar juntos como una sola persona, entre ellos se pueden ordenar de 2! maneras, y ahora habría que sentar (2 + 1) estudiantes, pero también hay que quitar una silla, porque se está considerando dos estudiantes como uno solo, luego el problema se reduce a sentar 3 estudiantes en 5 sillas, y esto puede suceder de ${}_5P_3$ maneras, finalmente por el principio de la multiplicación el total de maneras para sentar los 4 estudiantes en las 6 sillas bajo las condiciones del problema es $2! \times {}_5P_3$ = 2 × 60 = 120.

2.7 Permutaciones con repetición

Problema inicial

¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 4 y 5, si en el número se admiten dígitos repetidos?

Solución

Considerando los 5 espacios de las cifras del número:

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{UM}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{C}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{D}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{U}}{\underline{\quad}}$$

Entonces comenzando con las unidades, habrán 3 opciones (cualquiera de los números 2, 4 o 5).

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{UM}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{C}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{D}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{U}}{\underline{\ 3\ }}$$

Luego, para las decenas también habrán 3 opciones (dado que en el número se admiten dígitos repetidos).

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{UM}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{C}}{\underline{\quad}}\ \underset{\text{D}}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{\text{U}}{\underline{\ 3\ }}$$

Y análogamente para centenas, unidades y decenas de millar también habrán 3 opciones para cada uno.

$$\underset{\text{DM}}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{\text{UM}}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{\text{C}}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{\text{D}}{\underline{\ 3\ }} \times \underset{\text{U}}{\underline{\ 3\ }}$$

Por lo tanto, se pueden formar $3^5 = 241$ números de 5 cifras con los dígitos 2, 4 y 5 admitiendo repetición.

Conclusión

El total de formas que hay para formar cadenas de longitud r con n elementos que se pueden repetir en la cadena es: n^r.

Ejemplo

¿Cuántos subconjuntos se pueden formar de un conjunto con n elementos?

Tomando cada elemento del conjunto y considerando que para formar un subconjunto dicho elemento solo tiene dos opciones: estar en el subconjunto o no estar. Así para cada elemento de los n del conjunto se cumple que

$$\underset{\text{Elemento 1}}{\underline{\ 2\ }} \times \underset{\text{Elemento 2}}{\underline{\ 2\ }} \times \dots \times \underset{\text{Elemento } n-1}{\underline{\ 2\ }} \times \underset{\text{Elemento } n}{\underline{\ 2\ }}$$

Este resultado significa que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto de cardinalidad n es 2^n.

Por lo tanto, el total de subconjuntos que se pueden formar de un conjunto con n elementos es 2^n.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para colocar 3 letras en una fila utilizando a, b, c y d; considera que las letras se pueden repetir.

2. El código binario es una forma de representación numérica alternativa al sistema decimal, y es muy utilizado en el ambiente computacional porque solo utiliza dos dígitos o caracteres, el 0 y el 1 que se conocen como bits y resultan fáciles de almacenar en una computadora. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden representar en código binario.

3. Determina cuántos subconjuntos de A = {a, b, c, d, e, f} se pueden formar.

4. El número de la placa de un vehículo está conformada por 2 letras, que ocupan las primeras 2 posiciones, y 4 números. Si en una placa se pueden repetir tanto letras como números, y se pueden usar las letras A, B, C, D, E y los números del 1 al 9, determina cuántas placas se pueden elaborar con estas condiciones.

Indicador de logro:

2.7 Resuelve problemas sobre conteo aplicando permutaciones con repetición.

Secuencia:

Luego de haber combinado algunas herramientas como los principios de la suma y de la multiplicación y las permutaciones, ahora se puede introducir otro tipo de permutaciones, en las cuales se permite luego de haber colocado un objeto volverlo a colocar de nuevo.

Propósito:

En las soluciones a los Problemas, los estudiantes deben modelar una situación a partir de los conceptos sobre permutaciones, para resolverlos matemáticamente y luego interpretar la respuesta obtenida para dar solución al problema original.

Solución de problemas:

1. Puesto que las letras se pueden repetir es una permutación con repetición, y se colocan 3 de 4 objetos, para la primera posición se tendrán 4 opciones, para la segunda posición también habrán 4 opciones y para la tercera de igual manera 4 opciones, por lo tanto el total de formas que hay para colocar 3 de las 4 letras en una fila es $4^3 = 64$.

$$\underset{\text{Posición 1}}{\underline{\quad 4 \quad}} \times \underset{\text{Posición 2}}{\underline{\quad 4 \quad}} \times \underset{\text{Posición 3}}{\underline{\quad 4 \quad}}$$

2. Para el número que irá en la primera cifra solamente habrán 2 opciones (0 y 1 por estar en binario), la segunda cifra de manera análoga tendrá 2 opciones, y así sucesivamente hasta llegar a la séptima cifra, la cual también tendrá 2 opciones, por lo tanto, es una permutación con repetición, y se colocan 7 de 2 objetos, el total de números de 7 cifras que se pueden representar en código binario es $2^7 = 128$.

$$\underset{\text{Cifra 1}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 2}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 3}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 4}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 5}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 6}}{\underline{\quad 2 \quad}} \times \underset{\text{Cifra 7}}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

3. Para este problema se puede utilizar el resultado visto en el Ejemplo, o bien analizar de la misma manera, que cada elemento de este conjunto tiene dos opciones al formar un subconjunto (estar o no estar), y puesto que son 6 elementos, el total de subconjuntos del conjunto A es $2^6 = 64$.

4. Considerando que el problema menciona que las letras y los números se pueden repetir, para los espacios de las 2 letras hay 5 opciones, esto se puede hacer de 5^2 maneras; además para los espacios de los 4 números se tienen 9 opciones (los números del 1 al 9), y esto se puede hacer de 9^4 maneras; por lo tanto, utilizando el principio de la multiplicación se tiene que el total de placas que se pueden elaborar con las condiciones del problema son $5^2 \times 9^4 = 25 \times 6\,561 = 164\,025$.

$$\underset{\text{Letra}}{\underline{\quad 5 \quad}} \times \underset{\text{Letra}}{\underline{\quad 5 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}} \times \underset{\text{Número}}{\underline{\quad 9 \quad}}$$

En el último problema el cálculo exacto requiere uso de calculadora, pero puede considerarse correcto si el estudiante deja indicadas las potencias.

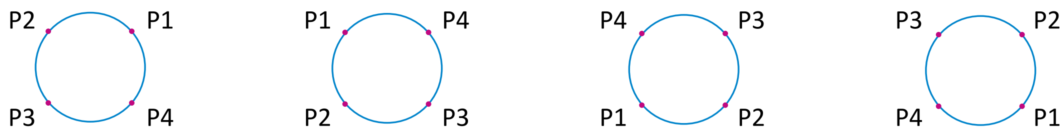
2.8 Permutaciones circulares

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda. Se considera el mismo arreglo cuando al girar un arreglo coincide con otro.

Solución

En este caso, considerando un arreglo particular, por ejemplo:



Dado que la mesa es redonda, los cuatro arreglos de arriba son equivalentes, es decir, solo cuentan por 1.

Entonces el mismo arreglo se puede rotar 4 veces (una vez por cada silla), entonces si consideramos arreglar a todas las personas como si fuera una fila, esto se puede hacer de 4! maneras, pero haciendo esto se estaría contando 4 veces cada ordenamiento, entonces el total de maneras en que se pueden sentar 4 personas en una mesa redonda es: $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ maneras.

En general

El total de permutaciones que se pueden realizar ordenando r de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{{}_nP_r}{r}.$$

En particular, el total de permutaciones de n objetos de manera circular está dado por:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ejemplo

Determina de cuántas formas se pueden ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda.

El total de formas en que se pueden ordenar 4 de 6 personas en una fila es ${}_6P_4$.

Dado que es un arreglo en una mesa redonda, en el total anterior se estaría contando 4 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas que hay para ordenar 4 de 6 personas en una mesa redonda es $\frac{{}_6P_4}{4} = 90$.

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden subir 7 niños a un carrusel con 7 caballitos todos idénticos?
2. En una mesa redonda hay 5 sillas y 7 personas (2 quedan paradas), determina de cuántas maneras se pueden sentar.
3. Cinco amigos juegan en una mesa redonda, determina de cuántas maneras se pueden ubicar, si 2 de ellos siempre quieren estar a la par.

Puedes utilizar el método visto en la clase 2.6.

4. Cuatro bailarines y cuatro bailarinas interpretan una danza en donde forman un círculo y se toman todos por las manos. ¿De cuántas formas pueden ubicarse los bailarines si en la danza deben aparecer alternadamente un hombre y una mujer?
5. Determina de cuántas formas pueden sentarse 4 parejas de novios si la pareja de cada persona debe estar justo en la posición de enfrente de la que se ubique.

Unidad 7

Indicador de logro:

2.8 Usa las permutaciones circulares para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Una vez abordados los problemas de conteo correspondientes a ordenar objetos de manera lineal, se puede hacer el abordaje de las permutaciones circulares, teniendo como punto de partida las clases anteriores.

Propósito:

Para analizar los problemas sobre permutaciones circulares, el procedimiento más eficiente es ordenar de manera lineal y descontar los ordenamientos que estarían repetidos al ordenar de manera circular.

Solución de problemas:

1. Es una permutación circular. Ordenándolos en fila habrían 7! maneras de hacerlo, y al considerar el arreglo de manera circular, cada arreglo circular se estaría contando 7 veces más en el arreglo en fila, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden subir los 7 niños al carrusel de 7 asientos es $\frac{7!}{7} = 6! = 720$.

Se recomienda que en la solución analicen el problema como se hizo en la Solución del Problema inicial, y que no solo apliquen la fórmula, en especial si no se recuerdan de la fórmula.

2. Considerando el caso de sentar las personas en 5 sillas en fila, la primera silla tendría 7 opciones, la segunda 6, y así sucesivamente, se tiene que las personas se podrían sentar de ${}_7P_5$ maneras, luego al colocar en forma circular se estaría contando cada arreglo 5 veces más, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda con 5 sillas quedando dos paradas es $\frac{{}_7P_5}{5}$, que se puede calcular $\frac{7 \times 6 \times \overset{1}{\cancel{5}} \times 4 \times 3}{\cancel{5}_1} = 504$.

3. Si estuvieran en fila se podrían ordenar de 4! × 2! (la pista remite al problema que se resolvió considerando las personas que querían estar juntas como una sola persona), únicamente hay que tener cuidado al considerar los arreglos circulares, puesto que para la resolución se ha trabajado como si fueran 4 personas, entonces se estaría contando 4 veces cada arreglo, por lo tanto, los amigos se pueden ubicar en la mesa redonda de $\frac{4! \times 2!}{4} = 3! \times 2 = 6 \times 2 = 12$.

En este problema sería un error dividir por 5 (porque inicialmente eran 5 personas), puesto que al ser contado como una sola persona se están quitando esas rotaciones, puede mencionarse que se analice el diagrama hecho en la clase 2.6 en el caso de ser circular.

4. Si se considera ordenar en fila, es un problema equivalente a colocar intercalados 4 hombres y 4 mujeres en una fila, el cual fue resuelto en el problema 4 de la clase 2.6, y cuya respuesta es 2(4! × 4!), luego al colocarlos en forma circular se estarían contando 8 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas en que se pueden ubicar los bailarines es $\frac{2(4! \times 4!)}{8} = 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$.

5. Si se arreglaran en una fila, significa que basta ordenar 4 personas (una de cada pareja) y los demás puestos quedarán determinados, luego estas 4 personas se pueden ordenar de 4! maneras, y considerando que cada una de las 4 se pueden alternar con su parejas, el total de manera de ubicar las personas en fila sería 4! × 2! × 2! × 2! × 2!, y al ubicarlo de manera circular, se estaría contando 8 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de formas en que pueden sentarse las 4 parejas en la mesa circular es

$$\frac{4! \times 2! \times \cancel{2}! \times \cancel{2}! \times \cancel{2}!}{\cancel{8}} = 4! \times 2! = 48.$$

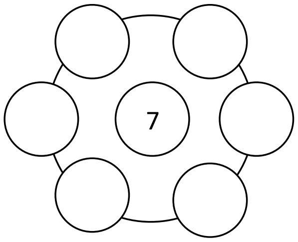
2.9 Configuraciones circulares*

Problema inicial

Determina de cuántas maneras se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda, si una persona se sienta en el centro y las otras 6 alrededor.

Solución

Considerando el siguiente esquema de la situación.



En este caso dependiendo de la persona que esté en el centro se considerará un arreglo (o caso) diferente, y luego por cada persona que esté en el centro se ubican 6 personas en forma circular, es decir, el total de maneras para sentar 7 personas con esta condición es: $7 \times (6 - 1)! = 7 \times 5! = 7 \times 120 = 840$.

Conclusión

Para contar las maneras en que se pueden ordenar objetos de forma circular puedes considerar 2 estrategias:

1) Ordenar los objetos en fila y determinar cuántas rotaciones se estarían contando de más.
2) Colocar un elemento que sirva de referencia y arreglar los demás en torno a él.

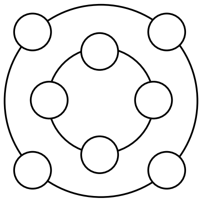
Problemas

1. Para discutir sobre "La mejora de los aprendizajes de matemática en El Salvador" se reúnen 12 personas en una mesa redonda, 3 japoneses, el Ministro de Educación de El Salvador y el Director Nacional de Educación Media, el resto son especialistas en Educación matemática. Determina de cuántas maneras se pueden sentar si:
   a) No importa el orden.
   b) Los 3 japoneses siempre están juntos, y el Director Nacional siempre está a la izquierda del Ministro.

2. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 6 personas en 9 sillas de una mesa redonda?

3. Se coloca una familia de 6 personas en una mesa redonda, determina de cuántas formas se pueden sentar si el padre y la madre se sientan frente a frente.

4. En un congreso sobre "Educación y prevención de enfermedades de transmisión sexual en adolescentes", asisten 8 personas que se sientan en dos ruedas, de 4 asientos cada una como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden sentar las 8 personas en los 8 asientos.



5. Determina de cuántas formas se puede colorear un cubo con 6 colores diferentes. Si se considera que si al rotar el cubo los colores coinciden con otra coloración, entonces la coloración es la misma.

190

Indicador de logro:

2.9 Establece una estrategia para resolver problemas sobre configuraciones circulares.

Secuencia:

Después de introducir las estrategias para hacer conteos en arreglos circulares, ahora se presenta una clase en donde es necesario plantear estrategias más complejas para contar los arreglos circulares, esta clase tiene asterisco, por lo que necesita mayor apoyo por parte del docente.

Propósito:

Esta clase se ha titulado como configuraciones circulares, porque son problemas (sobre variaciones) que requieren el uso de estrategias un poco más creativas respecto de los problemas de la clase anterior.

Solución de problemas:

1a) Puesto que son 12 personas en total, las personas se pueden ubicar de $(12 - 1)! = 11! = 39\,916\,800$.

1b) Al ordenar en fila, equivale a considerar a los japoneses como una sola persona, entre ellos se pueden ordenar de 3! maneras, y también considerar al Ministro de Educación de El Salvador y al Director Nacional de Educación Media como una sola persona, pero entre ellos no pueden cambiar de lugar puesto que el Director Nacional siempre está a la izquierda del Ministro, luego el total de maneras en que se podrían sentar si estuvieran en fila sería $9! \times 3!$; ahora considerando el arreglo circular se estaría contando cada orden 9 veces (recordar el problema 3 de la clase 2.8), por lo tanto, el total de maneras en que se pueden sentar las 12 personas es $\frac{9! \times 3!}{9} = 8! \times 3! = 40\,320 \times 6 = 241\,920$.

2. Si fueran 9 sillas en fila, las 6 personas se pueden sentar de ${}_9P_6$ maneras, luego puesto que en forma circular se estaría contando 9 veces cada arreglo, por lo tanto, el total de maneras en que se pueden sentar las 6 personas es $\frac{{}_9P_6}{9} = {}_8P_5 = 6\,720$.

3. Este problema es similar a cuando dos personas quieren estar juntas, es decir, en ese caso la posición de la otra persona está determinada por la posición de la primera, en este problema es similar, la diferencia es que la posición que determina es 2 puestos después de la posición de la primera persona, y se puede analizar de manera análoga, por lo cual, si se considera una fila se podría ordenar de $5! \times 2!$ maneras, y en los arreglos circulares se estarían contando 5 veces más cada arreglo, por lo tanto, el total de formas en que se puede sentar la familia es $\frac{5! \times 2!}{5} = 4! \times 2! = 48$.

4. Considerando sentar las 8 personas en una fila, esto se puede hacer de 8! maneras, luego en el arreglo circular interior (o exterior, depende cual se tome de referencia) se estaría contando cada arreglo 4 veces, y el total de formas en que se pueden ubicar las demás personas no sería una permutación circular, puesto que ya tendrían una referencia respecto las personas que están sentadas al interior, por lo que es equivalente a sentarse en una fila, por lo tanto, las 8 personas se pueden sentar de $\frac{8!}{4} = 2 \times 7! = 10\,080$.

5. En este problema se puede comenzar contando las formas en que se pueden colorear las caras laterales del cubo, puesto que son 4 y se tienen 6 colores, esto se puede hacer de $\frac{{}_6P_4}{4}$ maneras, ahora falta analizar qué sucede con las caras y los colores restantes, y hay que notar que no es relevante cómo colorear las caras restantes, puesto que al rotar y dejar la cara de abajo y arriba en las laterales se estarían contando dichas coloraciones, por lo tanto, el total de maneras en que se puede colorear el cubo es $\frac{{}_6P_4}{4}$.

2.10 Permutaciones con objetos idénticos*

Problema inicial

En el juego de boliche las bolas salen en fila y todas tienen el mismo tamaño y el mismo peso, determina todas las posibilidades de orden en que pueden salir 7 bolas de boliche si 2 son azules, 3 verdes y el resto negras.

Solución

Se puede considerar que el total de formas de ordenar las bolas es x.

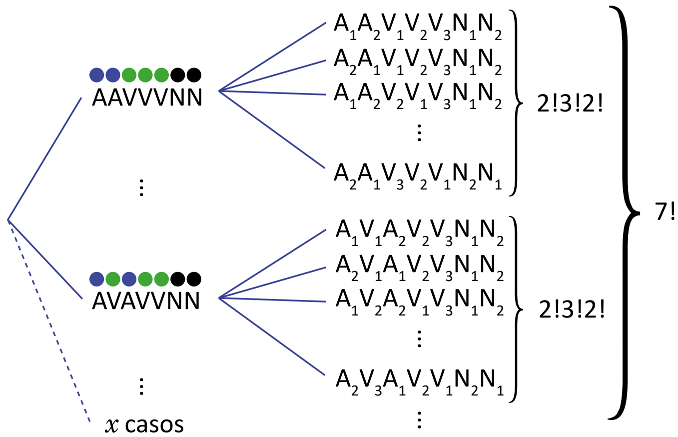
Si las bolas fueran diferentes, el total de maneras en que se pueden ordenar 7 bolas diferentes es 7!

Además, cada caso en que podrían salir las bolas tendría 2!3!2! formas diferentes de ordenarse (si fueran diferentes), como lo muestra la figura de la derecha.

Entonces se cumple que $7! = x(2!3!2!)$.

Por lo tanto, el total de formas (x) para ordenar 2 bolas azules, 3 verdes y 2 negras es:

$$x = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210.$$



En general

El total de permutaciones que se pueden realizar con n objetos si r_1 son de un tipo (todos idénticos), r_2 de otro tipo (todos idénticos también), hasta r_k de otro tipo, y cumplen que $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ está dado por:

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$$

Este resultado se conoce como **multicombinatorio**, porque se puede demostrar utilizando combinaciones.

Ejemplo

En el juego de ajedrez hay 16 piezas de color negro y 16 piezas de color blanco. Para cada color hay 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, 1 rey, 1 reina y 8 peones. Determina de cuántas maneras se pueden ordenar en fila 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, el rey y la reina de color blanco.

Considera que las piezas del mismo tipo tienen forma idéntica.

En total hay 8 piezas, y hay 2 torres idénticas, 2 caballos idénticos, 2 alfiles idénticos, entonces el total de formas que hay para ordenar estas piezas en fila es:

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5\,040.$$

Problemas

1. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar las letras de la palabra PATRIA?
2. Un barco manda señales utilizando banderas de colores. Si el barco tiene 3 banderas amarillas, 2 blancas y se colocan todas las banderas en fila para realizar una señal, ¿cuántas señales diferentes se pueden hacer?
3. Para formar una comisión de jóvenes que participará en un evento organizado por el Centro de Capacitación y Promoción de la Democracia (CECADE) se deben elegir 1 jefe representante, 2 suplentes y 4 delegados acompañantes. Determina de cuántas maneras se puede escoger la comisión de un grupo de 10 jóvenes.
4. Determina de cuántas maneras se pueden arreglar las 16 piezas negras del ajedrez, si se ubican de manera circular.

Unidad 7

Indicador de logro:

2.10 Determina la solución de problemas sobre conteo donde se involucren objetos repetidos.

Secuencia:

El último tipo de permutaciones que falta analizar son las permutaciones con objetos repetidos, se han dejado por último dada su complejidad y porqué el análisis que se lleva para resolver este tipo de problemas es muy semejante al razonamiento de las combinaciones de la próxima lección.

Propósito:

El énfasis de las permutaciones es ordenar los objetos que están repetidos, por el contrario en combinaciones el énfasis es escoger los espacios en donde irán los objetos repetidos, esta clase tiene asterisco porque se considera que la forma más comprensible de solucionar el Problema inicial es por medio de ecuaciones, y es probable que necesite mayor apoyo por parte del docente.

Solución de problemas:

1. Puesto que en total son 6 elementos y se repite 2 veces la letra A, el total de maneras en que se puede arreglar la palabra PATRIA es $\frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

2. El barco tiene en total 5 banderas, y hay 3 amarillas repetidas y 2 blancas repetidas, por lo tanto, el total de señales diferentes que se pueden hacer es $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$.

3. Si fueran 7 puestos diferentes, la comisión se podría escoger de ${}_{10}P_7$ maneras, sin embargo, hay 2 suplentes repetidos, y 4 delegados repetidos, por lo tanto el total de maneras en que se puede formar la comisión es $\frac{{}_{10}P_7}{2!\,4!} = 12\,600$.

4. Si las piezas se ubicaran en fila, serían 16 piezas en total 1 rey, 1 reina y habrían 2 torres repetidas, 2 caballos repetidos, 2 alfiles repetidos y 8 peones repetidos, entonces se podrían ordenar de $\frac{16!}{2!\,2!\,2!\,8!}$ maneras, y considerando que están en un arreglo circular, se tendría que dividir por 16 (la cantidad de veces que se está contando de más cada arreglo debido a la rotación), por lo tanto, el total de maneras de ubicar las 16 piezas negras del ajedrez de manera circular es $\frac{16!}{16 \times 2! \times 2! \times 2! \times 8!} = 4\,054\,050$.

En el problema 4 se divide por 16 debido a que existe al menos una pieza que es única (el rey o la reina).

En los últimos 2 problemas el cálculo exacto requiere calculadora, pero puede considerarse correcto si el estudiante deja indicado, es preferible enfatizar en el análisis de la situación que en el resultado numérico específico de cada situación.

