GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Libro de texto

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de Ciencia y Tecnología *ad honorem*

Wilfredo Alexander Granados Paz
Director Nacional de Currículo

Edgard Ernesto Abrego Cruz
Director General de Niveles y Modalidades Educativas

Janet Lorena Serrano de López
Directora Nacional de Asesoramiento Educativo y Desarrollo Estudiantil

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Gerente Curricular para el Diseño y Desarrollo de la Educación General

Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Matemática

Equipo Técnico Autoral del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
César Omar Gómez Juárez
Diana Marcela Herrera Polanco
Erick Amílcar Muñoz Deras
Félix Abraham Guevara Menjívar
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández

Equipo de diagramación

Neil Yazdi Pérez Guandique
Francisco René Burgos Álvarez
Michael Steve Pérez Guandique
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales

Revisión a nivel nacional por especialistas formados dentro del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio.
Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Primera edición © 2018.
Segunda edición © 2019.

372.704 5
M425 Matemática 9 : libro de texto / equipo autoral Ana Ester Argueta, Erick Amílcar Muñoz, Reina Maritza Pleitez, Diana Marcela Herrera, César Omar Gómez, Francisco Antonio Mejía, Norma Elizabeth Lemus, Salvador Enrique Rodríguez, Félix Abraham Guevara ; diagramación Neil Yazdi Pérez, Francisco René Burgos, Michael Steve Pérez, Judith Samanta Romero ; corrección de estilo Mónica Marlene Martínez, Marlene Elizabeth Rodas. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2018.
188 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-70-64-5 (impreso)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza. I. Argueta Aranda, Ana Ester, 1991-, coaut. II. Título.
BINA/jmh

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Libro de texto

ESMate

Estimados estudiantes:

Nos complace darles la bienvenida a un nuevo año escolar y a una nueva oportunidad de adquirir muchos conocimientos matemáticos.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes en Matemática basado en los resultados de procesos de evaluación en Educación Básica y Educación Media (ESMATE 2) hemos creado para ustedes diversos materiales educativos, uno de ellos es el Libro de texto que tienen en sus manos.

Este libro contiene múltiples problemas y actividades con los que podrán desarrollar su razonamiento y mejorar las capacidades matemáticas que les serán muy útiles para resolver situaciones de la vida diaria.

Por ello, les invitamos a abordar cada actividad que contiene este libro como un reto a vencer y contamos con que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para convertirse en ciudadanos ejemplares que contribuyan al desarrollo de nuestro querido país.

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia y
Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de
Ciencia y Tecnología *ad honorem*

Presentación del libro

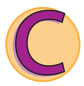
Segunda edición

En la presente edición se han incorporado las sugerencias y observaciones brindadas por los docentes de tercer ciclo del sistema educativo nacional.

Íconos

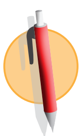
La letra P representa el Problema inicial. En el primer momento de cada clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática la cual permite introducir el contenido que se va a desarrollar.

La letra S simboliza la Solución. En este segundo momento, el texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.



Con la C de Conclusión se llega a la explicación del contenido. Aquí se relacionan los momentos P y S para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

La letra E representa un ejemplo. A veces es necesario presentar un problema adicional, que permita consolidar el contenido de la clase.



El lápiz representa la sección de problemas y ejercicios.

Información complementaria

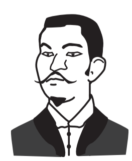
En el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional como historia de la matemática, esto se representa con diferentes colores:

Presaberes

Pista

Información adicional

En la información adicional donde aparezca la imagen del Dr. Alberto Sánchez, es porque se presenta historia de la matemática como un recurso de aprendizaje.



Alberto Sánchez (1864-1896)

El Dr. Alberto Sánchez, un matemático salvadoreño del siglo XIX, describió una curva que él llamo la cornoide, este fue uno de sus trabajos más relevantes como matemático.
Esta curva aparece en la contraportada de este libro.

Distribución de las clases

El libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y cada lección está compuesta por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase. Por ejemplo, el título de la clase 6 de la lección 2 de la unidad 1 de este libro se representa de la siguiente manera:

Indica el número de lección

2.6 Combinación de productos notables

Indica el número de clase

El número de la unidad aparece en una etiqueta morada en la parte lateral de las páginas impares.

Unidad 1

Índice

Unidad 1

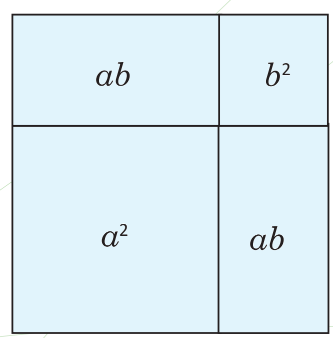
Multiplicación de polinomios

Página del libro escrito por Al-Juarismi.

La palabra "álgebra" procede del árabe *al-jabr*, un término empleado por Al-Juarismi, matemático árabe nacido alrededor del 825 a.C., sus libros sobre aritmética y álgebra jugaron un papel muy importante en el desarrollo histórico de la matemática. Su obra principal es el *Hisab al-<abr wa'l muqqabala*, que significa "ciencia de la transposición y la reducción", donde el término "la-yabr" se convirtió en "álgebra", sinónimo de la ciencia de las ecuaciones.

En el libro II de *Los elementos* del griego Euclides se explora la llamada álgebra geométrica, justificando con argumentos geométricos distintas expresiones algebraicas.