2.11 Conteo por complemento

Problema inicial

En una fábrica se cuenta con 6 ventiladores; debido a que siempre se necesita que el lugar se mantenga fresco, al menos un ventilador se mantiene encendido. Determina cuántas formas hay para satisfacer esta condición.

Solución

Todos los posibles casos que se pueden dar son, que solo un ventilador esté encendido, que 2 de los 6 ventiladores estén encendidos, y así sucesivamente hasta el caso que los 6 ventiladores estén encendidos.

Para contar todas las formas posibles en que estará al menos un ventilador encendido, se pueden contar todas las maneras en que se pueden encontrar los ventiladores, es decir, como cada ventilador tiene 2 opciones (estar apagado o encendido), todas las posibles maneras en que se pueden encontrar los ventiladores son 2^6.

Y el único caso que no cumple es cuando todos los ventiladores están apagados, es decir 1 caso. Por lo tanto, el total de maneras en que al menos un ventilador está encendido es: $2^6 - 1 = 63$.

Conclusión

En ocasiones, la cantidad de casos que se pueden dar para que un evento o condición A suceda son demasiados y se vuelve difícil contarlos. Sin embargo, en ocasiones puede ser más fácil contar lo que no se pide, es decir, el complemento de lo que se quiere, y restárselo al total de maneras de ordenar todos los objetos sin condiciones. Denotando el conjunto de todos los casos posibles por U se tiene que

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{U} \text{ y } n(\mathrm{U}) \text{ es finito, entonces } n(\mathrm{A}) = n(\mathrm{U}) - n(\mathrm{A}^c)$$

Ejemplo

Determina cuántas formas hay para ordenar 3 niñas y 3 niños si no pueden estar las 3 niñas juntas.

Contando los casos en que las 3 niñas están siempre juntas, esto se puede hacer de $4! \times 3!$ maneras.

Y los 3 niños y 3 niñas (6 en total) se pueden ordenar de 6! maneras.

Entonces, restándole al total de maneras de ordenar los 6 niños las formas en que las 3 niñas siempre están juntas da como resultado $6! - 3! \times 4! = 4!(30 - 3!) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(30 - 6) = 576$. Por lo tanto, se pueden ordenar de 576 formas diferentes.

Problemas

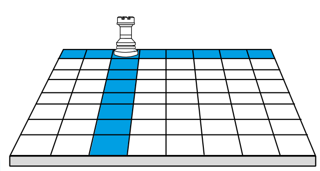
1. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden formar en código binario (utilizando los dígitos 0 y 1) de modo que la multiplicación de todos los dígitos del número sea cero.

2. Se colocan 4 cifras del 1 al 4 en una fila, permitiendo repetir las cifras. Determina el número de filas que tienen al menos dos cifras iguales.

3. Hay 4 niñas y 2 niños, determina de cuántas maneras se pueden colocar los 6 en una fila, de modo que los niños no estén juntos.

4. En el juego de ajedrez la torre puede atacar a otra pieza que se encuentra en línea recta en un tablero de 8×8, como lo muestra la figura. Determina de cuántas maneras se pueden ubicar 2 torres para que no se ataquen si:

   a) Una torre es negra y la otra blanca.
   b) Ambas torres son del mismo color.



Para el literal b considera que las torres del mismo color sí se pueden atacar.

Indicador de logro:

2.11 Aplica el conteo por el complemento para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Una vez establecidos los diferentes tipos de permutaciones que pueden haber, se analizará una estrategia muy útil para hacer conteos, como lo es el conteo por el complemento, lo cual también será útil en la unidad de probabilidad.

Propósito:

A lo largo de todas las clases anteriores el estudiante ha estado habituado a contar directamente lo que pide el problema, sin embargo en esta clase la intención es que el estudiante cuente lo que no se le pide y se lo reste al total.

Solución de problemas:

1. Para que la multiplicación de todos los dígitos sea 0, pueden darse muchos casos, que sea uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis o siete ceros, sin embargo, para que la multiplicación no sea cero solamente hay un caso (que sean todos unos), entonces, si al total de cadenas de 7 cifras binarias se le resta la cadena cuya multiplicación de los dígitos es diferente de cero, por lo tanto, el total de números de 7 cifras en código binario cuya multiplicación da cero es $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.

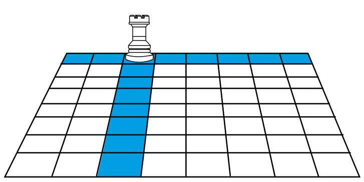
La cantidad de cadenas de 7 cifras que se pueden formar en código binario fue calculada en el problema 2 de la clase 2.7.

2. Puesto que el total de filas de 4 cifras con las condiciones del problema sería 4^4, si a este total se le resta el número de filas que no tienen cifras iguales, lo cual se puede lograr de 4! maneras, se tendrá que, por lo tanto, el total de filas de 4 cifras formadas con los dígitos del 1 al 4 y tienen al menos dos cifras iguales es $4^4 - 4! = 256 - 24 = 232$.

3. El total de formas de ordenar las 4 niñas y los 2 niños es 6!, si a este total se le resta el número de formas en que los niños están todos juntos, dará como resultado el total de maneras en que se puede colocar los 6 en una fila de modo que los niños no están juntos, y puesto que hay $5! \times 2!$ maneras en que los niños aparecen juntos en la fila (utilizando la estrategia de ver el conjunto de los niños como una sola persona), se tiene que el total de maneras de colocarlos en la fila con las condiciones del problema es $6! - 5! \times 2! = 720 - 240 = 480$.

4a) Puesto que es un tablero de 8×8, si se considera que la primera torre tiene 64 lugares en donde se puede poner, y la segunda tendrá 63, el total de maneras en que se puede colocar dos torres diferentes en el tablero es $_{64}P_2$, ahora si a este total se resta la cantidad de formas que hay para que las torres se ataquen, da como resultado la cantidad de formas que hay para que no se ataquen, pero para que ambas se ataquen la primera torre tendrá 64 opciones, sin embargo la segunda torre, independientemente de donde se coloque la primera, siempre tendrá 14 opciones (utilizar la ilustración), entonces hay 64×14 maneras de ubicar las torres para que se ataquen, por lo tanto el total de maneras de ubicar 2 torres diferentes para que no se ataquen es $_{64}P_2 - 64 \times 14 = 3\,136$, o bien considerar los 64 lugares para poner la primera y $(64 - 15)$ lugares para poner la segunda, que es $64(64 - 15) = 3\,136$.

4b) En a), puesto que las torres son diferentes, se contarían dos casos cuando se toman dos casillas para las torres (intercambiando posiciones), sin embargo, puesto que para este literal las torres se consideran idénticas, se estaría contando dos veces cada caso, por lo tanto, si las torres son idénticas el total es $\frac{_{64}P_2 - 64 \times 14}{2} = \frac{3\,136}{2} = 1\,568$.

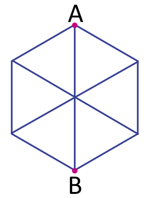


2.12 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de permutaciones.

1. En un congreso sobre "Oportunidades para jóvenes con discapacidad" participan 10 personas que hablan español, 15 que hablan inglés, 14 que hablan francés, y entre ellas 5 hablan español e inglés, 7 hablan inglés y francés, 4 hablan español y francés, y hay 2 personas que hablan los tres idiomas. Determina cuántas personas asistieron al congreso.

2. En la figura se muestra un hexágono regular cuyo lado mide 1 cm. Determina de cuántas maneras se puede unir el punto A con el punto B usando 3 segmentos de longitud 1 cm.



3. En una competencia de atletismo participan 3 personas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar los atletas, si pueden haber incluso empates triples?

4. Determina el valor de x en la ecuación $x! = 72(x - 2)!$

5. Hay 4 niños y 5 niñas, y se colocan 4 de ellos en una fila de modo que en cada extremo hay un niño y en las posiciones centrales hay niñas. Determina de cuántas maneras se puede formar la fila de 4 personas.

6. Hay 7 tarjetas numeradas del 0 al 6, de ellas se sacan 4 y se colocan en fila, determina cuántos números múltiplos de 5 se pueden formar al tomar las tarjetas como dígitos del número, considerando que el primer dígito de izquierda a derecha no puede ser cero.

Para que un número sea múltiplo de 5, el valor de las unidades debe ser 0 o 5.

7. Determina cuántas formas hay para repartir 10 dulces de diferente sabor entre 3 niños, si puede darse el caso que se den todos los dulces a un solo niño.

8. En una clase hay 4 grupos formados por 3 niños y 2 niñas cada uno, determina cuántas maneras hay para ubicar cada grupo en filas de asientos diferentes si además tanto los niños como las niñas de cada grupo deben estar siempre juntos.

9. ¿De cuántas formas se pueden ubicar en un estante 3 libros de 7° grado (iguales), 6 libros de 8° (iguales) y 4 de 9° (iguales), si los de 8° deben estar todos juntos?

10. Determina de cuántas formas se pueden ubicar circularmente 7 personas si:

   a) Dos de ellas están juntas.
   b) Dos de ellas no están a la par.

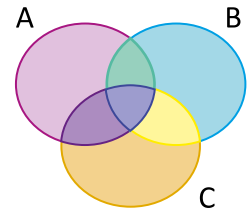
Indicador de logro:

2.12 Resuelve problemas correspondientes a las permutaciones.

Solución de problemas:

1. Considerando los conjuntos A = {p | p es una persona que habla español}, B = {p | p es una persona que habla inglés}, C = {p | p es una persona que habla francés}, para resolver este problema sería necesario calcular la cardinalidad de la unión de los conjunto A, B y C, y para ello se puede utilizar un diagrama de Venn como el que se muestra en la figura.

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$.



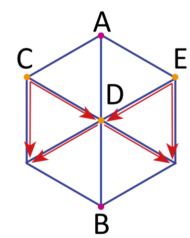
Y del problema se puede extraer la siguiente información:

$n(A) = 10$, $n(B) = 15$, $n(C) = 14$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B \cap C) = 7$, $n(C \cap A) = 4$ y $n(A \cap B \cap C) = 2$, luego:

$n(A \cup B \cup C) = 10 + 15 + 14 - 5 - 7 - 4 + 2 = 25$.

Por lo tanto, al evento asistieron 25 personas en total.

2. Dado que es un hexágono regular, los triángulos que se forman son equiláteros. Ahora, estando en el punto A hay 3 opciones, luego llegando a cualquiera de los puntos anaranjados (C, D y E), se tienen 2 opciones en cada punto (puesto que del centro del hexágono no se puede ir directo al punto B, porque deben ser 3 segmentos de longitud 1) y finalmente solamente hay una opción, por lo tanto el total de maneras para unir el punto A y el B usando 3 segmentos es $3 \times 2 \times 1 = 6$.



3. Caso 1: Llegan todos juntos, lo cual puede suceder de 1 manera.

Caso 2: LLegan dos en primer lugar y uno en segundo, lo cual puede suceder de $\frac{3!}{2!}$ maneras.

Caso 3: LLega uno en primer lugar y dos en segundo, lo cual puede suceder de $\frac{3!}{2!}$ maneras también.

Caso 4: Los 3 llegan en puestos diferentes, lo cual puede suceder de 3! maneras.

Por lo tanto, aplicando el principio de la suma, el total de maneras diferentes en que pueden llegar los atletas es $1 + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = 1 + 3 + 3 + 6 = 13$.

4. $x! = 72(x-2)! \Rightarrow x(x-1)\cancel{(x-2)!} = 72\cancel{(x-2)!} \Rightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 9$.

5. Los niños de los extremos se pueden colocar de ${}_4P_2$ maneras, y las niñas en las posiciones centrales de ${}_5P_2$ maneras, por lo tanto, por el principio de la multiplicación el total de maneras es ${}_4P_2 \times {}_5P_2 = 240$.

6. El último dígito tiene 2 opciones (0 o 5), si es 0, los restantes 3 se pueden ordenar de ${}_6P_3$ maneras, y si es 5, los restantes 3 se pueden ordenar de $5 \times {}_5P_2$, por lo tanto el total es ${}_6P_3 + 5 \times {}_5P_2 = 220$.

7. Cada dulce tiene 3 opciones (cualquiera de los 3 niños), por lo tanto el total de formas es $3^{10} = 59\,049$.

8. Los estudiantes de cada fila se pueden ordenar de $3! \times 2! \times 2!$ maneras, y los grupos se puede ordenar de 4! maneras, por lo tanto, el total de maneras es $4! \times (3! \times 2! \times 2!) = 24 \times 24 = 576$.

9. Si fueran todos diferentes y considerando los de 8° como un solo objeto, se podrían ordenar de 8! maneras, puesto que hay objetos repetidos el total es $\frac{8!}{3!\,4!} = 280$.

10a) Si se ordenaran en fila se podría hacer de $2! \times 6!$, pero se estaría contando 6 veces cada caso, por lo tanto, el total de formas es $\frac{2!\,6!}{6} = 2 \times 120 = 240$.

10b) Utilizando el complemento, se sabe que las 7 personas se pueden sentar de $(7-1)!$ maneras, si a esto se le resta lo calculado en el literal anterior resulta que el total es $6! - 2 \times 5! = 4 \times 5! = 480$.

3.1 Combinaciones

Problema inicial

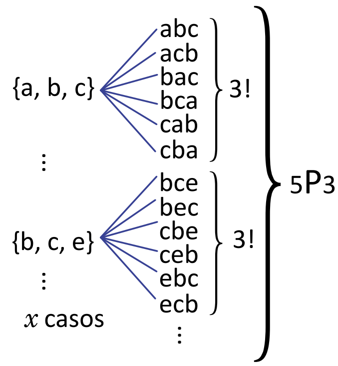
Determina de cuántas formas se pueden seleccionar 3 letras del siguiente conjunto {a, b, c, d, e}.

Solución

Tomando x como el total de formas de seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e}.

Dado que en una selección de 3 letras no importa en que orden se haga, entonces cada selección multiplicada por 3! dará como resultado todas las formas de ordenar 3 de las 5 letras, es decir, $x(3!) = {}_5P_3$.

Por lo tanto, el total de formas que hay para seleccionar 3 letras del conjunto {a, b, c, d, e} es: $x = \frac{{}_5P_3}{3!} = 10.$



Conclusión

Una selección de objetos donde el orden no importa se conoce como **combinación**.

Una combinación a menudo está relacionada con la forma de escoger un grupo de objetos, porque en este sentido no importa el orden, sino el conjunto final de objetos que se elija.

El número total de combinaciones que se pueden realizar escogiendo r objetos entre un conjunto de n objetos, con $0 \leq r \leq n$ está dado por: $\frac{{}_nP_r}{r!}$.

Este número total de combinaciones se denota por ${}_nC_r$, y se lee "n combino r", es decir:

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!r!}. $$

Observa que ${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1.$

Observa que ${}_nC_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$ y es equivalente de n objetos distintos escoger r que se sacan o escoger $n - r$ que se dejan.

Ejemplo

En una bolsa hay 3 pelotas rojas (iguales) y 4 pelotas verdes (iguales), determina de cuántas formas se pueden ordenar en una fila las 7 pelotas.

Se puede considerar que se tienen 7 espacios en la fila, entonces será suficiente escoger en cuáles espacios irán las bolas rojas (las bolas azules irán en los espacios restantes), y esto se puede hacer de ${}_7C_3$:

$$ {}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35 $$

3 factores
$$ {}_7C_3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} $$
3 factores

Por lo tanto, las 7 pelotas se pueden ordenar de 35 formas diferentes.

Este problema se puede resolver utilizando permutaciones o combinaciones, dependiendo si se toma de referencia los objetos o los espacios de los objetos.

Problemas

1. ¿Cuántos licuados diferentes se pueden hacer combinando 2 frutas que pueden ser fresa, melón, zapote, guayaba, papaya y mango? ¿Cuántos con 3 frutas?

2. Se tienen 5 puntos en el plano cartesiano de modo que no hay 3 de ellos alineados. Determina cuántos segmentos de recta que unan 2 de dichos puntos se pueden trazar.

3. Se tiene el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos de sus subconjuntos tienen solo un número? ¿Cuántos dos números? ¿Cuántos tres números? ¿Cuántos cuatro números? ¿Cinco números? ¿Y ningún número?

Indicador de logro:

3.1 Utiliza las combinaciones para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

En esta clase se da la definición de las combinaciones, partiendo de la idea de escoger elementos de un conjunto dado, el abordaje que se considera más comprensible es por medio de ecuaciones. Esta clase tiene asterisco, debido a la complejidad de la Solución, por lo cual requiere mayor apoyo del docente.

Posibles dificultades:

Siempre causa dificultad que los estudiantes logren identificar la diferencia entre combinaciones y permutaciones, se recomienda que siempre se aclare que la idea principal de las permutaciones es ordenar y la de las combinaciones es escoger, por lo que en las permutaciones el orden es importante y en las combinaciones no.

Solución de problemas:

Se recomienda que los estudiantes prioricen el análisis de los problemas que el cálculo de los combinatorios, la solución de un problema puede considerarse correcta si se dejan indicados los combinatorios, si el tiempo es suficiente se puede pedir que apliquen la fórmula para calcular el valor numérico.

1. Puesto que hay 6 frutas diferentes de las cuales hay que escoger 2, se puede hacer de $6C2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ maneras. Y combinando 3 frutas se pueden hacer $6C3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$.

2. Para trazar una línea es necesario al menos 2 puntos, y puesto que no existen 3 puntos alineados, basta con combinar 2 de los 5 puntos del plano, por lo tanto, el total de segmentos de recta que se pueden trazar es $5C2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$.

3. El conjunto tiene 5 elementos, y formar subconjuntos de un solo número equivale al total de maneras que hay para tomar 1 elemento de los 5 del conjunto, por lo tanto, hay $5C1 = 5$ subconjuntos con un solo número.

Análogamente para subconjuntos de dos números, equivale al total de maneras que hay para tomar 2 elementos de los 5, es decir $5C2 = 10$ subconjuntos con dos números.

De igual modo para subconjuntos con tres, cuatro y cinco números serán $5C3 = 10$, $5C4 = 5$ y $5C5 = 1$ subconjuntos con tres, cuatro y cinco números respectivamente. Y para los subconjuntos con ningún número (subconjunto vacío) equivale a escoger 0 de los 5 elementos, es decir, $5C0 = 1$.

El problema 3 y el Ejemplo de la clase 2.8 ayudarán a realizar la demostración de la identidad combinatoria $nC0 + nC1 + nC2 + \cdots + nC(n-2) + nC(n-1) + nCn = 2^n$.

3.2 Combinaciones y principios de conteo

Problema inicial

Se dispone de un grupo de 5 mujeres y 3 hombres, resuelve:

a) ¿Cuántas formas hay para escoger 2 personas, si ambas tienen que ser del mismo sexo?

b) ¿Cuántas formas hay para escoger 4 personas, de modo que sean 2 hombres y 2 mujeres?

Solución

a) Para esta situación se pueden dar 2 casos:

Caso 1: pueden ser 2 mujeres, estas se pueden elegir de ${}_5C_2$ maneras diferentes.

Caso 2: pueden ser 2 hombre, estos se pueden elegir de ${}_3C_2$ maneras diferentes.

Por lo tanto, por el principio de la suma, el total de formas para escoger 2 personas, ambas del mismo sexo es: ${}_5C_2 + {}_3C_2 = 10 + 3 = 13$.

b) Primero se pueden elegir las mujeres de ${}_5C_2$ maneras. Luego por cada forma de escoger las mujeres hay ${}_3C_2$ maneras para escoger los hombres.

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de formas para escoger 4 personas (2 de un sexo y 2 de otro sexo) es: ${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$.

Conclusión

En algunas situaciones será necesario aplicar los principios de suma y multiplicación a las combinaciones para contar todos los casos. Además, en las permutaciones puede analizarse cómo escoger los objetos que se ordenarán para luego ordenarlos.

Ejemplo

Se tienen 7 libros de matemática (todos diferentes) y 5 sobre derechos de la niñez y la adolescencia (todos diferentes). Determina de cuántas formas se pueden ordenar 3 libros de matemática y 2 sobre derechos de la niñez y la adolescencia en un estante.

Se pueden elegir primero los 3 libros de matemática, esto se puede hacer de ${}_7C_3$ formas, y luego se eligen los 2 libros sobre derechos de la niñez y la adolescencia, esto se puede hacer de ${}_5C_2$ formas.

Finalmente los libros se pueden ordenar de 5! formas. Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de maneras para ordenar todos los libros es: ${}_7C_3 \times {}_5C_2 \times 5! = 35 \times 10 \times 120 = 42\,000$.

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para ubicar 2 niños y 3 niñas en una fila, escogiendólos de un grupo de 3 niños y 4 niñas.

2. De un grupo de 6 hombres y 4 mujeres se desea formar una comisión de tres personas, determina cuántas comisiones distintas se pueden formar si:

a) No hay restricciones.

b) Debe haber solo hombres o solo mujeres.

c) Debe haber dos hombres y una mujer.

d) Debe haber al menos una mujer.

Indicador de logro:

3.2 Integra las combinaciones con los principios de la suma y la multiplicación para resolver problemas sobre conteo.

Secuencia:

Luego de utilizar el concepto de combinación para resolver problemas sobre conteo, en esta clase se resolverán problemas en los que se tengan que idear estrategias para modelar situaciones más complejas, en las que será necesario aplicar los principios de la suma y multiplicación.

Propósito:

Para esta clase puede haber diversidad de problemas, por ello se propone un Ejemplo en donde se presente otra forma de razonar de manera combinatoria, los Problemas tienen mucha correspondencia con los resueltos durante la clase.

Solución de problemas:

1. De manera parecida al Ejemplo de los libros, para seleccionar 2 de los 3 niños se puede hacer de ${}_{3}C_{2}$ maneras, y para seleccionar 3 de las 4 niñas se puede hacer de ${}_{4}C_{3}$ maneras, luego una vez seleccionados se deben ordenar los 5 niños, y esto se puede hacer de 5! maneras, por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de formas en que se pueden ubicar los 2 niños y 3 niñas con las condiciones del problema es ${}_{3}C_{2} \times {}_{4}C_{3} \times 5! = 3 \times 4 \times 120 = 1\,440$.

2a) Puesto que son 10 personas en total, basta con seleccionar 3 de estas 10 personas, por lo tanto, si no hay restricciones, la comisión se puede formar de ${}_{10}C_{3} = 120$ maneras.

2b) Hay dos casos, para que sean solo hombres basta con seleccionar los 3 integrantes de entre los 6 hombre, es decir, ${}_{6}C_{3}$; y para que sean solo mujeres es necesario solamente seleccionar las 3 integrantes de entre las 4 mujeres, es decir, ${}_{4}C_{3}$, por lo tanto, como los dos casos no pueden ocurrir al mismo tiempo, por el principio de la suma se tiene que el total de maneras de formar la comisión es ${}_{6}C_{3} + {}_{4}C_{3} = 20 + 4 = 24$.

2c) Los dos hombres se pueden seleccionar de ${}_{6}C_{2}$ maneras y la mujer se puede seleccionar de ${}_{4}C_{1}$ maneras, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras para formar la comisión es ${}_{6}C_{2} \times {}_{4}C_{1} = 15 \times 4 = 60$.

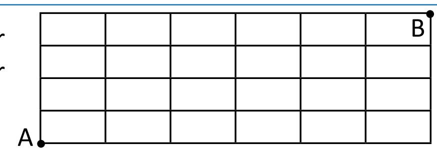
2d) Para este literal se puede utilizar el conteo por el complemento, pues para que haya el menos una mujer hay 3 casos (que haya 1, 2 o 3 mujeres) pero si se tiene el total de maneras que hay para formar la comisión (calculado en el literal a de este problema) y se le resta cuando la comisión está conformada solo por hombres (calculado en el literal c de este problema), se tendrá lo deseado, por lo tanto, el total de maneras para formar la comisión es ${}_{10}C_{3} - {}_{6}C_{3} = 120 - 20 = 100$.

También se podría considerar válido contar los tres casos y aplicar el principio de la suma, y el resultado es exactamente el mismo (${}_{4}C_{1} \times {}_{6}C_{2} + {}_{4}C_{2} \times {}_{6}C_{1} + {}_{4}C_{3} = 60 + 36 + 4 = 100$).

3.3 Conteo de caminos

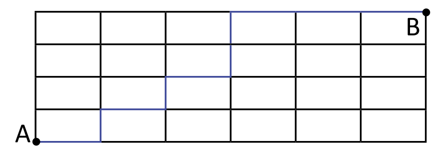
Problema inicial

La cuadrícula de la derecha representa las calles de Sonsonate por las que se puede conducir, determina de cuántas formas puede ir una persona desde el punto A al punto B por el camino más corto.



Solución

Para que un camino sea de longitud mínima debe moverse únicamente hacia la derecha y hacia arriba (sino se estaría regresando), entonces el problema se resume a hacer una cadena de 6 + 4 = 10 pasos, de los cuáles 4 son verticales y 6 son horizontales.



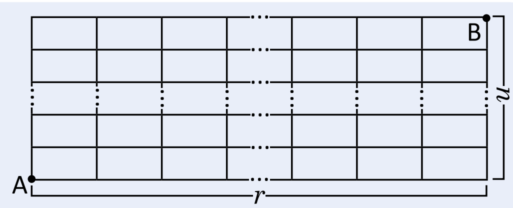
Para ello, basta con escoger donde irán los 6 pasos hacia la derecha, y esto se puede hacer de ${}_{10}C_6$ formas.

Por lo tanto, el total de caminos más cortos para llegar del punto A al punto B es: ${}_{10}C_6 = 210$.

Conclusión

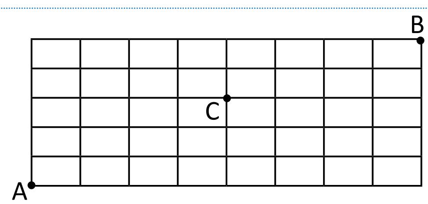
En una cuadrícula de $n \times r$ celdas, para determinar el total de caminos más cortos que van del punto A al punto B se pueden usar combinaciones, y el total será igual a: ${}_{(n+r)}C_r$.

Esta construcción por caminos puede ser muy útil para la demostración de algunas identidades combinatorias.



Ejemplo

Determina de cuántas formas se puede ir desde el punto A hasta el punto B por el camino más corto si se debe pasar por el punto C.



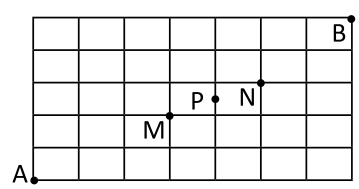
Para llegar de A a C se tienen que dar 4 pasos horizontales y 3 verticales, entonces hay un total de ${}_7C_4$ caminos de longitud mínima. Luego para llegar de C a B hay ${}_6C_4$ caminos de longitud mínima.

Por lo tanto, aplicando el principio de la multiplicación, el total de caminos de longitud mínima que van de A hacia B pasando por C son ${}_7C_4 \times {}_6C_4 = 35 \times 15 = 525$.

Problemas

Para la siguiente cuadrícula, determina cuántos caminos de longitud mínima hay que

a) Llevan de A a B.
b) Llevan de A a B pasando por M.
c) Llevan de A a B pasando por N.
d) Llevan de A a B pasando por M y N.
e) Llevan de A a B pasando por M o N.
f) Llevan de A a B y no pasan por M ni por N.
g) Llevan de A a B pasando por P.



Indicador de logro:

3.3 Determina la cantidad de caminos de longitud mínima para ir de un punto A a un punto B dentro de una cuadrícula.

Secuencia:

Ahora que ya se conoce el concepto de combinación, se pueden comenzar a introducir algunas aplicaciones de las combinaciones a diferentes contextos, uno de ellos es el conteo de caminos de longitud mínima en una cuadrícula.

Propósito:

En esta clase se pretende afianzar el concepto de combinación, y el uso de los principios de suma y multiplicación en un contexto un poco más gráfico y que puede ser un modelamiento de las calles y avenidas de una país, las cuales idealmente deben constituirse en forma de cuadrícula.

Solución de problemas:

a) Puesto que se deben hacer 7 pasos horizontales y 5 verticales, en total se deben hacer 12 pasos, y seleccionando en cuáles de los 12 pasos se harán los horizontales, se tiene que hay ${}_{12}C_{7} = 792$ caminos que llevan de A a B.

b) Para llegar de A a M hay ${}_{(3 + 2)}C_{3}$ maneras, y por cada una de ellas hay ${}_{(4 + 3)}C_{4}$ maneras para llegar de M a B, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de caminos que llevan de A a B pasando por M es ${}_{5}C_{3} \times {}_{7}C_{4} = 10 \times 35 = 350$.

c) Para llegar de A a N hay ${}_{(5 + 3)}C_{5}$ maneras, y por cada una de ellas hay ${}_{(2 + 2)}C_{2}$ maneras para llegar de N a B, por lo tanto por el principio de la multiplicación, el total de caminos que llevan de A a B pasando por N es ${}_{8}C_{5} \times {}_{4}C_{2} = 56 \times 6 = 336$.

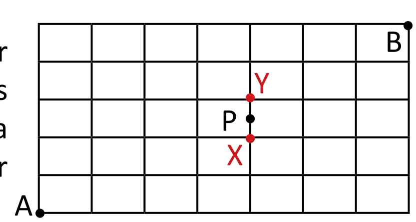
d) Para llegar de A a M hay ${}_{(3 + 2)}C_{3}$ maneras, y por cada una de ellas hay ${}_{(2 + 1)}C_{2}$ maneras de llegar de M a N, y por cada una de ellas hay ${}_{(2 + 2)}C_{2}$ maneras de llegar de N a B, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de caminos que llevan de A a B pasando por M y N a la misma vez es ${}_{5}C_{3} \times {}_{3}C_{2} \times {}_{4}C_{2} = 10 \times 3 \times 6 = 180$.

e) Del literal b se sabe cuántos caminos de A a B pasan por M y del literal c se tienen los que pasan por N, sin embargo se estaría contando dos veces los que pasan por M y N a la misma vez (una cuando se cuentan los caminos de M a B en el literal b y otra cuando se cuentan los caminos de A a N en el literal c), por lo tanto, el total de caminos que llevan de A a B y pasan por M o N es $({}_{5}C_{3} \times {}_{7}C_{4}) + ({}_{8}C_{5} \times {}_{4}C_{2}) - ({}_{5}C_{3} \times {}_{3}C_{2} \times {}_{4}C_{2}) = 350 + 336 - 180 = 506$.

El análisis de este literal es análogo al resultado que se tiene para conjuntos $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, y también se puede resolver utilizando conjuntos.

f) Puesto que ya se tiene el total de caminos de A a B del literal a, y se tiene también el total de caminos de A a B que pasan por M o N, se puede utilizar el conteo por el complemento, por lo tanto, el total de caminos de A a B que no pasan ni por M ni por N es ${}_{12}C_{7} - 506 = 792 - 506 = 286$.

g) Para asegurar pasar por P, es necesario llegar al punto X y luego partir del punto Y, puesto que para llegar de A a X hay ${}_{(4 + 2)}C_{4}$ caminos y para llegar de Y a B hay ${}_{(3 + 2)}C_{3}$ caminos, por el principio de la multiplicación se tendrá que el total de caminos de A a B pasando por P es ${}_{6}C_{4} \times {}_{5}C_{3} = 15 \times 10 = 150$.



3.4 Demostraciones utilizando conteo de caminos*

Problema inicial

Demuestra utilizando un argumento por caminos, la propiedad recursiva de Pascal:

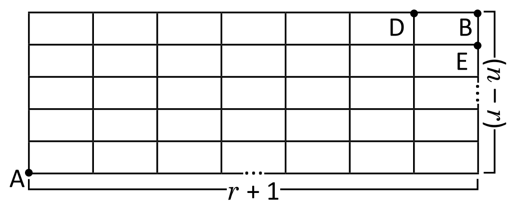
$$(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1) \text{ con } n \geq r$$

Solución

Considerando una cuadrícula de dimensión $(n-r) \times (r+1)$, y considerando que para llegar del punto A al punto B solo hay dos casos, pasando por el punto D o pasando por el punto E.

El total de maneras para llegar de A hasta B es $(n+1)\mathrm{C}(r+1)$, debido a que $(n-r)+(r+1) = n+1$.

Además, para llegar al punto D hay $n\mathrm{C}r$ maneras, debido a que $(n-r)+r = n$.



Y para llegar al punto E hay $n\mathrm{C}(r+1)$ maneras, debido a que $(n-r-1)+(r+1) = n$.

Por lo tanto, $(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$.

Conclusión

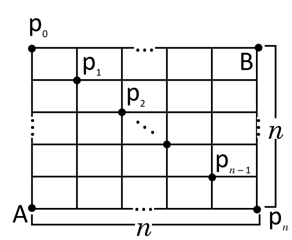
Para demostrar algunas identidades combinatorias se puede utilizar el conteo de caminos, para ello hay que crear una cuadrícula que se adecúe a la situación y luego contar los caminos de dos maneras diferentes.

Ejemplo

Demuestra la identidad utilizando un argumento por caminos:

$$(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = 2n\mathrm{C}n$$

Considerando una cuadrícula de $n \times n$, entonces el total de caminos de longitud mínima que hay para llegar de A hasta B es $2n\mathrm{C}n$.



Y también se pueden contar estos caminos en casos, un caso (que pase por el punto p_0) sería que en los primeros n pasos no hay pasos horizontales, entonces en los siguientes n pasos no hay pasos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}0)(n\mathrm{C}0)$ maneras.

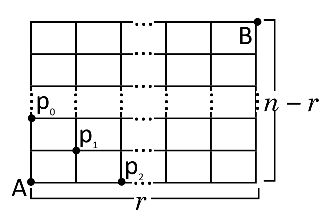
Otro caso (que pase por el punto p_1) es dar un paso horizontal en los primeros n y entonces solo se podría dar un paso vertical en los últimos n pasos, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}1)(n\mathrm{C}1)$ maneras. Así sucesivamente hasta llegar al caso (que pase por el punto p_n) que en los primero n pasos todos sean horizontales y los últimos n pasos sean todos verticales, esto se puede hacer de $(n\mathrm{C}n)(n\mathrm{C}n)$ maneras.

Por lo tanto, $(n\mathrm{C}0)^2 + (n\mathrm{C}1)^2 + \cdots + [n\mathrm{C}(n-1)]^2 + (n\mathrm{C}n)^2 = (2n)\mathrm{C}n$.

Problemas

Demuestra la siguiente identidad utilizando un argumento por caminos en la figura de abajo:

$$n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0[(n-2)\mathrm{C}r] + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)].$$



Unidad 7

197

Indicador de logro:

3.4 Demuestra identidades combinatorias utilizando conteo de caminos.

Secuencia:

Luego de utilizar las combinaciones para realizar el conteo de caminos de longitud mínima en una cuadrícula, se utilizará este recurso para realizar algunas demostraciones de identidades combinatorias.

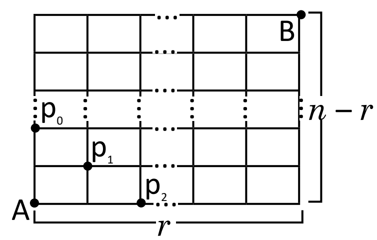
Posibles dificultades:

Identificar las dimensiones de la cuadrícula adecuada para cada identidad es lo que resulta más difícil, es por ello que esta clase tiene asterisco, porque puede ser necesario que el docente deba dar mayor apoyo a sus estudiantes en ese sentido.

Solución de problemas:

La cuadrícula tiene r columnas y $(n-r)$ filas, entonces se tendrá que el total de caminos de A a B utilizando este análisis es $(r+n-r)\mathrm{C}r = n\mathrm{C}r$.

Por otro lado, para ir de A a B hay 3 opciones, pasar por p_0, por p_1 o por p_2 y no ocurre simultáneamente dos de estos 3 casos; para el primer caso hay $2\mathrm{C}0 \times (n-2)\mathrm{C}r$ caminos para ir de A a B pasando por p_0, para el segundo caso hay $2\mathrm{C}1 \times (n-2)\mathrm{C}(r-1)$ caminos para ir de A a B pasando por p_1, y finalmente para el tercer caso hay $2\mathrm{C}2 \times (n-2)\mathrm{C}(r-2)$ caminos de A a B pasando por p_2, entonces, aplicando el principio de la suma se tiene que el total de caminos para ir de A a B es $2\mathrm{C}0(n-2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$.



Por lo tanto, puesto que se ha contado lo mismo de dos maneras diferentes, se ha demostrado la identidad del problema: $n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0(n-2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$.

En este problema hay que evaluar principalmente la forma de redactar los argumentos por parte de los estudiantes.

3.5 Identidades combinatorias contando de 2 formas*

Problema inicial

Utiliza un argumento por conjuntos para demostrar la siguiente identidad combinatoria.

$$n\mathrm{C}0 + n\mathrm{C}1 + n\mathrm{C}2 + \cdots + n\mathrm{C}(n-2) + n\mathrm{C}(n-1) + n\mathrm{C}n = 2^n$$

Solución

Contando la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de n elementos. Contando de 2 maneras distintas.

Forma 1: Contando las posibilidades que tiene cada elemento.

Cada elemento tiene 2 posibilidades, estar o no estar en el subconjunto; por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es: 2^n.

$$\underset{\text{Elemento }1}{\underline{2}} \times \underset{\text{Elemento }2}{\underline{2}} \times \cdots \times \underset{\text{Elemento }n-1}{\underline{2}} \times \underset{\text{Elemento }n}{\underline{2}}$$

Forma 2: Contando las posibilidades que tiene cada subconjunto.

La cantidad de subconjuntos con cero elementos son: $n\mathrm{C}0$.
La cantidad de subconjuntos con un elemento son: $n\mathrm{C}1$.
La cantidad de subconjuntos con dos elementos son: $n\mathrm{C}2$.

Y así sucesivamente hasta llegar a la cantidad de subconjuntos que tienen n elementos.

Por lo tanto el total de subconjuntos que se pueden formar con un conjunto de cardinalidad n es:

$$n\mathrm{C}0 + n\mathrm{C}1 + n\mathrm{C}2 + \cdots + n\mathrm{C}(n-2) + n\mathrm{C}(n-1) + n\mathrm{C}n$$

Y como se contó lo mismo, se debe cumplir que: $n\mathrm{C}0 + n\mathrm{C}1 + n\mathrm{C}2 + \cdots + n\mathrm{C}(n-2) + n\mathrm{C}(n-1) + n\mathrm{C}n = 2^n$.

Conclusión

Para demostrar identidades combinatorias se puede contar alguna situación de dos formas distintas, este método se conoce como **comparación**.

Problemas

Demuestra las siguientes identidades utilizando un argumento por conjuntos.

a) $n\mathrm{C}r = n\mathrm{C}(n-r)$.
b) $(n+1)\mathrm{C}(r+1) = n\mathrm{C}r + n\mathrm{C}(r+1)$, con $n \geq r+1$.
c) $n\mathrm{C}r = 2\mathrm{C}0(n-2)\mathrm{C}r + 2\mathrm{C}1[(n-2)\mathrm{C}(r-1)] + 2\mathrm{C}2[(n-2)\mathrm{C}(r-2)]$, con $n \geq r+2$, $r \geq 2$.
d) $(n+m)\mathrm{C}r = n\mathrm{C}0(m\mathrm{C}r) + n\mathrm{C}1[m\mathrm{C}(r-1)] + \cdots + n\mathrm{C}(r-1)(m\mathrm{C}1) + n\mathrm{C}r(m\mathrm{C}0)$, con $(m \geq r)$ y $(n \geq r)$.

Para b), considerar un conjunto A con $n+1$ elementos del cual se sacan $r+1$ elementos, y que para un elemento particular de A hay dos opciones: estar o no estar en la extracción.

Para c), considerar un conjunto A con n elementos que se puede dividir en dos conjuntos, uno con 2 elementos y otro con $n-2$ elementos, y se sacan r elementos de A.

Para d), razonar de manera similar al literal anterior.

198

Indicador de logro:

3.5 Realiza demostraciones sobre identidades combinatorias planteando dos formas de contar una situación específica.

Secuencia:

El contenido sobre teoría de conjuntos visto en la lección 1 de esta unidad, es otra herramienta que se puede utilizar para realizar demostraciones de identidades combinatorias.

Posibles dificultades:

En esta clase lo complicado es identificar la situación en la que hay que involucrar los conjuntos, puede ser formar subconjuntos, encontrar el complemento, etc., por esta razón la clase tiene asterisco, y puede requerir mayor apoyo por parte del docente.

Solución de problemas:

a) Teniendo un conjunto con n elementos, para formar un subconjuto de r elementos hay $n\text{C}r$ maneras diferentes de escoger los elementos que estarán en el subconjunto; y por otro lado también hay $n\text{C}(n-r)$ maneras de escoger los elementos que no estarán en el subconjunto, y tanto uno como otro caso representan la misma situación, se puede concluir que $n\text{C}r = n\text{C}(n-r)$.

b) Teniendo un conjunto con $n + 1$ elementos, para formar un subconjuto de $r + 1$ elementos hay $(n + 1)\text{C}(r + 1)$ maneras diferentes de escoger los elementos que estarán en el subconjunto; y por otro lado también considerando un elemento particular, al formar el subconjunto hay dos casos que no ocurren simultáneamente: si dicho elemento está en el subconjunto, solamente falta escoger r elementos de un total de n elementos, y esto se puede hacer de $n\text{C}r$ maneras; y el otro caso es si el elemento particular no está en el subconjunto, habría que escoger $r + 1$ elementos de un total de n elementos, y esto se puede hacer de $n\text{C}(r+1)$ maneras, entonces por el principio de la suma se tiene que el total de maneras para formar el subconjunto es $n\text{C}r + n\text{C}(r+1)$. Por lo tanto, dado que se estaba contando lo mismo se cumple que $(n+1)\text{C}(r+1) = n\text{C}r + n\text{C}(r+1)$, con $n \geq r + 1$.

c) Se analiza de manera parecida al literal anterior, solamente que ahora se consideran 2 elementos (no solo uno), entonces para formar un subconjunto de r elementos de un conjunto con n elementos se puede hacer de $n\text{C}r$ maneras; por otro lado considerando los dos elementos, se tienen 3 casos que no ocurren simultáneamente, que los dos no sean parte del subconjunto y el total de elementos del subconjunto se tomen de los restantes $(n-2)$ elementos del conjunto, esto se puede hacer de $2\text{C}0 \times (n-2)\text{C}r$; que uno de los dos sea parte del conjunto y los demás elementos del subconjunto se tomen de los restantes $(n-2)$ elementos del conjunto, esto se puede hacer de $2\text{C}1 \times [(n-2)\text{C}(r-1)]$; finalmente el último caso es que ambos elementos sean parte del subconjunto, y los demás se tomen de los restantes $(n-2)$ elementos del conjunto, esto se puede hacer de $2\text{C}2 \times [(n-2)\text{C}(r-2)]$; luego por el principio de la suma, se tiene que el total de subconjuntos es $2\text{C}0[(n-2)\text{C}r] + 2\text{C}1[(n-2)\text{C}(r-1)] + 2\text{C}2[(n-2)\text{C}(r-2)]$. Por lo tanto, dado que se estaba contando lo mismo $n\text{C}r = 2\text{C}0[(n-2)\text{C}r] + 2\text{C}1[(n-2)\text{C}(r-1)] + 2\text{C}2[(n-2)\text{C}(r-2)]$.

d) Este es el caso más general, dividir el conjunto en dos partes, una con n elementos y otra con m elementos, y para formar un subconjunto con r elementos se pueden tomar 0 elementos de entre los n y r de entre los m, 1 de entre los n y $r-1$ de entre los m, y así sucesivamente hasta considerar r de entre los n y 0 de entre los m, y de igual manera se puede concluir que $(n+m)\text{C}r = n\text{C}0(m\text{C}r) + n\text{C}1[m\text{C}(r-1)] + \cdots + n\text{C}(r-1)(m\text{C}1) + n\text{C}r(m\text{C}0)$.

3.6 Triángulo de Pascal

Problema inicial

Realiza las siguientes actividades:

a) Elabora una tabla y coloca en las filas valores de n desde 0 hasta 5, y en las columnas valores de r desde 0 hasta 5 también. En cada celda (que sea posible) calcula el valor del combinatorio ${}_nC_r$.

b) Ordena los valores de los combinatorios en forma triangular, desde el valor de $n = 0$ hasta $n = 5$.

c) Determina el patrón que sigue una fila a partir de la que le antecede y a partir de él deduce los valores de la sexta fila del triángulo sin calcular directamente los combinatorios.

Solución

a) En la primera fila solo se puede calcular un combinatorio, ${}_0C_0 = 1$; en la segunda fila solo se pueden calcular 2 combinatorios, ${}_1C_0$ y ${}_1C_1$; en la tercera fila solo se pueden calcular 3 combinatorios, ${}_2C_0$, ${}_2C_1$ y ${}_2C_2$. Así sucesivamente se calculan los valores de la tabla.

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b) Ordenando los combinatorios de la tabla en forma triangular:

$n = 0$ 1
$n = 1$ 1 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4$ 1 4 6 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1

c) Analizando el triángulo formado, los costados siempre serán unos, puesto que allí queda el valor de ${}_nC_0$ (= 1) y ${}_nC_n$ (= 1), y al parecer el número que queda por debajo y en medio de dos números, es la suma de los dos números que están por encima de él. Por ejemplo, 2 está por debajo de 1 y 1, y se cumple que 1 + 1 = 2; de manera análoga 10 está debajo de 6 y 4, y se cumple que 6 + 4 = 10. Siguiendo este patrón, los valores de la fila 6 serían: 1, 1 + 5, 5 + 10, 10 + 10, 10 + 5, 5 + 1 y 1.

$n = 0$ 1
$n = 1$ 1 + 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4$ 1 4 6 + 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1
$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1

Conclusión

El triángulo construido por los combinatorios se llama **triángulo de Pascal**. El patrón deducido en el Problema inicial puede ser probado matemáticamente utilizando la propiedad recursiva de Pascal que se demostró en la clase anterior, ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$.

$${}_0C_0$$
$${}_1C_0 \quad {}_1C_1$$
$${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$$
$${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$$
$${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$$
$${}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5$$
$${}_6C_0 \quad {}_6C_1 \quad {}_6C_2 \quad {}_6C_3 \quad {}_6C_4 \quad {}_6C_5 \quad {}_6C_6$$
$$\vdots \qquad\qquad \ddots$$

Problemas

1. Determina los valores de la séptima y octava fila del triángulo de Pascal sin calcular los combinatorios.

2. A la derecha se muestran dos filas del triángulo de Pascal. Justifica el cálculo que genera el segundo renglón aplicando que ${}_{(n+1)}C_{(r+1)} = {}_nC_r + {}_nC_{(r+1)}$.