Por ejemplo, la proposición 4 dicta de la siguiente forma: si se corta al azar una línea recta, el cuadrado construido sobre el todo es igual a los cuadrados construidos sobre los segmentos más el doble del rectángulo formado. La visualización gráfica de este enunciado es la que se muestra en la imagen de la derecha.



Visualización geométrica de la proposición 4 del libro 2 de Los elementos *de Euclides.*

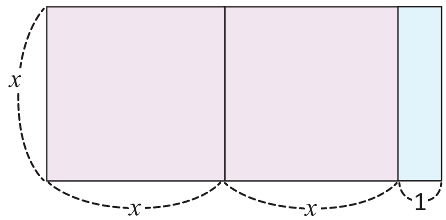
El estudio más profundo del álgebra permitió el desarrollo de la matemática actual y la explicación de principios fundamentales simplificando los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemática, física, biología, economía y estadística.

En el abordaje de esta unidad desarrollarás productos de polinomios por polinomios, además de utilizar los productos notables y métodos geométricos para factorizar expresiones algebraicas.

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



En potenciación se cumple que $a \times a = a^2$

S

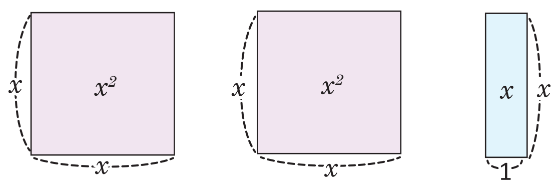
Primera forma:

La altura del rectángulo es x, mientras que su base es: $x + x + 1 = 2x + 1$. El área del rectángulo formado por las tres piezas es: $x(2x + 1)$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por un término o por la suma de dos o más términos. Un **monomio** es el polinomio formado por un solo término.

Segunda forma:

Dividiendo el rectángulo en tres piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:

$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x$.

Por tanto, el área del rectángulo también es: $2x^2 + x$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo, podemos decir, por tanto: $x(2x + 1) = 2x^2 + x$.

Realizando el producto:

Lo anterior también pudo encontrarse algebraicamente multiplicando x por cada uno de los términos del polinomio $2x + 1$:

$$\begin{aligned} x\,(2x + 1) &= x(2x) + x(1) \\ &= 2x^2 + x \end{aligned}$$

C

En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

A este proceso se le llama: **desarrollo**.

E

Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$

$$\begin{aligned} 2x(x - y) &= 2x(x) - 2x(y) \\ &= 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

b) $(xy - y)(-2x)$

$$\begin{aligned} (xy - y)(-2x) &= xy\,(-2x) - y(-2x) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

   a) $x(3x + 2)$ b) $2x(x + y)$

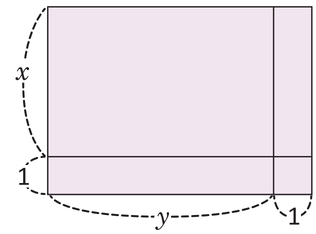
2. Desarrolla los siguientes productos:

   a) $-x(xy + x)$ b) $-3y(x - y)$ c) $(xy + x)xy$ d) $xy(xy + x + y)$

1.2 Binomio por binomio, parte 1

P

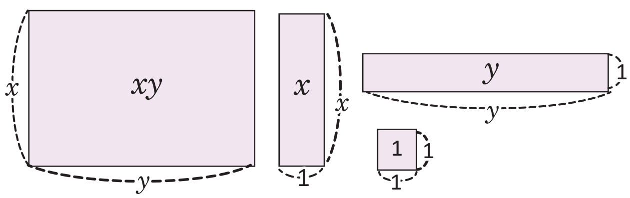
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $y + 1$ y su base es $x + 1$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(y + 1)$.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$xy + x + y + 1$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$xy + x + y + 1$.

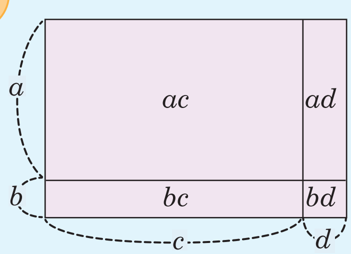
En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

Al polinomio formado por dos términos se le llama: **binomio**.

Realizando el producto:
Lo anterior puede encontrarse multiplicando cada término del primer binomio por cada uno de los términos del segundo, es decir:

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1) &= x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)\\ &= xy + x + y + 1\end{aligned}$$

C



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E

Desarrolla el producto: $(2xy + x)(3y + 2)$

$$\begin{aligned}(2xy + x)(3y + 2) &= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)\\ &= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x\\ &= 6xy^2 + 7xy + 2x\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$.

Los términos $4xy$ y $3xy$ son semejantes, pues tienen la misma parte literal xy. Para sumarlos, se suman sus coeficientes 4 y 3, conservando la parte literal.

Desarrolla:

a) $(2x + 1)(y + 1)$ b) $(2x + 3)(3y + 2)$ c) $(xy + 3x)(y + 1)$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$ e) $(x + 1)(x + y)$ f) $(2x + 3)(x + y)$

1.3 Binomio por binomio, parte 2

P

Desarrolla el producto: $(2x - 1)(y + 3)$.

La resta $a - b$ puede escribirse como una suma:

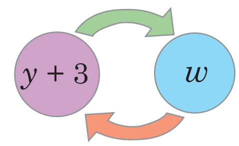
$$a - b = a + (-b)$$

S

Se debe tener en cuenta el signo (−) del primer binomio. El producto puede desarrollarse de las siguientes formas:

1. Se escribe $2x - 1$