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Unidad 7

199

Indicador de logro:

3.6 Establece la relación que existe entre los combinatorios en el triángulo de Pascal.

Secuencia:

Luego de haber visto las aplicaciones de las combinaciones para demostrar identidades, ahora se puede analizar el patrón que determinan las combinaciones en el triángulo de Pascal.

Propósito:

En la clase se pretende identificar y establecer el patrón del triángulo de Pascal a partir del Problema inicial, y en los Problemas se espera poder justificar correctamente dicho patrón, a partir del uso de la identidad de Pascal demostrada en la clase 3.5.

Solución de problemas:

1. Siguiendo el patrón del triángulo, del Problema inicial que se tiene hasta la fila 6, luego a partir de ella se puede calcular las filas 7 y 8:

$n = 0$	1
$n = 1$	1 + 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 + 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

2. Identificando que el valor de n en el combinatorio $n\text{C}r$, representa la fila correspondiente en el triángulo de Pascal, entonces la identidad $(n + 1)\text{C}(r + 1) = n\text{C}r + n\text{C}(r + 1)$ se puede interpretar como si el elemento en la fila siguiente (la cual sería $n + 1$) en la posición r contando de izquierda a derecha es igual a la suma de los elementos r y $r + 1$ de la fila anterior, los cuales son los que quedan arriba del elemento $(n + 1)\text{C}(r + 1)$, con lo que se justifica por qué en la construcción del triángulo de Pascal, es suficiente sumar los elementos contiguos de la fila anterior de manera recursiva para conocer la siguiente fila.

3.7 Binomio de Newton*

Problema inicial

Considerando el desarrollo del producto $(x + y)^5$, determina el coeficiente que acompaña a la parte literal x^2y^3.

Solución

El desarrollo de la expresión $(x + y)^5$ se puede expresar a partir de $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$.

Para desarrollar $(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ se toma x o y de cada paréntesis y se multiplican, luego se simplifican términos semejantes. El coeficiente de x^2y^3 es igual al número de casos en que se toman tres y de entre los 5 paréntesis, es decir ${}_5C_3 = 10$.

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña la parte literal x^2y^3 en el desarrollo del producto $(x + y)^5$ es:

$${}_5C_3 = 10.$$

Teorema

En general considerando el desarrollo de $(x + y)^n$, el coeficiente que acompaña a la parte literal $x^{n-r}y^r$, con $0 \leq r \leq n$ es: ${}_nC_r$.

Por lo tanto, se cumple el siguiente resultado para desarrollar $(x + y)^n$:
$(x + y)^n = ({}_nC_0)x^n + ({}_nC_1)x^{n-1}y + ({}_nC_2)x^{n-2}y^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-2)}]x^2y^{n-2} + [{}_nC_{(n-1)}]xy^{n-1} + ({}_nC_n)y^n$.

Y se puede expresar utilizando sumatorio de la siguiente manera:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} ({}_nC_r)x^{n-r}y^r.$$

Este resultado se conoce como **binomio de Newton**, y además puede ser utilizado para demostrar algunas propiedades o identidades de los combinatorios que no son tan obvias utilizando conteo.

Ejemplo

Demuestra la siguiente identidad combinatoria: ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n = 2^n$.

Utilizando el binomio de Newton y dándole los valores numéricos para $x = 1$ y $y = 1$.

$$(1 + 1)^n = ({}_nC_0)1^n + ({}_nC_1)1^{n-1}1 + ({}_nC_2)1^{n-2}1^2 + \cdots + [{}_nC_{(n-2)}]1^21^{n-2} + [{}_nC_{(n-1)}]1^11^{n-1} + ({}_nC_n)1^n$$

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{(n-2)} + {}_nC_{(n-1)} + {}_nC_n.$$

Problemas

1. Determina el coeficiente de x^7 en el desarrollo del binomio $(1 - x)^{10}$.

2. Determina el coeficiente de x^2y^6 en el desarrollo del binomio $(x + 3y^3)^4$.

3. Determina el coeficiente del término que no contiene x en el desarrollo del binomio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.

4. Demuestra: $\sum_{r=0}^{n} 3^r({}_nC_r) = 4^n$.

Puedes aplicar un método similar al del ejemplo.

200

Indicador de logro:

3.7 Aplica el binomio de Newton para determinar el coeficiente de un término en el desarrollo de un binomio.

Secuencia:

El desarrollo de las potencias de un binomio ha sido desarrollado en los contenidos sobre álgebra, en su momento hasta potencias al cubo, sin embargo, las combinaciones representan una herramienta muy útil para el desarrollo de las potencias n-ésimas de un binomio, resultado conocido como binomio de Newton.

Propósito:

La deducción de la fórmula del binomio de Newton puede conllevar un análisis complejo, por lo que la clase tiene asterisco, lo cual significa que podría necesitar más apoyo por parte del docente, la aplicación de dicha fórmula puede ir desde binomios sencillos hasta algunos más complejos.

Solución de problemas:

1. Del problema se sabe que $n = 10$, y calculando el valor de r:

$x^7 = 1^{10-r}\, x^r = x^r$, por lo tanto $r = 7$, entonces el coeficiente es $10\text{C}7 \times 1^{10-7} \times (-1)^7 = -120$.

2. Del problema se sabe que $n = 4$, y calculando el valor de r:

$x^2y^6 = x^{4-r}(y^3)^r = x^{4-r}y^{3r}$, por lo tanto $r = 2$, entonces el coeficiente es $4\text{C}2 \times 1^{4-2} \times (3)^2 = 6 \times 9 = 54$.

3. Del problema se sabe que $n = 9$, y calculando el valor de r:

$x^0 = (x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = x^{18-2r}x^{-r} = x^{18-3r}$ por lo tanto $r = 6$, entonces el coeficiente es $9\text{C}6 \times 1^{9-6} \times 1^6 = 84$.

Si los estudiantes no saben cómo iniciar este problema, se puede dar la pista de que el término que no contiene x se da cuando su exponente es 0.

4. Considerando la expresión del binomio de Newton, y sustituyendo $x = 1$ y $y = 3$:

$$(1 + 3)^n = (n\text{C}0)1^n + (n\text{C}1)1^{n-1}3 + (n\text{C}2)1^{n-2}3^2 + \cdots + [n\text{C}(n-2)]1^2 3^{n-2} + [n\text{C}(n-1)]1^1 3^{n-1} + (n\text{C}n)3^n$$

$$4^n = n\text{C}0 + (n\text{C}1 \times 3) + (n\text{C}2 \times 3^2) + \cdots + (n\text{C}(n-2) \times 3^{n-2}) + (n\text{C}(n-1) \times 3^{n-1}) + (n\text{C}n \times 3^n)$$

Por lo tanto, $\sum_{r=0}^{n} 3^r(n\text{C}r) = 4^n$.

Lección 3

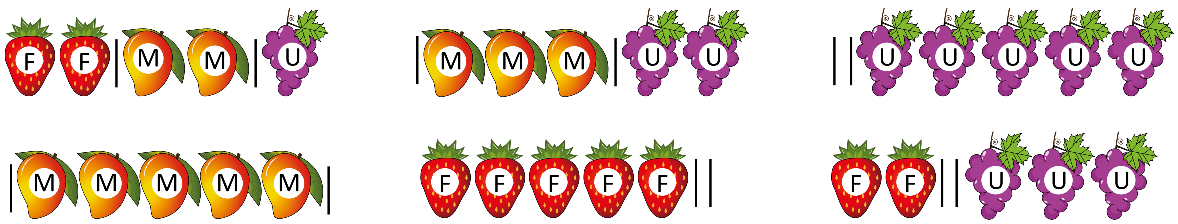
3.8 Técnica de los separadores*

Problema inicial

José quiere comprar 5 dulces en la tienda y le dan a escoger 3 sabores diferentes, fresa, mango y uva. ¿De cuántas formas puede escoger José los 5 dulces que desea comprar, si incluso podría comprarlos todos de un mismo sabor?

Solución

Se pueden escoger los sabores en orden, fresa, mango y uva, y se pone una | (separador) entre los grupos de diferente sabor. Por ejemplo:



Entonces una fila de 5 bolitas (O) y 2 separadores (|), corresponde a una única combinación de sabores de dulces, por lo tanto, el problema se reduce a contar el total de maneras que hay de ordenar 5 bolitas idénticas y 2 separadores idénticos. Y esto se puede hacer escogiendo los 2 lugares de entre los 7 que pueden ocupar los separadores, es decir de ${}_7C_2$ maneras (o bien escogiendo los lugares de las bolitas de ${}_7C_5$ maneras).

$$\bigcirc\bigcirc|\bigcirc\bigcirc|\bigcirc$$

El total de formas en que se pueden escoger 5 dulces de entre 3 sabores es ${}_7C_2 = 21$.

En general

El total de formas para escoger r objetos de n tipos diferentes entre sí, si los objetos de un tipo son idénticos entre sí, se puede hacer agregando $n - 1$ separadores y el total estaría dado por:

$$_{(n+r-1)}C_r.$$

Problemas

1. Determina cuántas formas hay para pedir 6 pupusas escogiendo entre queso, frijol con queso, revueltas y queso con loroco, si:
   a) No hay restricciones.
   b) Debe pedirse al menos 1 de cada clase.
   c) Se deben pedir al menos 3 revueltas.
   d) Deben pedirse 2 de queso y a lo sumo 2 revueltas.

Puedes asegurar una de cada clase y luego pedir las otras 2 de cualquier clase.

2. Determina todas las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, si:
   a) Son enteros no negativos.
   b) Son enteros positivos.

Puedes analizar de manera parecida al problema 1 literal b.

Unidad 7

Indicador de logro:

3.8 Utiliza separadores para resolver problemas de conteo que requieran escoger grupos de objetos idénticos.

Secuencia:

La última clase de esta lección es en la aplicación de las combinaciones en el modelamiento de una técnica llamada separadores, la cual es útil para determinar las posibles particiones de un total, en donde cada partición tiene objetos idénticos.

Propósito:

El Problema inicial puede resolverse de manera analítica, sin embargo conlleva una gran dificultad, poder plantear la Solución utilizando separadores facilita su comprensión, pero para alcanzar esta idea puede ser necesaria la intervención del docente, por ello esta clase tiene asterisco.

Solución de problemas:

1a) Puesto que son 6 objetos y hay 4 clases diferentes, entonces se pueden colocar (4 – 1) separadores, y por lo tanto, el total de formas que hay para pedir las 6 pupusas es $_{(6 + 3)}C_6 = {}_9C_6 = 84$.

1b) Quitando 4 pupusas (una de cada tipo) de las 6 que habría que pedir, faltaría escoger 2 pupusas de entre las 4 clases diferentes, y colocando 3 separadores se tiene que el total de formas de pedir las pupusas es $_{(2 + 3)}C_2 = {}_5C_2 = 10$.

1c) Quitando 3 pupusas (asegurando las 3 revueltas) de las 6 que habría que pedir, faltaría escoger 3 pupusas de entre las 4 clases diferentes, y colocando 3 separadores se tiene que el total de formas de pedir las pupusas es $_{(3 + 3)}C_2 = {}_6C_2 = 15$.

1d) Primero se debe calcular el total de maneras de pedir las pupusas asegurando 2 de queso, entonces se tendrían que quitar 2 pupusas del total, y además hay que quitar un separador, puesto que ya no se podrían pedir más pupusas de queso, por lo que el total de maneras de pedir 2 pupusas de queso y otras 4 de otro tipo es $_{(4 + 2)}C_4 = {}_6C_4$ maneras; por otro lado, si a este total se le resta cuando se compran al menos 3 revueltas, lo cual se puede calcular quitando 5 pupusas (2 de queso y 3 revueltas) del total, y se tendría que se puede hacer de $_{(1 + 2)}C_1 = {}_3C_1$ maneras. Finalmente, utilizando el conteo por el complemento, si al total de maneras de pedir 2 pupusas de queso se le resta el de pedir 2 pupusas de queso y al menos 3 revueltas, da como resultado el total de maneras de pedir 2 pupusas de queso y a lo sumo 2 revueltas, se tiene que el total es $_6C_4 - {}_3C_1 = 15 - 3 = 12$.

2a) Si los objetos se consideran unos, y los separadores determinan cuántos unos le corresponde a cada variable (x_1, x_2, x_3, x_4), entonces se puede considerar 8 objetos (8 unos), y (4 – 1) separadores (4 variables o clases diferentes de objetos), por lo tanto, el total de soluciones de la ecuación con enteros no negativos (el valor de las variables puede ser cero, que sucede cuando los separadores quedan juntos) es $_{(8 + 3)}C_8 = {}_{11}C_8 = 165$.

2b) En este caso solo es necesario asegurar un objeto (un uno) de cada clase (a cada variable), entonces, quitando 4 objetos, quedan 4 objetos y agregando 3 separadores, se tiene que por lo tanto, el total de soluciones de la ecuación es $_{(4 + 3)}C_4 = {}_7C_4 = 35$.

3.9 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando estrategias de conteo de combinaciones.

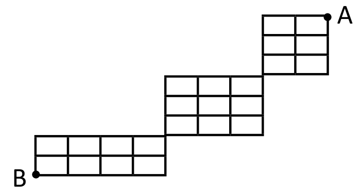
1. Se tienen 3 cartas iguales, y se dispone de 5 sobres de diferente color. Determina de cuántas formas se pueden colocar las cartas en los sobres.

2. Determina cuántos triángulos se pueden formar uniendo tres vértices de un hexágono.

3. ¿Cuántas cadenas binarias (de ceros y unos) de longitud 8 tienen como máximo 3 unos?

4. Se tiene 6 niñas y 3 niños, determina de cuántas formas se pueden ordenar si los 3 niños no pueden estar uno a la par de otro (siempre tienen que estar separados por al menos una niña).

5. Determina cuántos caminos de longitud mínima hay para llegar de A hasta B en la siguiente figura.



6. Resuelve:

a) En el binomio de Newton $(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} (n\text{C}r)x^{n-r}y^r$, sustituye $x = 1$ y $y = -1$, para demostrar la relación $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r n\text{C}r = 0$.

b) Encuentra el valor de $\sum_{r=2}^{2020} (-1)^r (2\,020\text{C}r)$ utilizando la relación del literal a.

7. Un grupo de 7 amigos quiere comprar paletas en una heladería, si en la heladería hay 7 sabores diferentes de paletas, determina de cuántas formas se puede comprar una paleta para cada integrante del grupo de amigos.

Indicador de logro:

3.9 Resuelve problemas correspondientes a las combinaciones.

Solución de problemas:

1. Es suficiente determinar el total de maneras de escoger los 3 sobres en donde se van a colocar las cartas, y para ello se cuenta con 5 sobres de los cuales se van a escoger 3, por lo tanto, el total de formas es $_5C_3 = 10$.

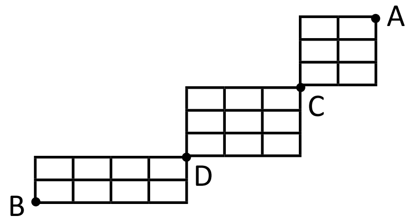
2. Puesto que en un hexágono nunca hay 3 vértices alineados (ya no sería hexágono), es suficiente con escoger 3 puntos de entre los 6 vértices, por lo tanto, esto se puede hacer de $_6C_3 = 20$ maneras.

3. Para este problema se pueden dar 4 casos, haber 0, 1, 2 o 3 unos, y para ello basta identificar en cuáles de las 8 posiciones irán los unos; para el caso de 0 unos hay $_8C_0$ maneras; para el caso de 1 uno hay $_8C_1$ maneras; para el caso de 2 unos hay $_8C_2$ maneras y finalmente para el caso de 3 unos hay $_8C_3$ maneras. Por lo tanto, por el principio de la suma, se tiene que el total de cadenas binarias con las condiciones del problema es $_8C_0 + {_8C_1} + {_8C_2} + {_8C_3} = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$.

4. Ordenando primero las niñas, pues ellas no tienen ninguna restricción, esto se puede hacer de 6! maneras, luego una vez colocadas 6 niñas, los niños tiene 7 opciones al principio, al final, o entre los espacios que se forman entre niña y niña, luego para que estén separados, basta colocar 3 niños en esos 7 puestos, y esto se puede hacer de $_7P_3$ maneras, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de formas para ordenar los niños con las condiciones del problema es $6! \times {_7P_3} = 720 \times 210 = 151\,200$.

_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____	Niña	_____
Lugar 1		Lugar 2		Lugar 3		Lugar 4		Lugar 5		Lugar 6		Lugar 7

5. Es suficiente calcular la cantidad de caminos que hay de A a C, luego de C a D y finalmente de D a B. Entonces el total de caminos de A a C es $_{(2+3)}C_2$, el total de caminos de C a D es $_{(3+3)}C_3$ y el total de caminos de D a B es $_{(4+2)}C_4$, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de caminos de longitud mínima para ir de A a B es $_5C_2 \times {_6C_3} \times {_6C_4} = 10 \times 20 \times 15 = 3\,000$.



6a) Considerando la expresión del binomio de Newton, y sustituyendo $x = 1$ y $y = -1$:

$$(1 + -1)^n = ({_nC_0})1^n + ({_nC_1})1^{n-1}(-1) + ({_nC_2})1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + [{_nC_{(n-1)}}]1^1(-1)^{n-1} + ({_nC_n})(-1)^n$$

$$0 = {_nC_0} + [{_nC_1} \times (-1)] + ({_nC_2} \times 1) + \cdots + [{_nC_{(n-1)}} \times (-1)^{n-1}] + [{_nC_n} \times (-1)^n]$$

Por lo tanto, $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r {_nC_r} = 0$.

6b) Considerando $n = 2020$ en la fórmula de 6a), se tiene que:

$$\sum_{r=0}^{2020}(-1)^r {_{2\,020}C_r} = (-1)^0 {_{2\,020}C_0} + (-1)^1 {_{2\,020}C_1} + \sum_{r=2}^{2020}(-1)^r({_{2\,020}C_r}) = 0$$

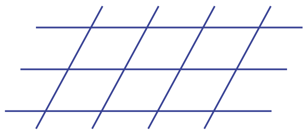
Por lo tanto, $\sum_{r=2}^{2020}(-1)^r({_{2\,020}C_r}) = 2\,020 - 1 = 2\,019$.

7. Puesto que se van a comprar 7 objetos y pueden ser de 7 clases diferentes, se pueden agregar (7 – 1) separadores, entonces el total de formas para comprar las paletas es $_{(7+6)}C_7 = {_{13}C_7} = 1\,716$.

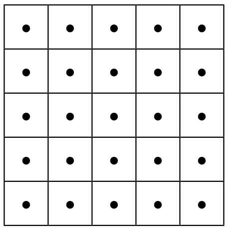
3.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina cuántos paralelogramos hay en la figura de la derecha. Las líneas horizontales y oblicuas son paralelas respectivamente.



2. Considerando el siguiente arreglo de puntos sobre el tablero de la figura.



Determina el número de formas en que se pueden seleccionar 3 puntos de modo que sean los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los lados de la cuadrícula.

3. De un grupo de 8 estudiantes se harán 4 grupos de 2 estudiantes. Determina cuántos grupos se pueden formar si:

a) Cada grupo hablará sobre un tema distinto que puede ser: equidad de género, democracia, medio ambiente o educación integral de la sexualidad.

b) Todos los grupos deben discutir sobre la inclusividad.

4. Determina de cuántas maneras se pueden agrupar 9 personas en 3 grupos, cuando el número de personas de cada grupo es:

a) 2, 3 y 4. b) 3, 3 y 3. c) 2, 2 y 5.

5. Demuestra la fórmula $\frac{n!}{r_1!\,r_2!\,...\,r_k!}$ vista en la clase 2.10 aplicando combinaciones.

6. Demuestra la igualdad $n\text{C}r = \frac{n(n-1)}{r\,(r-1)}[(n-2)\text{C}(r-2)]$ aplicando la fórmula $p\text{C}q = \frac{p!}{(p-q)!q!}$.

Unidad 7

203

Indicador de logro:

3.10 Resuelve problemas correspondientes a los métodos de conteo.

Solución de problemas:

1. Para formar un paralelogramo se necesitan 2 líneas paralelas en posición oblicua, y 2 líneas paralelas en posición horizontal, es decir, equivale a seleccionar 2 de las 4 líneas oblicuas y 2 de las 3 líneas horizontales, y esto se puede hacer de $4C2$ y $3C2$ maneras respectivamente, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de paralelogramos que se pueden formar es $4C2 \times 3C2 = 6 \times 3 = 18$.

2. Puesto que a partir de un rectángulo se pueden formar 4 triángulos rectángulos, entonces se puede contar primero el total de rectángulos que se pueden formar con los puntos, que es $5C2 \times 5C2$ (se necesitan 2 de los 5 puntos verticales, y 2 de los 5 puntos horizontales), por lo tanto, el total de triángulos rectángulos que se pueden formar con la cuadrícula es $5C2 \times 5C2 \times 4 = 400$.

3a) La cantidad de maneras que hay para distribuir los estudiantes en los grupos es $8C2$ para el primer tema, luego $6C2$ para el segundo, $4C2$ para el tercero y $2C2$ para el cuarto, luego, el total de maneras de repartir los temas es $8C2 \times 6C2 \times 4C2 \times 2C2 = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2\,520$.

3b) Esta situación es equivalente a solamente formar los grupos sin ordenarlos, puesto que no hay diferencia en distribuir los temas, cada arreglo del literal anterior se estaría contando 4! veces, por lo tanto, si el tema es sobre inclusividad, el total de grupos que se pueden formar para hablar sobre la inclusividad es $8C2 \times 6C2 \times 4C2 \times 2C2 \div 4! = 28 \times 15 \times 6 \times 1 \div 24 = 105$.

4a) De entre las 9 personas se escogen las que integrarán el grupo de 2 de $9C2$ maneras, y quedan 7 personas, de entre ellas se escogen las que integrarán el grupo de 3 de $7C3$ maneras, y quedan 4 personas que son las que integrarán el último grupo, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras de formar los grupos es $9C2 \times 7C3 \times 4C4 = 36 \times 35 \times 1 = 1\,260$.

4b) De manera análoga a 4a), hay $9C3 \times 6C3 \times 3C3 = 84 \times 20 \times 1 = 1\,680$ grupos, sin embargo, en este caso los 3 grupos son similares (puesto que están integrados de 3 personas cada uno), entonces se estaría contando 3! veces cada arreglo, por lo tanto, hay $1\,680 \div 3! = 280$ maneras de formar los grupos.

4c) Utilizando un razonamiento similar al literal anterior, para este caso, el total de maneras de formar los grupos es $9C2 \times 7C2 \times 5C5 \div 2! = 36 \times 21 \times 1 \div 2 = 378$.

5. Considerando que los n espacios están vacíos, para los primeros r_1 objetos idénticos se tienen nCr_1 maneras de escoger los lugares en los que irán, luego para los siguientes r_2 objetos idénticos se tienen $(n - r_1)Cr_2$ maneras de escoger los lugares en los que irán, y así sucesivamente hasta llegar al último grupo de objetos idénticos; luego aplicando el principio de la multiplicación se tendrá el total de maneras de ordenar los objetos es $nCr_1 \times (n - r_1)Cr_2 \times \ldots \times (n - r_1 - r_2 - \ldots - r_{k-1})Cr_k = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$.

6. $nCr = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-r)!r(r-1)!} = \dfrac{n}{r} \times \dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-(r-1)]!(r-1)!} = \dfrac{n}{r}[(n-1)C(r-1)]$.

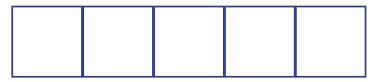
Ahora aplicando el resultado anterior a $[(n-1)C(r-1)] = \dfrac{n-1}{r-1}[(n-1)C(r-1)]$, luego

$nCr = \dfrac{n}{r}[(n-1)C(r-1)] = \dfrac{n(n-1)}{r(r-1)}[(n-2)C(r-2)]$.

3.11 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Se pintan los 5 cuadrados de la figura con los colores rojo, verde y azul; de modo que dos contiguos (a la par uno del otro) tengan diferentes colores, y no se requiere utilizar todos los colores. Determina de cuántas formas se pueden pintar en cada caso:



a) Sin restricción

b) Simétricamente

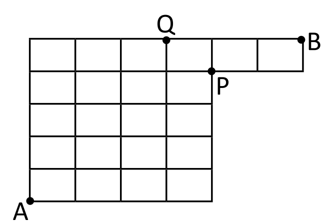
c) Solo verde y azul

2. Determina el número de filas compuestas por las cifras: 1, 2, 3, 4 y 5 no repetidas y de modo que en los dos extremos hay números impares.

3. En un país que tiene varios aeropuertos, una aerolínea ofrece vuelos que conectan cualesquiera dos aeropuertos de dicho país. Si se sabe que la aerolínea realiza 42 vuelos diferentes (que conectan 2 aeropuertos diferentes en cada vuelo), determina cuántos aeropuertos tiene dicho país tomando en cuenta que el viaje que conecta un aeropuerto A con un aeropuerto B se considera diferente al viaje que conecta al aeropuerto B con el aeropuerto A.

4. Una rana se ubica en el escalón 10 de unas gradas, la rana se mueve un escalón por salto (hacia arriba o hacia abajo). ¿Cuántas formas existen para que la rana en su décimo salto quede en el escalón 14?

5. Determina de cuántas formas se puede ir por la ruta más corta en las condiciones siguientes:



a) De A a B pasando por P.

b) De A a B pasando por Q.

c) De A a B.

6. Demuestra que ${}_{15}C_{0} + {}_{16}C_{1} + {}_{17}C_{2} + {}_{18}C_{3} = {}_{19}C_{3}$.

Puedes sustituir el primer término ${}_{15}C_{0}$ (= 1) por ${}_{16}C_{0}$ (= 1), y luego aplicar la fórmula ${}_{p}C_{q} + {}_{p}C_{(q+1)} = {}_{(p+1)}C_{(q+1)}$ repetidamente.

Indicador de logro:

3.11 Resuelve problemas correspondientes a los métodos de conteo.

Solución de problemas:

1a) A la primera casilla se le puede dar cualquiera de los tres colores, luego a la segunda, puesto que debe ser de un color diferente a la primera, se le puede dar cualquiera de los 2 colores restantes, para la tercera no se le puede dar el color de la segunda pero ya se puede volver a utilizar el de la primera, por lo que también tendrá 2 opciones, y así en las casillas sucesivas habrán siempre 2 opciones para los colores, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, el total de maneras para pintarlo es $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$.

1b) De manera análoga al literal 1a, la primera casilla tendrá 3 opciones, pero la última casilla queda determinada por dicho color, la segunda casilla tendrá 2 opciones y determina el color de la cuarta casilla también, y la tercera casilla tendrá 2 opciones, por lo tanto, el total de maneras de pintarlo simétricamente es $3 \times 2 \times 2 = 12$.

1c) Tomando solo dos colores, la primera casilla tendrá 2 opciones, la segunda solamente el color alternativo, la tercera tendrá el color alternativo a la segunda, y así sucesivamente, solamente habrán dos opciones $2 \times 1 \times 1 = 2$.

1a)

3	2	2	2	2

1b)

3	2	2	1	1

1c)

2	1	1	1	1

2. Se cuenta con 3 números impares, entonces el primer extremo tendrá 3 opciones y el otro tendrá 2 opciones, luego para las posiciones centrales habrán 3, 2 y 1 opción respectivamente, por lo tanto utilizando el principio de la multiplicación, el total de filas es $_3P_2 \times 3! = 36$.

$\underline{3}$ $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ $\underline{2}$

3. Tomando como n la cantidad de aeropuertos, el total de viajes que se pueden hacer con n aeropuertos es $_nP_2$ (para iniciar el viaje hay n opciones, y para completarlo $n-1$ hay opciones), y esto debe ser igual a 42, luego trabajando la expresión $_nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$ $\Rightarrow (n-7)(n+6) = 0 \Rightarrow n = 7$, por lo tanto, la ciudad tiene 7 aeropuertos.

4. La rana debe subir 4 escalones, si da x saltos hacia arriba y y saltos hacia abajo, se debe cumplir el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

De donde se puede determinar que $x = 7$, $y = 3$, entonces se dan 7 saltos hacia arriba y 3 hacia abajo, por lo tanto, el total de formas en que puede llegar la rana hasta el escalón 14 es $_{10}C_3 = 120$.

5a) El total de caminos de A a P es $_{(4+4)}C_4$, y para llegar de P a B hay $_{(2+1)}C_2$ caminos, por lo tanto, por el principio de la multiplicación, se tendrá que el total de caminos es $_8C_4 \times {_3C_2} = 70 \times 3 = 210$.

5b) De manera análoga al literal 5a, se tendrá que el total de caminos es $_8C_3 \times {_3C_3} = 56 \times 1 = 56$.

5c) Para llegar de A a B solo hay dos casos, pasando por P o pasando por Q, y ambos casos no curren simultáneamente, por lo tanto, por el principio de la suma, se tiene que el total de caminos es la suma de los resultados de los literales 5a y 5b, es decir, $210 + 56 = 266$.

6. $_{15}C_0 + {_{16}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{16}C_0} + {_{16}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{17}C_1} + {_{17}C_2} + {_{18}C_3} = {_{18}C_2} + {_{18}C_3} = {_{19}C_3}$

Unidad 8. Probabilidad

Competencia de la unidad

Aplicar los conceptos básicos sobre probabilidad, resolviendo problemas del entorno y calculando probabilidades para tomar decisiones acertadas y oportunas en situaciones específicas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Segundo año de bachillerato

Unidad 7: Métodos de conteo

- Teoría de conjuntos
- Las permutaciones
- Las combinaciones

↓

Unidad 8: Probabilidad

- Axiomas de Kolmogórov
- Probabilidad condicional

Plan de estudio de la unidad

Lección	Horas	Clases
1. Axiomas de Kolmogórov	1	1. Actividad introductoria
	1	2. Probabilidad
	1	3. Intersección y regla de adición para probabilidad
	1	4. Aplicación de la regla de adición de probabilidad
	1	5. Axiomas de probabilidad (teórica)
	1	6. Probabilidad del complemento
	1	7. Practica lo aprendido
2. Probabilidad condicional	1	1. Probabilidad condicional
	1	2. Variantes de la probabilidad condicional
	1	3. Aplicación de la probabilidad condicional
	1	4. Problemas con probabilidad condicional
	1	5. Experimentos independientes
	1	6. Probabilidad de experimentos independientes, parte 1
	1	7. Probabilidad de experimentos independientes, parte 2
	1	8. Practica lo aprendido
	2	9. Problemas de la unidad
	1	Prueba de la unidad 8
	2	Prueba del cuarto periodo

17 horas clase + prueba de la unidad 8 + prueba del cuarto periodo

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Axiomas de Kolmogórov

Se introduce la necesidad del uso de las probabilidades, y su motivante histórica, pasando por los enfoques de probabilidad frecuentista y clásica, hasta llegar a establecer la axiomática que fundamente todos los enfoques anteriores y permita construir y argumentar formalmente los resultados más relevantes de la teoría de probabilidad.

Lección 2: Probabilidad condicional

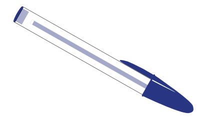
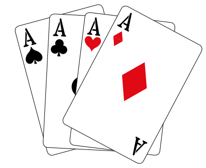
Una vez establecidos los axiomas de probabilidad, se puede continuar abordando el concepto de probabilidad condicional, a partir del cual se pueden trabajar diferentes variables de problemas, hasta poder utilizar de manera intuitiva los resultados sobre el teorema de probabilidad total y el teorema de Bayes. Esta lección concluye la parte de la estadística inferencial que permite realizar predicciones con cierto grado de certeza, para asegurar la toma de decisiones pertinentes según las condiciones de un fenómeno determinado.

Lección 1 Axiomas de Kolmogórov

1.1 Actividad introductoria

Materiales

- Una moneda, un lapicero, un juego de naipes.

Actividad

- Dibuja en tu cuaderno una tabla con 3 filas y 11 columnas, en la primera columna coloca los títulos, predicción y resultado, y en la primera fila los números del 1 al 10.
- Coloca en la segunda fila los resultados que podrías predecir al tirar una moneda, si en el primer lanzamiento crees que caerá cara coloca "Ca" abajo del número 1, sino coloca "Co". Observa el ejemplo y llena la fila de predicciones en tu cuaderno; como lo muestra el ejemplo:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Predicción	Ca									
Resultado										

- Ahora realiza 10 lanzamientos con la moneda y llena la fila de resultados. Luego responde:

a) Analiza si es más factible que en 10 lanzamientos de la moneda se obtengan 10 caras, o que en 10 lanzamientos se obtengan 6 caras y 4 coronas.
b) ¿Cuáles son todos los posibles resultados que se podían obtener al lanzar una moneda?
c) ¿Cuántas veces se obtuvo cara como resultado al lanzar la moneda 10 veces? ¿Cuántas veces se obtuvo corona?
d) Divide la cantidad de caras obtenidas en los resultados entre 10 (frecuencia relativa).

Definición

Al lanzar una moneda no se puede saber con certeza el resultado que se obtendrá, sin embargo, puede existir una forma de tener un parámetro sobre los resultados que son más certeros y los que no. La rama de la matemática que estudia la forma de representar con números la mayor o menor certeza de la ocurrencia de un resultado para realizar predicciones se conoce como: **probabilidad**.

Un proceso que genera un conjunto de datos (o resultados, como el hecho de lanzar una moneda) se conoce como **experimento**. El conjunto de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento se conoce como **espacio muestral**. Un elemento del espacio muestral se conoce como **evento simple** y cualquier subconjunto del espacio muestral se conoce como **evento**.

El valor obtenido dividiendo la cantidad de veces que se obtiene un resultado específico entre el total de veces que se realiza un experimento (frecuencia relativa) se conoce como: **probabilidad experimental**.

$$P_e(A) = \frac{\text{Número de veces que sucede un evento A}}{\text{Total de veces que se realiza un experimento}}.$$

Problemas

Utilizando el juego de naipes (baraja), realiza una predicción respecto al color que se puede obtener en cada carta, al sacar 10 cartas (después de sacar una carta, no se devuelve). Luego realiza el experimento y escribe los resultados en una tabla, así como lo hiciste en la actividad:

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento del color que tiene una carta extraída de la baraja?
b) Ejemplifica al menos 5 eventos simples que pueden ocurrir en el experimento de extraer 10 cartas y ver su color.
c) Basado en los resultados obtenidos, calcula la probabilidad experimental que al extraer una carta, esta sea de color negro.

Indicador de logro:

1.1 Define y aplica los conceptos de probabilidad, experimento aleatorio, espacio muestral, evento, probabilidad experimental y evento simple.

Secuencia:

Durante la primera clase de esta unidad, se da el contexto motivante de la creación de la teoría de probabilidad, en ella se plantea el hecho de poder pronosticar con cierto grado de certeza la ocurrencia o no de un evento específico.

Propósito:

En la actividad se espera que los estudiantes se enfrenten a fenómenos aleatorios, e intenten predecir la ocurrencia de algún evento, asociando en cierta medida con la definición de la suerte. A partir de ello se puede establecer la definición de la probabilidad experimental como una frecuencia relativa.

Solución de problemas:

a) Representando por R si la carta es roja, y por N si la carta es negra, puesto que el experimento consiste en extraer una sola carta, solamente hay dos opciones en el espacio muestral, roja o negra, es decir, S = {R, N}.

b) Este ítem es para verificar la comprensión del concepto de evento, visto como elemento del conjunto del espacio muestral (que en este caso tiene $2^{10} = 1\,024$ elementos), considerando únicamente algunos 5 eventos simples que pueden ocurrir tales como RRRRRNNNNN (5 rojas al inicio y 5 negras después), RNRNRNRNRN (5 rojas y 5 negras intercaladas), NNNNNRRRRR, NRRNRRNRRN, NNNNNNNNNN, etc., en este literal el docente debe verificar que los eventos que escojan los estudiantes sean coherentes con el espacio muestral del experimento de sacar 10 cartas y ver su color.

c) Este literal dependerá de los resultados que se den al momento de realizar el experimento, sin embargo de manera teórica se puede esperar que la probabilidad experimental (frecuencia relativa) se aproxime a $\frac{1}{2}$ o 0.5, sin embargo, pueden darse casos en los que se aleje mucho de este valor, pero serían muy pocos (si ocurren).

1.2 Probabilidad

Problema inicial

Considerando el experimento de lanzar una moneda una vez.

a) ¿Piensas que la posibilidad de caer cara es mayor que la de caer corona?
b) ¿Con cuál número se podría expresar la posibilidad de caer cara?

Solución

a) Al lanzar una moneda solo hay dos posibles resultados, cae cara o cae corona. Ambas opciones tendrían la misma posibilidad de caer.

b) Solo hay dos posibles resultados y para que caiga cara solo hay una forma; además los resultados tienen la misma posibilidad de caer y esto se puede expresar como una fracción:

$$\frac{1}{2}$$

1 ⟵ Una forma de caer cara.

Dos posibles resultados cara o corona. ⟶ 2

Definición

Si en un experimento se cumple que cada evento simple (cada posible resultado) tiene la misma posibilidad de ocurrir, entonces el valor obtenido dividiendo el total de elementos que tiene un evento A (casos favorables), es decir, $n(\text{A})$, entre el total de elementos del espacio muestral S (casos posibles), es decir, $n(\text{S})$, se conoce como **probabilidad teórica**, además:

$$\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})}.$$

Ejemplo

Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado caiga un número par (la cantidad de puntos sea par).

Considerando el espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Denotando el evento A = "Cae un número par", este evento se puede expresar como A = {2, 4, 6}.

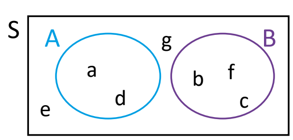
Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces caiga el número 3 en ambas ocasiones (la cantidad de puntos sea 3).

2. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de todos los puntos (de ambos dados) sea 7.

3. Considerando el espacio muestral (S) como conjunto, analiza el siguiente diagrama de Venn, si cada evento simple tiene la misma probabilidad de ocurrir, resuelve:
   a) Determina la probabilidad teórica de A.
   b) Determina la probabilidad teórica de B.



4. Calcula la probabilidad teórica del evento de sacar una carta roja en una extracción de una baraja y compárala con la probabilidad experimental. Para la probabilidad experimental utiliza la clase anterior.

Indicador de logro:

1.2 Calcula la probabilidad teórica para situaciones específicas.

Secuencia:

Luego de haber trabajado con la probabilidad experimental, se puede definir la probabilidad teórica, cuyo abordaje será utilizando la idea de cardinalidad de conjuntos, puesto que este enfoque es más formal y contribuye a justificar los resultados de la teoría de probabilidades a partir de la teoría de conjuntos.

Propósito:

En la Conclusión se espera que los estudiantes logren asociar los casos favorables con la cardinalidad del conjunto A (evento A), y los casos posibles con la cardinalidad del espacio muestral (conjunto S); esta relación se intenta concretizar en el Ejemplo.

Solución de problemas:

1. Considerando el espacio muestral S: resultados al lanzar un dado dos veces.

Y denotando por A: cae 3 en la primera y segunda tirada de un dado.

$n(\text{S}) = 6 \times 6 = 36$ (Por el principio de la multiplicación, al lanzar el dado ambas veces, este tiene 6 opciones cada vez).

$n(\text{A}) = 1 \times 1 = 1$ (solamente hay una forma en que caiga 3 para ambas ocasiones).

Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{1}{36}$.

2. Considerando el espacio muestral S: resultados al lanzar dos dados.

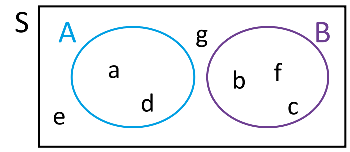
Y denotando A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}, donde el primer número corresponde a un dado y el segundo número al otro.

$n(\text{S}) = 6 \times 6 = 36$ (es un espacio muestral idéntico al del problema anterior) y $n(\text{A}) = 6$.

Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

3a) $n(\text{S}) = 7$ y $n(\text{A}) = 2$, por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{2}{7}$.

3b) $n(\text{S}) = 7$ y $n(\text{B}) = 3$, por lo tanto, $\text{P(B)} = \frac{n(\text{B})}{n(\text{S})} = \frac{3}{7}$.



4. Considerando el espacio muestral S: extraer una carta de una baraja.

Y denotando A: extraer una carta roja.

$n(\text{S}) = 52$ (son 52 naipes en total) y $n(\text{A}) = 26$ (hay 26 cartas rojas en la baraja).

Por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{n(\text{A})}{n(\text{S})} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

La probabilidad experimental se puede calcular de los datos de la clase anterior, para esta clase se ha pedido de las cartas rojas porque el de las cartas negras se hizo en la clase anterior, así se puede diferenciar entre probabilidad experimental y teórica. Al comparar los resultados se puede esperar que sean muy cercanos (excepto casos aislados).

1.3 Intersección y regla de adición para probabilidad

Problema inicial

Se tira un dado una vez y se definen los siguientes eventos:

A: Cae 1, 2 o 3 B: Cae 1, 3 o 5

a) ¿Qué representa el evento “ocurre A o B”? Determina su probabilidad.
b) ¿Qué representa el evento “ocurre A y B”? Determina su probabilidad.

Solución

a) El evento ocurre A o B, significa que al lanzar el dado puede caer 1, 2, 3 o 5, es decir, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$. Entonces se tiene que los casos favorables son 4 y los casos posibles (al tirar un dado) son 6. Por lo tanto, P(A o B) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) El evento ocurre A y B, significa que al lanzar el dado puede caer 1 o 3 (para que se cumpla tanto A como B), es decir $A \cap B = \{1, 3\}$. Entonces se tiene que los casos favorables son 2 y los casos posibles son 6, por lo tanto, P(A y B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Conclusión

Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral (S), al evento definido por “ocurre tanto A como B” se denota por $A \cap B$ y se lee “evento A intersectado B”.

Cuando la intersección de 2 eventos es vacía, es decir, $A \cap B = \varnothing$, se dice que **los eventos A y B son mutuamente excluyentes**.

Además, al evento definido por “ocurre el evento A o el evento B” se denota por $A \cup B$ y se lee “evento A unido B”. Puesto que se cumple que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cuando los eventos A y B son mutuamente excluyentes se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja de 52 cartas, el resultado sea un “as” o 7?

Se puede denotar los eventos: A: La carta es un “as”. B: La carta es un 7.

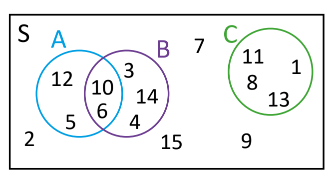
Se cumple que $n(A) = 4$ (los 4 “ases” de la baraja), $n(B) = 4$ (los 4 “sietes” de la baraja), y el evento de extraer un “as” o un 7 es $A \cup B$ y además $A \cap B = \varnothing$, por lo tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}.$$

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados el resultado de sumar sus puntos sea 5 o 7.

2. Considerando los eventos A, B y C en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:
   a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A \cap C)$ d) $P(A \cup C)$
   e) ¿Cuáles eventos son mutuamente excluyentes y cuáles no?



3. Determina la probabilidad que al ordenar 3 niñas y 3 niños, dos niñas específicas estén siempre juntas y 2 niños específicos estén siempre juntos.

Indicador de logro:

1.3 Resuelve problemas de probabilidad aplicando la regla de adición para la unión de dos eventos excluyentes o no excluyentes.

Secuencia:

Luego de haber establecido la definición de la probabilidad teórica, ahora se trabajará con las propiedades de la cardinalidad de conjuntos y establecer la regla de adición para la probabilidad.

Propósito:

En la Conclusión se hace la deducción de la regla de adición utilizando la definición de la probabilidad teórica, y en el Ejemplo se presenta una manera concreta de utilizar este resultado.

Solución de problemas:

1. Considerando A: el resultado de la suma es 5 y B: el resultado de la suma es 7.

Luego A = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}, entonces, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Y $P(B) = \frac{1}{6}$, y puesto que no puede caer 5 y 7 a la misma vez, entonces A y B son mutuamente excluyentes, por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$.

2a) $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{15}$.

2b) $P(A) = \frac{4}{15}$, $P(B) = \frac{5}{15}$, entonces, $P(A \cup B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$.

2c) $P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$.

2d) $P(C) = \frac{4}{15}$, entonces, $P(A \cup C) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$.

2e) A y C, B y C son mutuamente excluyentes; A y B no son mutuamente excluyentes.

3. Considerando el espacio muestral S: maneras de ordenar 6 niños en una fila.

Y denotando A: dos niñas y dos niños específicos están siempre juntos.

$n(A) = 4! \times 2! \times 2!$ y $n(S) = 6!$, por lo tanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 2! \times 2!}{6!} = \frac{2}{15}$.

1.4 Aplicación de la regla de adición de probabilidad*

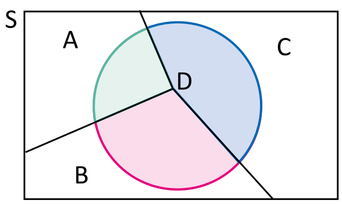
Problema inicial

En una empresa se producen 500 dispositivos, entre celulares, tablets, laptops; entre estos 500 dispositivos la probabilidad de que un producto sea un celular defectuoso es $\frac{1}{20}$, la probabilidad de que el producto sea una tablet defectuosa es $\frac{3}{125}$, y la probabilidad de que sea una laptop defectuosa es $\frac{1}{50}$. Determina la probabilidad de que al seleccionar uno de los 500 productos, este sea defectuoso.

Solución

Considerando los eventos A: es celular. B: es tablet. C: es laptop.

Sea D el evento: producto defectuoso; solo tiene tres opciones a saber, ser celular defectuoso, ser tablet defectuosa o ser laptop defectuosa.



Observando el diagrama de Venn a la derecha, se cumple que $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$.

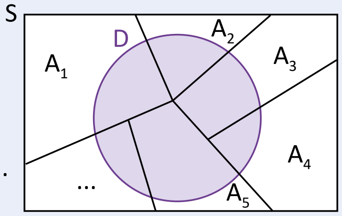
Además se sabe que $P(D \cap A) = \frac{1}{20}$, $P(D \cap B) = \frac{3}{125}$, $P(D \cap C) = \frac{1}{50}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que al extraer uno de los 500 productos sea defectuoso es:

$$P(D) = P[(D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)] = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = \frac{1}{20} + \frac{3}{125} + \frac{1}{50} = \frac{25 + 12 + 10}{500} = \frac{47}{500}.$$

Conclusión

Para calcular la probabilidad de un evento D que se divide en varios eventos particulares $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, mutuamente excluyentes y que la unión de todos los A_i conforman el evento D, se calcula de la siguiente manera:



$$P(D) = P[(D \cap A_1) \cup (D \cap A_2) \cup \ldots \cup (D \cap A_n)] = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + \ldots + P(D \cap A_n).$$

Ejemplo

Para una rifa se utilizan papeles de 4 colores diferentes, $\frac{1}{6}$ de todos los papeles están premiados. De todos los papeles $\frac{1}{18}$ están premiados y son verdes; $\frac{1}{36}$ están premiados y son rojos; y $\frac{1}{18}$ están premiados y son morados. Determina la probabilidad de que al extraer un papel sea de color amarillo y esté premiado.

Considerando los eventos D: El papel sale premiado. A_1: El papel es verde.

A_2: El papel es rojo. A_3: El papel es morado. A_4: El papel es amarillo.

Entonces, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) + P(D \cap A_4)$.

Luego, $P(D \cap A_4) = P(D) - P(D \cap A_1) - P(D \cap A_2) - P(D \cap A_3) = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$.

Problemas

1. Se encuesta a algunas personas acerca de su sexo y profesión, y a partir de ello se sabe que del total de personas, $\frac{1}{3}$ son mujeres médicas, $\frac{1}{6}$ son mujeres matemáticas, y $\frac{1}{16}$ son mujeres que laboran en otras actividades. Determina la probabilidad de que al seleccionar una persona encuestada, esta sea mujer.

2. En una clínica pediátrica se atiende la misma cantidad de niñas y de niños, y $\frac{1}{6}$ de todos los niños atendidos son niñas mayores de 12 meses. Determina la probabilidad de que sea atendida una niña de a lo sumo 12 meses.

Indicador de logro:

1.4 Encuentra la probabilidad de un evento que puede particionarse.

Secuencia:

En esta clase se analizará una aplicación de la regla de adición para probabilidad, aplicándola a intersecciones de eventos que particionan otro evento.

Propósito:

Esta aplicación será útil para abordar posteriormente el Teorema de probabilidad total y el teorema de Bayes, en donde solamente será necesario involucrar la probabilidad condicional a este resultado.

Solución de problemas:

1. Considerando los eventos, D: la persona encuestada es mujer. A_1: la persona encuestada es médica, A_2: la persona encuestada es matemática, A_3: la persona encuestada labora en otras actividades.

Luego, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{16+8+3}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$.

2. Considerando los eventos, D: Se atiende una niña, A_1: la niña atendida es mayor de 12 meses, A_2: la niña atendida tiene a lo sumo 12 meses.

Entonces, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2)$.

Luego, $P(D) = \frac{1}{2}$, puesto que se atiende la misma cantidad de niños que de niñas.

Por lo tanto, $P(D \cap A_2) = P(D) - P(D \cap A_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Este problema podría verse como una aplicación de la probabilidad del complemento (que se verá posteriormente), sin embargo, es un poco complejo interpretar que la probabilidad del evento completo (en este caso que sea niñas) no sea 1, es decir, que el evento no sea el espacio muestral, por ello se aborda en esta temática.

Lección 1

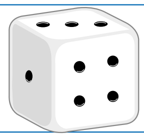
1.5 Axiomas de probabilidad (teórica)

Problema inicial

Considerando el experimento de tirar un dado, resuelve:

a) Determina la probabilidad de obtener un 3 en la tirada.

b) Determina la probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6 en la tirada.



Solución

Expresando el espacio muestral como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Sean A y B los eventos correspondientes a cada literal.

a) Se cumple que A = {3}, entonces $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.

b) Se cumple que B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, entonces $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$.

Axiomas de Kolmogórov

Para dos eventos A y B de un espacio muestral S se cumple:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$. Dado que $A \subseteq S$, entonces se cumple $0 \leq n(A) \leq n(S)$.

2) P(S) = 1. En esta situación los casos favorables son todos los casos posibles, o bien A = S.

3) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Del axioma 2 y 3 se deduce que $P(S) = P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$, y entonces $P(\varnothing) = 0$.

Ejemplo

A partir del axioma 3 de Kolmogórov, demuestra que si A, B y C son eventos del espacio muestral S, y $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Para 3 conjuntos A, B y C se cumple que: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Puesto que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) \quad \text{--------} \ (1)$$

Luego como $A \cap B = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{--------} \ (2)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1), se cumple que

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A) + P(B) + P(C).$$

De la misma manera si cada pareja de los eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces se tiene que:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Problemas

1. Determina la probabilidad que al formar un grupo de 5 personas entre 4 mujeres y 4 hombres si:
   a) está integrado por 2 hombres y 3 mujeres;
   b) está integrado por al menos un hombre o por al menos una mujer;
   c) está integrado por 3 o por 4 mujeres.

Utiliza las propiedades de los combinatorios para simplificar los cálculos.

2. Sean A, B, C y D eventos del espacio muestral S, y $A \cap B = A \cap C = B \cap C = B \cap D = C \cap D = D \cap A = \varnothing$, demuestra que $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$.

Indicador de logro:

1.5 Comprueba y aplica los axiomas de Kolmogórov.

Secuencia:

Durante las clases anteriores se ha trabajado con conceptos sobre probabilidad frecuentista y clásica, a partir de los cuales se han podido deducir algunas propiedades de la probabilidad, en esta clase se establecen los axiomas de Kolmogórov como punto de partida para el desarrollo de la teoría de probabilidad.

Propósito:

El concepto de probabilidad se ha ido construyendo a partir de ideas intuitivas, los axiomas de Kolmogórov establecen de manera formal los resultados intuitivos que se han planteado en las clases anteriores (la misma función que representaron históricamente estos axiomas), es por ello que al lado de cada axioma se escribe una "justificación", aunque no son justificaciones (los axiomas no se demuestran), sino las ideas intuitivas que formalizan los axiomas de kolmogórov.

Solución de problemas:

1a) Sea A: el grupo está integrado por 2 hombres y 3 mujeres.

$n(S) = {}_8C_5$ y $n(A) = {}_4C_2 \times {}_4C_3$, por lo tanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_3}{{}_8C_5} = \frac{3}{7}$.

1b) En este caso el evento A: el grupo está integrado por al menos un hombre o al menos una mujer, coincide con el espacio muestral S, entonces P(A) = P(S) = 1 (por axioma 2).

1c) Sea A: el grupo está integrado por 3 mujeres y B: el grupo está integrado por 4 mujeres.
Puesto que $A \cap B = \varnothing$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4C_3 \times {}_4C_2}{{}_8C_5} + \frac{{}_4C_4 \times {}_4C_1}{{}_8C_5} = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$.

2. Puesto que $(A \cup B) \cap (C \cup D) = [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, entonces por el axioma 3:

$$P[(A \cup B) \cup (C \cup D)] = P(A \cup B) + P(C \cup D) \quad \text{-------} \ (1)$$

Luego como $A \cap B = \varnothing$ y $C \cap D = \varnothing$ entonces por el axioma 3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ y } P(C \cup D) = P(C) + P(D) \quad \text{-------} \ (2)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1), se cumple que

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P[(A \cup B) \cup (C \cup D)] = P(A) + P(B) + P(C) + P(D).$$

Este problema también se puede resolver separando un evento y los otros 3, para luego aplicar lo demostrado en el Ejemplo de la clase.

1.6 Probabilidad del complemento*

Problema inicial

Calcula la probabilidad que al tirar un dado 3 veces caiga 1 al menos una vez.

Solución

Considerando el evento A: Cae 1 al menos una vez en 3 tiradas, entonces se puede definir el evento:

A^c = No cae 1 en las 3 tiradas.

Además, para el espacio muestral S, se cumple que $S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \varnothing$ entonces:

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, pero $P(S) = 1$ (por los axiomas de Kolmogórov), entonces $P(A) + P(A^c) = 1$.

Por lo tanto $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Luego, $n(S) = 6^3$ (considerando que cada tirada tiene 6 opciones) y $n(A^c) = 5^3$ (hay 5 opciones, 2, 3, 4, 5 y 6) por lo tanto, $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$.

Finalmente $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Conclusión

Sea A un evento dentro de un espacio muestral S. Al evento A^c se le conoce como **complemento del evento A**, y a $P(A^c)$ se le conoce como **probabilidad del complemento del evento A**. Se cumple que

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Ejemplo

Determina la probabilidad que al ordenar 3 niñas y 3 niños no queden las 3 niñas todas juntas.

Considerando el evento A: Las 3 niñas no quedan todas juntas.

Entonces A^c: Las 3 niñas quedan todas juntas.

Luego $n(A^c) = 4!3!$ y $n(S) = 6!$

Luego $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{4!3!}{6!} = \frac{1}{5}$, y por lo tanto, $P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

> También puedes encontrar los casos favorables contando por el complemento y calcular directamente lo que se está pidiendo.

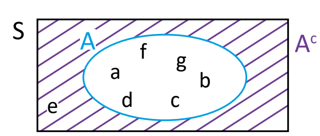
Problemas

1. La probabilidad de que una tuerca producida por una máquina sea defectuosa es $\frac{1}{40}$, determina la probabilidad que la tuerca sea no defectuosa.

2. Determina la probabilidad de que al tirar una moneda 10 veces se obtenga al menos una cara.

3. En un juego de dados se lanzan 6 dados, y un jugador gana si en la tirada se obtiene al menos un "1" en alguno de los dados. Determina la probabilidad de ganar en este juego de dados.

4. Considerando el evento A en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:
   a) $P(A^c)$ b) $1 - P(A^c)$ c) $P(A \cap A^c)$ d) $P(A \cup A^c)$



Indicador de logro:

1.6 Determina la probabilidad de un evento calculando la probabilidad del evento complementario.

Secuencia:

Posteriormente de haber establecido los axiomas de Kolmogórov, se estudiará su aplicación en la probabilidad del complemento, la cual es muy útil en las probabilidades, y cuya base fue abarcada también en la unidad de métodos de conteo.

Propósito:

La intención es colocar problemas que se hayan resuelto en la unidad de métodos de conteo, para poder enfatizar únicamente su aplicación en la probabilidad.

Solución de problemas:

1. Sean A: la tuerca no es defectuosa y B: la tuerca es defectuosa.

Entonces se cumple que $P(A) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$.

2. Sean A: obtener al menos una cara en 10 lanzamientos.

Entonces A^c: no obtener cara en los 10 lanzamientos (equivale a que caiga 10 veces corona).

Por lo tanto, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1\,023}{1\,024}$.

3. Sea A: obtener al menos un "1" en los 6 dados.

Entonces A^c: no obtener algún "1" en los 6 dados.

Por lo tanto, $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6} = \frac{31\,031}{46\,656} \approx 0.67$.

En este problema se hace la conversión a decimal, para hacer una mejor interpretación de la respuesta, a partir de lo cual se puede establecer que 0.67 es una probabilidad bastante alta para ganar el juego.

4a) Contando directamente del diagrama de Venn $P(A^c) = \frac{1}{7}$.

4b) $1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

4c) $P(A \cap A^c) = P(\varnothing) = 0$

4d) $P(A \cup A^c) = P(S) = 1$

Solamente el literal a) necesita contarse directamente del diagrama de Venn.

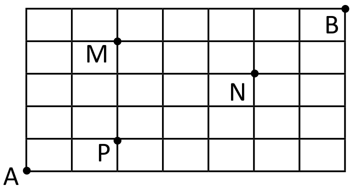
1.7 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas sobre probabilidad.

1. Determina el espacio muestral del experimento de lanzar 2 dados al mismo tiempo. Luego expresa como subconjunto el evento “la suma de los puntos es 7”, y el evento “la suma de los puntos es 5”.

2. Carmen se transporta por la ciudad de Santa Ana, se encuentra en el punto A y desea llegar al punto B como lo muestra la figura. Determina la probabilidad de que tomando los caminos más cortos se cumpla lo siguiente:

   a) Carmen pasa por el punto M o por el punto N.
   b) Carmen pasa por el punto P y por el punto N.



3. Considerando los eventos A, B y C en el espacio muestral (S), analiza el diagrama de Venn y determina:

   a) El espacio muestral S, el evento A, el B y el C.

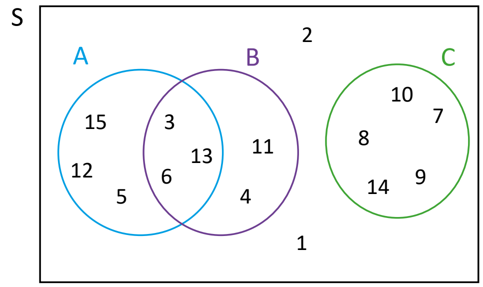
   b) P(A), P(B) y P(C).

   c) $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ y $P(A \cap C)$.

   d) $P(A \cup B)$, $P(B \cup C)$ y $P(A \cup C)$.

   e) $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(C^c)$.

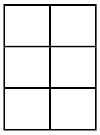
   f) $1 - P(A^c)$, $1 - P(B^c)$ y $1 - P(C^c)$.



4. Se eligen el presidente y vicepresidente de una comisión de entre 5 hombres y 5 mujeres. Determina la probabilidad de que el presidente sea mujer y el vicepresidente sea hombre.

5. Considerando las piezas de Braile formadas por un rectángulo con 6 celdas en el que cada celda puede estar vacía o tener un punto en relieve. Al seleccionar una pieza de Braile, determina:

   a) La probabilidad de que la pieza tenga exactamente 3 puntos y 3 vacíos.
   b) La probabilidad de que la pieza tenga un punto o un vacío.
   c) La probabilidad de que la pieza tenga 8 puntos.



6. En una tienda de electrodomésticos se determina que al llegar un cliente, la probabilidad de que compre un televisor es $\frac{4}{15}$, que compre una refrigeradora es $\frac{7}{30}$, y que compre una lavadora es $\frac{2}{15}$. Determina la probabilidad de que al llegar un cliente se venda alguno de estos 3 productos. Considera que cada cliente compra a lo sumo un producto.

7. En un juego de azar se descubre que un dado está cargado, pues al lanzarlo 20 veces, en 17 ocasiones cayó 6. Si el juego consiste en lanzar un dado una vez y que no caiga 6, determina la probabilidad de ganar el juego.

8. Se encargarán 12 pupusas para cenar, y se puede escoger entre pupusa de ayote, revueltas y de queso. Determina la probabilidad de que al encargarlas, al menos una pupusa sea revuelta, considerando que cada tipo de pupusa tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

Indicador de logro:

1.7 Resuelve problemas correspondientes a los axiomas de probabilidad.

Solución de problemas:

1. S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)} y B = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}.

2a) Sea M: ir del punto A al B pasando por M, y N: ir del punto A al B pasando por N. Entonces, puesto que no se puede pasar tanto en el punto M como en el punto N, se tiene que $M \cap N = \varnothing$, por lo tanto, $P(M \cup N) = P(M) + P(N) = \frac{{}_6C_2 \times {}_6C_5}{{}_{12}C_7} + \frac{{}_8C_5 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_7} = \frac{5}{44} + \frac{14}{33} = \frac{71}{132}$.

2b) Sea A: ir del punto A al B pasando por P y por N.
$P(A) = \frac{{}_3C_2 \times {}_5C_3 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_7} = \frac{5}{22}$.

3a) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}; A = {3, 5, 6, 12, 13, 15}; B = {3, 4, 6, 11, 13}; C = {7, 8, 9, 10, 14}.

3b) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

3c) $P(A \cap B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; $P(B \cap C) = P(\varnothing) = 0$; $P(A \cap C) = P(\varnothing) = 0$.

3d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$; $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$;
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$.

3e) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$; $P(B^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $P(C^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3f) $1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; $1 - P(B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$; $1 - P(C^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. Sea A: el presidente es mujer y el vicepresidente es hombre.

Entonces $P(A) = \frac{5 \times 5}{{}_{10}P_2} = \frac{5}{18}$.

5a) Sea A: la pieza tiene exactamente 3 puntos y 3 vacíos; entonces $n(A) = {}_6C_3$ (cantidad de maneras de escoger en donde irán los 3 puntos) y $n(S) = 2^6$, por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_6C_3}{2^6} = \frac{5}{16}$.

5b) Sea B: la pieza tiene exactamente un punto; y C: la pieza tiene exactamente un vacío, entonces $n(B) = {}_6C_1$ y $n(C) = {}_6C_5$, y puesto que $B \cap C = \varnothing$, se tendrá que $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{{}_6C_1}{2^6} + \frac{{}_6C_5}{2^6} = \frac{3}{16}$.

5c) Sea D: la pieza tiene 8 puntos; entonces $D = \varnothing$, por lo tanto, $P(D) = 0$.

6. Considerando los eventos, D: vender alguno de los productos. A_1: vender un televisor.
A_2: vender una refrigeradora. A_3: vender una lavadora.
Luego, $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) = \frac{4}{15} + \frac{7}{30} + \frac{2}{15} = \frac{8+7+4}{30} = \frac{19}{30}$.

7. Sea A: ganar el juego (no cae 6), entonces A^c: perder el juego (cae 6), por lo tanto,
$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$.

8. Sea A: Al menos una pupusa es revuelta, entonces $n(A) = {}_{(11 + 2)}C_2$ (utilizando separadores), por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_{13}C_2}{{}_{14}C_2} = \frac{6}{7}$.

2.1 Probabilidad condicional

Problema inicial

Los resultados de una encuesta sobre profesiones se muestran en la tabla de la derecha. Calcula la probabilidad de que al elegir una persona sea una mujer matemática dado que ya se ha elegido una mujer.

Ocupación	Mujeres	Hombres	Total
Médico	40	31	71
Matemático	22	24	46
Oficios en el hogar	15	15	30
Total	77	70	147

Solución

Sea A: es matemático y B: es mujer.

Dado que ya se sabe que al elegir la persona esta fue mujer (ya no cabe la posibilidad de que sea hombre), entonces los casos posibles son 77.

Ocupación	Mujeres	Hombres	Total
Médico	40	31	71
Matemático	22	24	46
Oficios en el hogar	15	15	30
Total	77	70	147

Y los casos favorables están en la celda donde coincide que sea mujer como que sea matemático, es decir, son 22 casos favorables.

Por lo tanto, P(A si ya sucedió B) = $\frac{22}{77} = \frac{2}{7}$.

Definición

Dados dos evento A y B, se puede estar interesado en encontrar la probabilidad de que suceda el evento A suponiendo que ya sucedió el evento B. Esto se conoce como **probabilidad condicional**, se denota P(A/B), y se lee: "La probabilidad de A dado B". Para calcularla se puede considerar que los casos posibles son las formas en que puede suceder B, es decir n(B), y los casos favorables como las formas en que puede suceder A∩B, es decir n(A∩B). Entonces se cumple que

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Considerando el total de casos que tiene el espacio muestral como n(S), se tiene que la igualdad anterior es equivalente a

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo

Determina la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado es mayor que 4 dado que es impar.

Considerando, A: es mayor que 4 y B: es impar.

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ (solo 5 cumple), $P(B) = \frac{3}{6}$ (cumplen el 1, 3 y 5), por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{\cancel{6}} \div \frac{3}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}$.

Problemas

1. Considerando la tabla del Problema inicial, determina:
   a) La probabilidad de escoger un hombre dado que se ocupa de los oficios del hogar.
   b) La probabilidad de escoger un matemático dado que es hombre.
   c) La probabilidad de escoger una mujer dado que es matemático.

2. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado es impar dado que es mayor que 3.

3. En una empresa de carros hay 3 máquinas que ensamblan la misma cantidad de carros, y al escoger un carro al azar, la probabilidad de que sea defectuoso y que sea de la máquina 1 es $\frac{1}{120}$. Determina la probabilidad de que un carro producido por la máquina 1 sea defectuoso.

Indicador de logro:

2.1 Aplica la probabilidad condicional para resolver situaciones específicas.

Secuencia:

Luego de haber trabajado con la parte de axiomas de Kolmogórov para probabilidad, se introducirá la definición de probabilidad condicional a partir de tablas de doble entrada, y asociando estas a la teoría de conjuntos.

Propósito:

Las tablas de doble entrada son un recurso gráfico de las intersecciones entre eventos, y se puede dar sentido a la idea de cambiar el conjunto universal según la fila o columna, en esta clase será muy útil trabajar la probabilidad como cardinalidad de conjuntos.

Solución de problemas:

1a) Considerando A: es hombre, y B: se ocupa de oficios domésticos, entonces:

$P(A \cap B) = \frac{15}{147}$, $P(B) = \frac{30}{147}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{147} \div \frac{30}{147} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

1b) Considerando A: es matemático, y B: es hombre, entonces:

$P(A \cap B) = \frac{24}{147}$, $P(B) = \frac{70}{147}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{24}{147} \div \frac{70}{147} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$.

1c) Considerando A: es mujer, y B: es matemático, entonces:

$P(A \cap B) = \frac{22}{147}$, $P(B) = \frac{46}{147}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{22}{147} \div \frac{46}{147} = \frac{22}{46} = \frac{11}{23}$.

2. Sea A: el resultado es impar; y B: el resultado es mayor que 3, entonces $n(A \cap B) = 1$ (solamente 5 es mayor que 3 y además impar), y $n(B) = 3$ (4, 5 y 6 son las posibilidades). Luego se tiene que

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$.

3. Sea A: el auto es defectuoso; y B: el auto es de la máquina uno, entonces:

$P(A \cap B) = \frac{1}{120}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{120} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{40}$.

2.2 Variantes de la probabilidad condicional

Problema inicial

En una bolsa hay 3 bolitas azules y 5 bolitas blancas, si se extraen dos bolitas, una después de la otra sin reposición (sin regresar la primera bolita que se saca a la bolsa), determina la probabilidad de que las dos bolitas sean de color azul.

Solución

Sea A: la primera bolita es azul y B: la segunda bolita es azul.

Se está interesado en que tanto la primera como la segunda bolita sean azules, es decir, $P(A \cap B)$.

Se tiene que $P(A) = \frac{3}{8}$, ahora quedan 7 bolitas, de las cuales 2 son azules. Por lo tanto $P(B/A) = \frac{2}{7}$.

De la definición de probabilidad condicional se sabe que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, de lo cual se puede deducir que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de extraer dos bolitas azules es $\frac{3}{28}$.

Conclusión

Es posible calcular la probabilidad de una intersección a partir del resultado de probabilidad condicional que se estudió en la clase 2.1, para ello se cumple que: $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$.

Este resultado se conoce como **Teorema del producto para probabilidad.**

Problemas

1. En una bolsa hay 2 bolitas azules y 4 bolitas blancas, si se extraen dos bolitas, una después de la otra sin reposición, determina la probabilidad que la primera bolita sea azul y la segunda sea blanca.

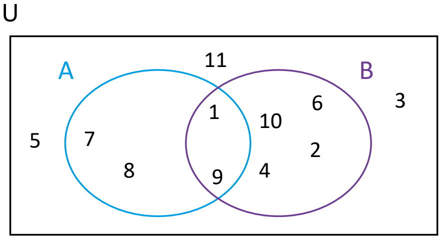
2. Se tiene una baraja con cartas de 4 colores diferentes (uno de esos colores es verde), cada color tiene 5 cartas numeradas del 1 al 5. Si se extraen 2 cartas, una tras otra sin reposición, determina la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) Ambas sean 1.
   b) La primera sea 2 y la segunda sea 3.
   c) La primera sea 3 y la segunda sea 4 de color verde.
   d) Ambas sean del mismo color.
   e) La primera sea 2 y la segunda 1 del mismo color.

3. Utilizando el diagrama de Venn de la derecha calcula:

   a) P(B) y P(A).
   b) P(B/A) y P(A/B).
   c) Calcula $P(A \cap B)$ de dos formas diferentes a partir de los literales anteriores.

U



Indicador de logro:

2.2 Determina la probabilidad de la intersección de dos eventos aplicando el teorema del producto para la probabilidad.

Secuencia:

A partir de la definición de la probabilidad condicional se puede deducir directamente el Teorema del producto para probabilidad.

Posibles dificultades:

Lograr diferenciar entre la probabilidad de la intersección de dos eventos y la probabilidad condicional de que un evento suceda dado que sucede otro puede causar confusión en los estudiantes.

Solución de problemas:

1. Considerando A: la primera bolita es azul, y B: la segunda bolita es blanca, entonces:

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{4}{5}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

2a) Sea A: la primera es 1, y B: la segunda es 1, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{3}{19}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{19} = \frac{3}{95}$.

2b) Sea A: la primera es 2, y B: la segunda es 3, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{4}{19}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{19} = \frac{4}{95}$.

2c) Sea A: la primera es 3, y B: la segunda es 4 verde, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{19}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{95}$.

2d) Considerando primero un color, sea A: la primera del color verde, y B: la segunda es del color verde, entonces: $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $P(B/A) = \frac{4}{19}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$.

Y se puede proceder de manera análoga para los otros 3 colores, por lo tanto, la probabilidad que ambas bolitas sean del mismo color es $\frac{1}{19} \times 4 = \frac{4}{19}$.

2e) Sea A: la primera es 2, y B: la segunda es 1 del mismo color que la primera, entonces:

$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{19}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{95}$.

3a) $P(B) = \frac{6}{11}$; $P(A) = \frac{4}{11}$.

3b) En A hay 4 elementos, y estando en el conjunto A, hay solamente hay 2 formas en que puede ocurrir B, por lo tanto, $P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

De manera análoga $P(A/B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3c) $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{11}$, $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{6}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{11}$.

2.3 Aplicación de la probabilidad condicional

Problema inicial

Se extraen dos cartas una tras otra de una baraja, determina la probabilidad de que la segunda carta sea de diamantes dado que la primera fue de diamantes, si:

a) La primera carta no se devuelve a la baraja para la segunda escogitación.

b) La primera carta se devuelve a la baraja para la segunda escogitación.

Solución

Considerando A: la segunda carta es de diamantes y B: la primera carta es de diamantes.

a) Para que la primera carta sea de diamantes hay 13 cartas disponibles, y luego dado que no se devuelve, para que la segunda carta sea de diamantes solamente habría 12 cartas disponibles. Y los casos posibles son 52 y luego 51 para la segunda carta, por lo tanto, $P(A \cap B) = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{1}{17}$.

Además, para que la primera carta sea de diamantes hay 13 posibilidades, y para la segunda carta habrían 51 cartas disponibles, por lo tanto, $P(B) = \frac{13 \times 51}{52 \times 51} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{17} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$.

b) La diferencia con el caso anterior es que para que la segunda sea de diamantes se tendrán 13 cartas disponibles de nuevo, y en los casos posibles 52 y 52, por lo tanto, $P(A \cap B) = \frac{13 \times 13}{52 \times 52} = \frac{1}{16}$.

Y análogamente $P(B) = \frac{13 \times 52}{52 \times 52} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{16} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Conclusión

La probabilidad condicional a menudo se utiliza para agregar condiciones dependiendo la conveniencia o la situación determinada. Por ejemplo para el Problema inicial podría ser de utilidad para estudiar las estrategias de juego, en otras situaciones podría utilizarse para pronosticar el clima, situaciones de epidemias y características de las personas que afecta, entre otros.

Problemas

1. En un juego de cartas la primera carta ha sido de tréboles, para ganar es necesario que la segunda carta también sea de tréboles. Analiza en qué situación se tienen mayores probabilidades de ganar, si la segunda carta es extraída de la misma baraja que la primera (sin reponer la primera carta), o si la segunda carta es extraída de una baraja íntegra (de la cual no se ha extraído ninguna carta aún).

2. En un estudio se quiere determinar si la diabetes es una consecuencia del sobrepeso,y se investigó que la probabilidad de que una persona tenga sobrepeso es $\frac{1}{2}$, y además cuando una persona tiene sobrepeso la probabilidad de que tenga también diabetes es $\frac{2}{3}$. Determina la probabilidad de que una persona tenga tanto sobrepeso como diabetes.

3. En una carpintería se han elaborado 25 pupitres de los cuáles 4 están defectuosos, 5 tienen pequeños problemas y los demás están en óptimas condiciones. Determina la probabilidad de que al escoger 2 pupitres uno tras otro, el primero esté defectuoso y el segundo tenga pequeños problemas.

4. En un juego se tienen 3 puertas, y tras una de ellas hay un premio de un carro; el juego consiste en que el concursante elige una de las 3 puertas, luego el presentador, quien conoce qué hay detrás de cada puerta, abre una puerta que sabe que no tiene premio, y da la opción al concursante que cambie de puerta. Utiliza la probabilidad condicional para determinar con cuál opción (cambiando o quedándose con la puerta) tiene mayores probabilidades de ganar.

Unidad 8

215

Indicador de logro:

2.3 Combina los principios básicos de conteo con los conceptos de probabilidad condicional para resolver problemas.

Secuencia:

En esta clase se resolverán algunos problemas sobre probabilidad condicional, en los cuales el razonamiento es un poco más complejo, debido a que integran los principios básicos de conteo y lo visto sobre probabilidad condicional.

Propósito:

Los Problemas que se resolverán son más apegados a la realidad y la toma de decisiones, por tal razón consideran otras variables cuyo análisis necesita la utilización de otros contenidos vistos en la Unidad 7.

Solución de problemas:

1. Analizando cada caso, en el escenario en donde se extrae de la misma baraja, se tiene que

sea A: la carta es de tréboles, entonces $P(A) = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$.

Y para el escenario en que se extrae la carta de otra baraja se tiene que

sea B: la carta es de tréboles, entonces $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Luego comparando ambas probabilidades $P(A) = \frac{4}{17} = \frac{16}{68}$ y $P(B) = \frac{1}{4} = \frac{17}{68}$, por lo tanto, es más probable conseguirlo en el segundo escenario.

2. Sean A: la persona tiene diabetes; y B: la persona tiene sobrepeso, entonces:

$P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{2}{3}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

3. Sean A: el segundo tiene pequeños problemas; y B: el primero está defectuoso, entonces:

$P(B) = \frac{4}{25}$, $P(A/B) = \frac{5}{24}$, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = \frac{4}{25} \times \frac{5}{24} = \frac{1}{30}$.

4. Al iniciar el juego, cada puerta tendría la misma probabilidad de tener el carro, es decir, al elegir la puerta tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad de ganar y $\frac{2}{3}$ de perder.

Luego si el presentador abre una puerta que no contiene el premio, y ofrece al concursante cambiar, puesto que la probabilidad que tenía de perder equivale a que el carro está en cualquiera de las otras 2 puertas, y dado que ya sabe en cuál de las dos puertas no está, al cambiar de puerta la probabilidad de ganar es igual a la de que no haya tomado la puerta del carro, que es equivalente a $\frac{2}{3}$, por el contrario, si se queda con la misma puerta, el concursante mantendrá la probabilidad de $\frac{1}{3}$ de inicio.

Primera elección	Cambia	No cambia
Cabra 1	Carro	Cabra 1
Cabra 2	Carro	Cabra 2
Carro	Cabra 1 o 2	Carro

Opción	Carro	Cabra	Total
Cambia	2	1	3
No cambia	1	2	3
Total	3	3	6

Usando la probabilidad condicional, sean A: gana el carro, B: cambia de puerta, y C: no cambia de puerta, entonces:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{6} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

2.4 Problemas con probabilidad condicional

Problema inicial

En una carpintería se diseñan pupitres para personas zurdas, y en ella trabajan Marta, María y Carlos. Las probabilidades que un pupitre elaborado por Marta, María y Carlos tenga defectos son 0.1, 0.12 y 0.11, respectivamente. Si todos producen la misma cantidad de pupitres, determina:

a) La probabilidad de elegir un pupitre defectuoso.

b) La probabilidad de que al elegir un pupitre defectuoso este lo haya elaborado Marta.

Solución

a) Sean los eventos A: es de Marta, B: es de María, C: es de Carlos, D: es defectuoso.

Entonces se cumple que $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

Además se sabe que: $P(D/A) = 0.1$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de Marta).
$P(D/B) = 0.12$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de María).
$P(D/C) = 0.11$ (La probabilidad de que sea defectuoso, dado que es de Carlos).

Puesto que todos producen la misma cantidad de pupitres, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Además se sabe que $P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$, entonces $P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A) = \frac{1}{3}(0.1)$.

Análogamente se cumple que $P(B \cap D) = \frac{1}{3}(0.12)$ y $P(C \cap D) = \frac{1}{3}(0.11)$.

Por lo tanto, $P(D) = \frac{1}{3}(0.1) + \frac{1}{3}(0.12) + \frac{1}{3}(0.11) = \frac{1}{3}(0.33) = 0.11$.

b) Ahora bastaría calcular $P(A/D)$ (la probabilidad de que un pupitre sea de Marta dado que es defectuoso).

Dado que $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$, y del literal a), $P(A \cap D) = \frac{1}{3}(0.1)$ y $P(D) = 0.11$.

Por lo tanto, $P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}(0.1)}{(0.11)} = \frac{10}{33}$.

Observa que una probabilidad se puede escribir como fracción o como decimal, y el Problema inicial también se puede trabajar convirtiendo los decimales a fracciones.

Conclusión

Para calcular la probabilidad de que un pupitre sea defectuoso fue necesario aplicar la regla de adición entre las intersecciones de eventos excluyentes (si un pupitre lo elabora Marta no pudo haber sido elaborado por Carlos o María), este resultado se conoce como **teorema de probabilidad total**.

Luego, se utilizó el resultado para calcular la probabilidad de que un pupitre sea de una persona en particular dado que ya se sabe que es defectuoso, este resultado se conoce como **teorema de Bayes**.

Problemas

1. En una fábrica hay 2 máquinas que ensamblan la misma cantidad de carros cada una; la probabilidad de que un carro ensamblado por la máquina 1 tenga problemas es 0.05 y la probabilidad de que un carro producido por la máquina 2 tenga problemas es 0.07, determina:
   a) La probabilidad de que un carro tenga problemas.
   b) La probabilidad de que un carro haya sido ensamblado por la máquina 1 dado que tiene problemas.

2. Una imprenta posee 3 impresoras, la impresora 1 produce el 20%, la impresora 2 el 40% y la 3 produce el resto. La probabilidad de que la impresora 1 imprima defectuosamente una página es $\frac{1}{100}$, que lo haga la impresora 2 es $\frac{1}{50}$ y que sea la impresora 3 es $\frac{1}{40}$. Determina la probabilidad de que al tener una página defectuosa esta haya sido impresa por la máquina 3.

Indicador de logro:

2.4 Resuelve problemas de aplicación del teorema de probabilidad total y teorema de Bayes.

Secuencia:

Finalmente uno de los resultados más importantes en donde se aplica la probabilidad condicional es el teorema de Bayes, cuyo resultado se establece a partir del teorema de probabilidad total.

Propósito:

En esta clase se pretende utilizar los resultados sobre el teorema de probabilidad total y teorema de Bayes, sin enunciar ni demostrar formalmente dichos resultados, únicamente utilizando lo visto en la lección anterior y la probabilidad condicional.

Solución de problemas:

1a) Sean los eventos A: es de la máquina 1, B: es de la máquina 2, C: tiene problemas.

Entonces se cumple que $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$.

Además se sabe que: $P(C/A) = 0.05$ (El carro tiene problemas, dado que es de la máquina 1).

$P(C/B) = 0.07$ (El carro tiene problemas, dado que es de la máquina 2).

Puesto que todos producen la misma cantidad de carros, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

Además se sabe que $P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$, entonces $P(A \cap C) = P(A) \times P(C/A) = \frac{1}{2}(0.05)$.

Análogamente se cumple que $P(B \cap C) = \frac{1}{2}(0.07)$.

Por lo tanto, $P(C) = \frac{1}{2}(0.05) + \frac{1}{2}(0.07) = 0.06$.

1b) Se requiere encontrar $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.05}{2(0.06)} = \frac{5}{12}$.

2. Sean A: es de la impresora 1, B: es de la impresora 2, C: es de la impresora 3, D: es defectuosa.

Entonces se cumple que $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$.

Además se sabe que: $P(D/A) = \frac{1}{100}$,

$P(D/B) = \frac{1}{50}$,

$P(D/C) = \frac{1}{40}$.

Además $P(A) = \frac{20}{100}$, $P(B) = \frac{40}{100}$, $P(C) = \frac{40}{100}$.

Entones $P(A \cap D) = \frac{20}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{500}$, $P(B \cap D) = \frac{40}{100} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{125}$, y $P(C \cap D) = \frac{40}{100} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{100}$.

Luego, $P(D) = \frac{1}{500} + \frac{1}{125} + \frac{1}{100} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$.

Por lo tanto, $P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{50} = \frac{1}{2}$.

2.5 Experimentos independientes*

Problema inicial

Se definen dos experimentos y dos eventos de la siguiente manera:

T_1: Lanzar una moneda
T_2: Lanzar un dado

A_1: Cae cara
A_2: Cae uno o dos

a) Encuentra la probabilidad de que en T_2 ocurra A_2, cuando en T_1 ocurre A_1.
b) Encuentra la probabilidad de que en T_1 ocurra A_1, cuando en T_2 ocurre A_2.
c) Encuentra la probabilidad de que en T_1 ocurra A_1 y en T_2 ocurre A_2.

Solución

Sean S_1 y S_2 los espacios muestrales de T_1 y T_2 respectivamente.

a) Puesto que el experimento T_1 no influye en el experimento T_2, la probabilidad de A_2 es: $\frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Puesto que el experimento T_2 no influye en el experimento T_1, la probabilidad de A_1 es: $\frac{n(A_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{2}$.

c) Considerando T_1 y T_2 como un solo experimento T con espacio muestral S, y denotando por C el evento ocurre A_1 en T_1 y A_2 en T_2, se tiene que $n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$ y $n(C) = n(A_1) \times n(A_2)$, por lo tanto:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{n(A_1) \times n(A_2)}{n(S_1) \times n(S_2)} = \frac{n(A_1)}{n(S_1)} \times \frac{n(A_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

El resultado del literal c) se puede expresar como $P(C) = P(A_1) \times P(A_2)$.

Definición

Tomando dos experimentos T_1 y T_2 de modo que A_1 es un evento de T_1 y A_2 es un evento de T_2, se cumple que si la ocurrencia del experimento T_1 no influye en el experimento T_2 (y viceversa), se dice que T_1 y T_2 son **experimentos independientes**.

Se cumple que la probabilidad que ocurra tanto el evento A_1 en T_1 como el evento A_2 en T_2 es:

$$P(A_1) \times P(A_2).$$

Ejemplo

Determina la probabilidad de que al lanzar un dado 2 veces se obtenga "1" en la primera tirada y "2" en la segunda. Sea A: Cae "1" en la primera tirada, y B: Cae "2" en la segunda tirada.

Como A y B son eventos de dos experimentos independientes (lanzar el dado la primera vez es un experimento y lanzarlo la segunda vez es otro), entonces la probabilidad es:

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Problemas

1. Determina la probabilidad de que al extraer dos cartas de una baraja la primera sea de corazón y la segunda de trébol. Considera que después de la primera extracción se devuelve la carta.

2. Determina la probabilidad de que al lanzar una moneda 3 veces, se obtenga solamente una cara y sea en el último lanzamiento.

3. Determina la probabilidad de que al extraer 2 cartas una tras otra de una baraja (con reemplazo), se cumpla que la primera es una carta roja, y la segunda es "J" o de diamantes.

4. Determina la probabilidad de que al responder 5 preguntas de verdadero y falso al azar se obtengan 4 respuestas correctas.

Unidad 8

217

Indicador de logro:

2.5 Calcula la probabilidad de que ocurran al menos dos experimentos independientes.

Secuencia:

Durante esta clase se analizará la definición de experimentos independientes, lo cual servirá para trabajar con algunas ideas sobre probabilidad binomial, multinomial, binomial negativa, etc.

Posibles dificultades:

Puede que sea complicado diferenciar entre eventos independientes y experimentos independientes, para que quede claro, pueden mencionarse ejemplos como lanzar un dado dos veces y lanzar dos dados a la misma vez, etc.

Solución de problemas:

1. Puesto que la extracción de la primera carta será independiente de la extracción de la segunda, porque después de la primera extracción se devuelve la carta, entonces:

Sean A: la carta es de corazón; y B: la carta es de trébol, luego P(A) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, y P(B) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es P(A) × P(B) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

2. Cada lanzamiento de la moneda es independiente de los demás, entonces, considerando A: cae cara; y B: cae corona, se tiene que P(A) = $\frac{1}{2}$ y P(B) = $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es P(B) × P(B) × P(A) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

3. Puesto que las tres extracciones son independientes, porque después de una extracción se devuelve la carta, entonces:

Sean A: la carta es roja; y B: la carta es "J" o de diamantes, luego P(A) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, y P(B) = $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es P(A) × P(B) = $\frac{1}{2} \times \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$.

4. Las preguntas son independientes una de las demás, y considerando A: responde correctamente y B: responde incorrectamente, entonces se tiene que P(A) = $\frac{1}{2}$ y P(B) = $\frac{1}{2}$.

Además hay que considerar que obtener 4 respuestas correctas es equivalente a obtener solamente una respuesta incorrecta, y para ello se pueden dar 5 casos ($_5C_1$), que la pregunta incorrecta sea la 1, la 2, la 3, la 4 o la 5.

Por lo tanto, la probabilidad buscada es $_5C_1$ × P(A) × P(A) × P(A) × P(A) × P(B) = $5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$.

Este problema se puede resolver con la probabilidad binomial, sin embargo, en esta clase se puede analizar por medio del principio de la suma, y puede considerarse una introducción a la próxima clase.

2.6 Probabilidad de experimentos repetidos, parte 1

Problema inicial

Determina la probabilidad de que al lanzar 5 veces un dado se obtengan “6 o 3” dos veces.

Solución

Considerando en un lanzamiento el evento A: Cae 6 o 3 y B: No cae 6 ni 3.

Lanzar el dado 5 veces son 5 experimentos independientes, y para obtener el evento se tienen los siguientes casos:

$$
{}_5C_2 \text{ casos} \begin{cases} \text{A A B B B tiene probabilidad } P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \text{A B A B B tiene probabilidad } P(A) \times P(B) \times P(A) \times P(B) \times P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3. \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \end{cases}
$$

El total de casos es igual al número de maneras que hay para escoger 2 de los 5 lugares en donde ocurrirá el evento A, por lo tanto hay ${}_5C_2$ casos, y todos estos casos son mutuamente excluyentes y de igual probabilidad, por lo tanto la probabilidad es: $${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}.$$

Conclusión

Sea p la probabilidad de que suceda el evento A en un experimento. Cuando se repite n veces el experimento, la probabilidad de que ocurra el evento A r veces ($0 \leq r \leq n$) es:

$$({}_nC_r)p^r(1-p)^{n-r}.$$

Ejemplo

Analizando el desempeño de un jugador de fútbol se obtuvo la información de que al tirar una falta, la probabilidad de que marque gol es $\frac{3}{10}$, la probabilidad de que el tiro pegue en algún poste es $\frac{1}{2}$, y la probabilidad de que el tiro vaya fuera es $\frac{1}{5}$. Determina la probabilidad de que al realizar 6 tiros, 3 sean gol, 2 peguen en el poste y 1 vaya fuera.

Considerando en un tiro de falta los eventos A: es gol, B: pega en el poste, C: va fuera.

Puesto que cada tiro de falta es independiente del otro, se puede dar el caso de obtener los 3 goles en los primeros tiros, luego 2 al poste y 1 va fuera, cuya probabilidad es $P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(B) \times P(B) \times P(C)$.

Luego el total de casos es igual al total de formas en que se pueden escoger los experimentos (tiros) en que hará gol (${}_6C_3$) y luego de los restantes experimentos (tiros) escoger cuáles pegarán en el poste (${}_3C_2$).

Cada uno de estos casos tiene una probabilidad de ocurrir de $\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{5\,000}$.

Por lo tanto, la probabilidad es: ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times \frac{3}{5\,000} = \frac{9}{250}$.

Problemas

1. En una bolsa se tienen 3 bolitas rojas y 4 bolitas negras. Se extraen 4 bolitas una tras otra y con reemplazo (la bolita extraída se devuelve a la bolsa). Determina:
   a) La probabilidad de que hayan sido 2 bolitas rojas y 2 negras.
   b) La probabilidad de que haya sido a lo sumo 1 bolita roja.
   c) La probabilidad de que haya sido al menos 1 bolita negra.

2. Determina la probabilidad de que al extraer 7 cartas (una tras otra) con reemplazo de una baraja tradicional (de 52 cartas) 3 de ellas sean de diamantes, 2 sean de color negro y 2 sean de corazones.

Indicador de logro:

2.6 Encuentra probabilidades para valores específicos de la distribución binomial o multinomial, utilizando los conceptos de independencia de experimentos y combinaciones.

Secuencia:

Luego de introducir el concepto de independencia de experimentos, se pueden resolver algunos problemas sobre probabilidades particulares de la distribución binomial y la distribución multinomial.

Propósito:

Utilizar las combinaciones para resolver problemas sobre las probabilidades de eventos repetidos.

Solución de problemas:

1a) Sea A: la bolita es roja, entonces $P(A) = \frac{3}{7}$, entonces, puesto que se van a extraer 4 bolitas, de las cuales 2 deben ser rojas y 2 negras, esta probabilidad es:

$$_4C_2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{864}{2\,401}.$$

1b) Para resolver este problema hay que considerar 2 casos, que no hayan bolitas rojas y que haya únicamente una bolita roja, y puesto que la intersección de estos eventos es vacía, por el axioma 3 de probabilidad se tiene que la probabilidad buscada es:

$$_4C_0\left(\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{256}{2\,401} + \frac{768}{2\,401} = \frac{1\,024}{2\,401}.$$

1c) Si se procede por el complemento, este problema equivale a encontrar la probabilidad de no tener bolitas negras, y luego realizar la diferencia con 1, es decir la probabilidad buscada es:

$$1 - {}_4C_4\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1 - \frac{81}{2\,401} = \frac{2\,320}{2\,401}.$$

2. Sean A: es de diamantes, B: es de color negro, C: es de corazones, entonces $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, y $P(C) = \frac{1}{4}$, y puesto que las extracciones son independientes una de otra (porque las cartas son devueltas) entonces la probabilidad es:

$$_7C_3 \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{105}{2\,048}.$$

2.7 Probabilidad de experimentos repetidos, parte 2

Problema inicial

En un juego se lanza un dado hasta que se obtiene 2 veces el número cinco, determina la probabilidad de lograr esto en 4 lanzamientos del dado.

Solución

En este caso en el cuarto lanzamiento debe caer cinco, y en los primeros 3 lanzamientos también debe caer 1 vez cinco. Como cada lanzamiento es independiente del otro, entonces se tiene que la probabilidad requerida es:

$$_3C_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{432}.$$

Conclusión

Considerando un evento A del espacio muestral de un experimento, si el experimento se repite n veces hasta que ocurra r veces el evento A, entonces el evento A tuvo que haber ocurrido $(r - 1)$ veces en las primeras $(n - 1)$ repeticiones y en la última repetición del experimento.

Problemas

1. De una baraja tradicional se extrae una carta tras otra, con reposición (después de extraerla se devuelve a la baraja), los experimentos terminan cuando se extraen 3 cartas de diamante. Determina la probabilidad de obtener estas 3 cartas de diamantes en las primeras 6 extracciones.

2. En un juego de mesa se puede comenzar a mover el peón hasta que se obtiene 6 en el lanzamiento de un dado.

   Determina:
   a) La probabilidad de comenzar a mover el peón a partir del primer lanzamiento.
   b) La probabilidad de comenzar a mover el peón a partir del tercer lanzamiento.
   c) La probabilidad de comenzar a mover el peón después de a lo sumo 3 lanzamientos.
   d) La probabilidad de comenzar a mover el peón en al menos 3 lanzamientos.

3. La meta de producción individual de una empresa textil es de 4 camisas sin imperfecciones, y la probabilidad de producir una camisa con imperfecciones es $\frac{1}{3}$.

   Calcula:
   a) La probabilidad de lograr la meta produciendo exactamente 5 camisas.
   b) La probabilidad de lograr la meta produciendo a lo sumo 6 camisas.
   c) La probabilidad de lograr la meta produciendo al menos 7 camisas.

4. Determina la probabilidad de que al sacar cartas de una baraja tradicional (52 cartas) la segunda carta de tréboles sea en la quinta extracción, considerando que la extracción es con reposición.

5. Un experto de tiro lanza dardos a un blanco, y se sabe que acierta 7 de cada 10 tiros. Un juego consiste en que 3 participantes dicen cuántos tiros será necesario hacer para lograr que 4 dardos den en el blanco; el primer participante dice que se logrará en 5 tiros, el segundo dice que en 7 tiros y el tercero dice que en 10 tiros. Determina qué participante tiene mayor probabilidad de ganar.

Indicador de logro:

2.7 Aplica los conceptos de experimentos independientes y combinaciones en la resolución de problemas sobre el cálculo de probabilidades para valores específicos de la distribución binomial negativa.

Secuencia:

Para finalizar esta lección se trabaja con algunos problemas que tienen que ver con la probabilidad binomial negativa, en la cual solamente se espera que los estudiantes utilicen las combinaciones y lo visto sobre probabilidad para resolver los problemas sin analizar la distribución de probabilidad.

Propósito:

En esta clase y la anterior no se enfoca en el desarrollo de las distribuciones de probabilidad, dado que este es un concepto mucho más complejo y cuyo conocimiento puede resultar más útil en un nivel universitario, dada su generalidad.

Solución de problemas:

1. Sea A: la carta es de diamantes, entonces P(A) = $\frac{1}{4}$, y ahora garantizando la tercera carta de diamantes en la sexta extracción, se tiene que para las otras 2 cartas de diamantes hay 5 opciones, por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{135}{2\,048}.$$

2a) Sea A: cae 6, entonces P(A) = $\frac{1}{6}$, entonces, la probabilidad de que comience a mover el peón en el primer lanzamiento es equivalente a que caiga 6 en el primer lanzamiento, es decir, la probabilidad es $\frac{1}{6}$.

2b) Para este problema es equivalente a determinar la probabilidad de que caiga 6 hasta el tercer lanzamiento, es decir, la probabilidad es:

$$_2C_0\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}.$$

2c) Se pueden dar 3 casos, moverlo después del primer lanzamiento, después del segundo o después del tercero, y puesto que los 3 casos son excluyentes, se puede aplicar el axioma 3 de probabilidad, por lo tanto, la probabilidad es:

$$\frac{1}{6} + {}_1C_0\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right) + {}_2C_0\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{36+30+25}{216} = \frac{91}{216}.$$

2d) Utilizando el complemento, la probabilidad es: $1 - \frac{1}{6} - {}_1C_0\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{36-6-5}{36} = \frac{25}{36}$.

O considerando que los primeros dos lanzamientos no son 6, $P(A^c) \times P(A^c) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

3a) La probabilidad es $_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{243}$.

3b) Pueden darse 3 casos (excluyentes entre sí), producirlas en 4, 5 o 6 intentos, por lo tanto, la probabilidad es: $_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right) + {}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right) + {}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81} + \frac{64}{243} + \frac{160}{729} = \frac{144+192+160}{729} = \frac{496}{729}$.

3c) Utilizando el complemento del literal 3b, se tiene que la probabilidad es: $1 - \frac{496}{729} = \frac{233}{729}$.

4. Sea A: la carta es de tréboles, entonces p(A) = $\frac{1}{4}$, y puesto que los experimentos son independientes (porque la extracción es con reposición), la probabilidad es: $_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256}$.

5. Sea A: acierta el tiro, entonces p(A) = $\frac{7}{10}$, y calculando la probabilidad de ganar para cada uno:

participante 1, $_4C_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{28\,812}{100\,000}$; participante 2, $_6C_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{1\,296\,540}{10\,000\,000}$;

participante 3, $_9C_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^6\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{147\,027\,636}{10\,000\,000\,000}$. Por lo tanto el primer participante tiene mayores probabilidades de ganar.

2.8 Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja tradicional sea de corazones, si ya se sabe que la carta extraída es de color rojo.

2. La probabilidad de que un programa de televisión sea visto por un hombre casado es 0.3, la probabilidad de que sea visto por una mujer casada es 0.4, y la probabilidad de que un esposo vea el programa cuando su esposa lo ve es 0.7.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que una pareja casada vea el programa.
   b) La probabilidad de que una esposa vea el programa dado que el esposo lo ve.
   c) La probabilidad de que al menos uno de los esposos vea el programa.

3. Para rifar 3 premios participan 15 personas, de las cuales 10 son mujeres y 5 son hombres, determina la probabilidad de que 3 hombres ganen un premio, si una misma persona no puede ganar dos premios.

4. La probabilidad de que llueva en un día de octubre es $\frac{1}{3}$.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que no llueva durante 5 días seguidos.
   b) La probabilidad de que llueva 3 días de una semana (5 días).
   c) La probabilidad de que llueva hasta el sexto día del mes de octubre.

5. Determina la probabilidad de que al lanzar un dado 5 veces se obtenga exactamente un cuatro, un seis y un uno, en alguno de los lanzamientos.

6. El 30% de los conductores tienen un accidente de tránsito, el 30% de estos accidentes es debido a que el conductor estaba bajo los efectos del alcohol, el 20% por contestar el celular y el 5% cambiaba la emisora. Por otro lado, el 40% de los conductores van bajo los efectos del alcohol, el 50% contestan el celular y el 70% cambia la emisora mientras conduce.

   Determina:
   a) La probabilidad de que una persona choque dado que se conduce ebria.
   b) La probabilidad de que una persona choque dado que contestó el celular.
   c) La probabilidad de que una persona choque dado que cambió la emisora.

7. En el control de calidad de una envasadora de alimentos se extraen productos hasta completar 4 defectuosos, si el 95% del producto es producido de buena calidad.

   Determina:
   a) La probabilidad de que se extraigan 10 elementos en el control de calidad.
   b) La probabilidad de que los primeros 4 productos sean los defectuosos.

Indicador de logro:

2.8 Resuelve problemas correspondientes a la probabilidad condicional.

Solución de problemas:

1. Sean A: la carta es de corazones; y B: la carta es de color rojo, entonces:

$P(A\cap B) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{26}{52}$, por lo tanto $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2a) Sean A: el programa es visto por una mujer casada; y B: el programa es visto por un hombre casado, entonces: $P(A) = 0.4$, $P(B/A) = 0.7$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A) = 0.4 \times 0.7 = 0.28$.

2b) $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.28 \div 0.3 = 0.93$.

2c) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.28 = 0.42$.

3. Sea A: ganan 3 hombres, entonces $n(A) = {}_5C_3$, por lo tanto, $P(A) = \frac{{}_5C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{2}{91}$

4a) Sea A: llueve, entonces $P(A) = \frac{1}{3}$ y puesto que llover es algo independiente de un día a otro, por lo tanto, la probabilidad que no llueva 5 días seguidos es: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$.

4b) La probabilidad es: ${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$.

4c) La probabilidad es: ${}_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{729}$.

5. Sean A: cae 4; B: cae 6; C: cae 1; y D: cae 2, 3 y 5 en el lanzamiento, entonces la probabilidad es:

${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)^2 = 60 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{72}$.

6a) Sean A: la persona se conduce ebria, B: la persona contestó el celular, C: la persona cambió la emisora, D: la persona tiene un accidente de tránsito, entonces:

$P(A\cap D) = P(D)P(A/D) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$, por lo tanto, $P(D/A) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)} = \frac{9}{100} \div \frac{2}{5} = \frac{9}{40}$.

6b) $P(B\cap D) = P(D)P(B/D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$, por lo tanto, $P(D/B) = \frac{P(B\cap D)}{P(B)} = \frac{3}{50} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{25}$.

6c) $P(C\cap D) = P(D)P(C/D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{20} = \frac{3}{200}$, por lo tanto, $P(D/C) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)} = \frac{3}{200} \div \frac{7}{10} = \frac{3}{140}$.

Para este problema hay que indicar que los porcentajes sean expresados como fracción, para calcular las probabilidades.

7a) Este problema equivale a decir que el cuarto elemento defectuoso se da en la décima extracción, por lo tanto, la probabilidad es:

$${}_9C_3\left(\frac{1}{20}\right)^3\left(\frac{19}{20}\right)^6\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{3\,951\,854\,004}{10\,240\,000\,000\,000}.$$

7b) Puesto que cada extracción es independiente de las otras, la probabilidad es:

$$\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160\,000}.$$

2.9 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. Determina la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja tradicional sea de diamante o de picas o Jota.

♠ Picas	♣ Tréboles
♥ Corazones	♦ Diamantes

2. Calcula la probabilidad de que al lanzar 3 dados la suma sea 10.

3. Determina la probabilidad de que al ordenar 3 bolas azules (idénticas), 4 bolas moradas (idénticas) y 2 bolas negras (idénticas) las bolas negras queden todas juntas.

4. En un juego se tienen 2 bolsas, la primera contiene 3 bolas blancas, 2 rojas y una negra, la segunda contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 3 negras. Se extrae una bola de alguna de las bolsas.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que se extraiga una bola negra de la segunda bolsa.
   b) La probabilidad de que se extraiga una bola roja.

5. En un ropero hay 3 pares de zapatos negros y 4 pares de zapatos cafés. Si se extrae un zapato, determina:

   a) La probabilidad de extraer un zapato café derecho o un zapato negro izquierdo.
   b) La probabilidad de extraer un zapato izquierdo o de color negro.

6. Calcula la probabilidad de que en una cadena binaria (de 0 y 1) de longitud 6 aparezcan al menos 3 ceros juntos al final de la cadena.

7. Determina la probabilidad de que al ubicar 2 torres en un tablero de ajedrez (8×8) estas queden alineadas vertical u horizontalmente.

8. Determina la probabilidad de que al ubicar 3 niñas y 3 niños en una mesa redonda ningún niño quede a la par de otro niño.

9. Considerando las piezas de Braile formadas por un rectángulo con 6 celdas en el que cada celda puede estar vacía o tener un punto en relieve. Determina la probabilidad de que al escoger una pieza del sistema Braile tenga al menos una casilla vacía (sin punto en relieve).

Unidad 8

221

Indicador de logro:

2.9 Resuelve problemas correspondientes a probabilidad.

Solución de problemas:

1. Sea A: es de diamante, B: es de picas, y C: es Jota, entonces se tiene que $n(\text{A}) = 13$, $n(\text{B}) = 13$, $n(\text{C}) = 4$, $n(\text{A}\cap\text{B}) = 0$ $(\text{A}\cap\text{B} = \varnothing)$, $n(\text{A}\cap\text{C}) = 1$ (la Jota de diamantes), $n(\text{B}\cap\text{C}) = 1$ (la Jota de picas), $n(\text{A}\cap\text{B}\cap\text{C}) = 0$, $(\text{A}\cap\text{B}\cap\text{C} = \varnothing)$, por lo tanto:

$$\text{P}(\text{A}\cup\text{B}\cup\text{C}) = \text{P(A)} + \text{P(B)} + \text{P(C)} - \text{P}(\text{A}\cap\text{B}) - \text{P}(\text{A}\cap\text{C}) - \text{P}(\text{B}\cap\text{C}) + \text{P}(\text{A}\cap\text{B}\cap\text{C}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - 0 - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} + 0$$
$$= \frac{28}{52} = \frac{7}{13}.$$

2. Sea A: la suma de las tiradas es 10, entonces A = {(1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 6, 3), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 5, 3), (2, 6, 2), (3, 1, 6), (3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 5, 2), (3, 6, 1), (4, 1, 5), (4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1), (6, 1, 3), (6, 2, 2), (6, 3, 1)}, por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

3. Sea A: las bolas negras quedan juntas, entonces $n(\text{A}) = \frac{8!}{1!\,3!\,4!} = 280$, y $n(\text{S}) = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1\,260$, por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{280}{1\,260} = \frac{2}{9}$.

4a) Sea A: es una bola negra, B: es de la primera bolsa, y C: es de la segunda bolsa, $\text{P(A/C)} = \frac{3}{8}$ y $\text{P(C)} = \frac{1}{2}$ por lo tanto, $\text{P}(\text{A}\cap\text{C}) = \text{P(C)P(A/C)} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$.

4b) Sea D: es una bola roja, entonces $\text{P(D)} = \text{P}(\text{D}\cap\text{B}) + \text{P}(\text{D}\cap\text{C}) = \text{P(B)P(D/B)} + \text{P(C)P(D/C)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$
$$= \frac{17}{48}.$$

5a) Sea A: el zapato es café y derecho, B: el zapato es negro e izquierdo, entonces

$$\text{P}(\text{A}\cup\text{B}) = \text{P(A)} + \text{P(B)} = \frac{{}_4\text{C}_1}{{}_{14}\text{C}_1} + \frac{{}_3\text{C}_1}{{}_{14}\text{C}_1} = \frac{7}{14}.$$

5b) Sea C: el zapato es izquierdo, D: el zapato es negro, entonces

$$\text{P}(\text{C}\cup\text{D}) = \text{P(C)} + \text{P(D)} - \text{P}(\text{C}\cap\text{D}) = \frac{{}_7\text{C}_1}{{}_{14}\text{C}_1} + \frac{{}_6\text{C}_1}{{}_{14}\text{C}_1} - \frac{{}_3\text{C}_1}{{}_{14}\text{C}_1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

6. Asegurando que los 3 ceros estén juntos al final, se tiene que la probabilidad es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. O bien, utilizando la probabilidad del complemento, solamente es necesario calcular cuando aparecen 0, 1 o 2 ceros juntos al final de la cadena, por lo tanto, la probabilidad es: $1 - \frac{2^5}{2^6} - \frac{2^4}{2^6} - \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{8}$.

7. Sea A: las torres quedan alineadas vertical u horizontalmente, entonces se tiene que $\text{P(A)} = \frac{64 \times 14}{64 \times 63} = \frac{2}{9}$.

8. Sea A: ningún niño queda a la par de otro, entonces $n(\text{A}) = \frac{3! \times {}_4\text{P}_3 - 3! \times 3! \times 2}{6} = 12$, por lo tanto, $\text{P(A)} = \frac{12}{5!} = \frac{1}{10}$.

Para calcular $n(\text{A})$ es necesario restarle $3! \times 3! \times 2$, que son los casos en los que al ordenar de manera lineal quedan 2 estudiantes en los extremos de la fila, luego valorar los dos espacios que quedan entre las niñas para colocar el niño restante y contarlo para cada forma de ordenar las niñas.

9. Utilizando la probabilidad del complemento, es suficiente con determinar la probabilidad del evento A: la pieza no tiene casillas vacías, entonces $\text{P(A)} = \frac{1}{2^6}$, por lo tanto, la probabilidad requerida es:

$$1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64}.$$

2.10 Problemas de la unidad

Resuelve los siguientes problemas, utilizando la estrategia de conteo que consideres más adecuada.

1. En un juego se tiene una baraja tradicional de la que se han quitado 3 cartas de corazones, una de diamante y 2 de tréboles, el juego consiste en adivinar de qué palo será la carta que se extraiga de la baraja modificada (picas, corazones, tréboles o diamantes). Determina la opción que tiene mayor probabilidad de ganar.

2. Un juego consiste en adivinar cuántas caras caerán al lanzar 7 veces una moneda, Carmen dice que caerán 4 caras y Carlos dice que caerán 3 caras. Determina quién tiene mayor probabilidad de ganar. Si fueran 8 lanzamientos, determina cuál sería la opción más probable.

3. Un juego de dados consiste en adivinar después de cuántas tiradas se obtendrá 3 veces el número 5. Una persona dice que se logrará después de 6 tiradas, otra dijo que después de 7, y otra dijo que después de 8 tiradas. Determina qué persona tiene mayores probabilidades de ganar. ¿Qué opción habrías dicho tú para tener la mayor probabilidad de ganar?

4. La probabilidad de que en una calle el semáforo esté arruinado es 0.2, la probabilidad de que en dicha calle ocurra un accidente es 0.5, y la probabilidad de que ocurra un accidente considerando que el semáforo está dañado es 0.75.

   Determina:
   a) La probabilidad de que ocurra un accidente y el semáforo esté arruinado.
   b) La probabilidad de que el semáforo esté arruinado dado que ocurrió un accidente.

5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 bolas rojas, todas indistinguibles entre sí, se extraen 3 bolas de la urna, una después de la otra, con la condición que si la bola es roja se devuelve a la urna, pero si la bola es blanca no se devuelve. Determina la probabilidad de que al sacar 3 bolas, exactamente una de ellas sea de color blanco.

6. En un consultorio se tiene que la probabilidad de que alguien tenga cáncer si se le ha diagnosticado es 0.9, y la probabilidad de que alguien lo padezca si se le ha diagnosticado que no lo tiene es 0.15, además se sabe que el 20% de los pacientes son diagnosticados con cáncer.

   Calcula:
   a) La probabilidad de que un paciente padezca de cáncer.
   b) La probabilidad de que un paciente sea diagnosticado con cáncer si lo padece.

7. En un juego de un programa de televisión se gira una ruleta de colores, participan 3 personas. El juego consiste en adivinar después de cuántas giradas caerá la ruleta en la casilla de color rojo. Una persona dice que en la tercera girada, otra dice que en la sexta girada, y la última dice que en la cuarta girada. Determina cuál de las personas tiene mayor probabilidad de ganar si la probabilidad de que caiga rojo en la ruleta es 0.3. ¿Qué opción habrías dicho tú para tener la mayor probabilidad de ganar?

Indicador de logro:

2.10 Resuelve problemas correspondientes a probabilidad.

Solución de problemas:

1. Sean A: es de corazones, B: es de diamantes, C: es de tréboles, y D: es de picas, luego $P(A) = \frac{10}{52}$, $P(B) = \frac{12}{52}$, $P(C) = \frac{11}{52}$ y $P(D) = \frac{13}{52}$, por lo tanto, la opción que tiene mayor probabilidad es que sea una carta de picas.

2. Sean A: caen 4 caras, B: caen 3 caras, y calculando cada caso:

$P(A) = {}_7C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{128}$ y $P(B) = {}_7C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$ (${}_7C_4 = {}_7C_3$), por lo tanto, ambos tienen la misma probabilidad de ganar.

Por otro lado si fueran 8 lanzamientos se tiene el siguiente escenario:

$P(A) = {}_8C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}$ y $P(B) = {}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{56}{256}$, por lo tanto, para este caso Carmen tiene mayores probabilidades de ganar.

3. Sean A: después de 6 tiradas, B: después de 7 tiradas y C: después de 8 tiradas, entonces las probabilidades son:

$P(A) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{625}{23\,328}$, $P(B) = {}_6C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3\,125}{93\,312}$, y $P(C) = {}_7C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{21\,875}{559\,872}$

Luego, utilizando aproximaciones decimales, $P(A) \approx 0.027$, $P(B) \approx 0.033$, $P(C) \approx 0.039$, por lo tanto, la tercera persona tiene más probabilidades de ganar.

Para determinar cuál sería la mejor respuesta, se puede utilizar el método de prueba y error, lo ideal es que logren concluir que aproximadamente la mayor probabilidad se alcanza entre 15 y 17 tiradas, lo cual coincide con la esperanza matemática de la distribución binomial negativa para este caso.

4a) Sea A: el semáforo está arruinado, B: ocurre un accidente, entonces $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(B/A) = 0.75$, por lo tanto, $P(A\cap B) = P(A)\,P(B/A) = 0.2 \times 0.75 = 0.15$.

4b) $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.15 \div 0.5 = 0.3$

5. Sean A: la bola es blanca, y B: la bola es roja, puesto que la bola blanca puede salir en la primera, segunda o tercera extracción, y estos casos no pueden suceder simultáneamente, hay 3 casos:

A, B, B; B, A, B; B, B, A; y la probabilidad es: $\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$

$$= \frac{5}{36} + \frac{10}{81} + \frac{80}{729} = \frac{405 + 360 + 320}{2\,916} = \frac{1\,085}{2\,916}$$

6a) Sea A: el paciente tiene cáncer, y B: el paciente es diagnosticado con cáncer, entonces $P(B) = 0.2$, $P(B^c) = 0.8$, $P(A/B) = 0.9$ y $P(A/B^c) = 0.15$; luego $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$, por lo tanto, la probabilidad es:

$$P(A) = P(A/B)\,P(B) + P(A/B^c)\,P(B^c) = 0.9 \times 0.2 + 0.15 \times 0.8 = 0.18 + 0.12 = 0.3$$

6b) $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0.18 \div 0.3 = 0.6$

7. Sean A: cae rojo en la tercera girada, B: cae rojo en la sexta girada, y C: cae rojo en la cuarta girada; entonces las probabilidades son: $P(A) = (0.7)^2(0.3) = 0.147$; $P(B) = (0.7)^5(0.3) = 0.05$; $P(C) = (0.7)^3(0.3) = 0.103$.

Por lo tanto, la primera persona tiene más probabilidades de ganar. Para determinar cuál sería la mejor respuesta, se puede utilizar el método de prueba y error, lo ideal es que logren concluir que aproximadamente la mayor probabilidad se alcanza en 2 giradas, lo cual coincide con la esperanza matemática de la distribución geométrica para este caso.

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN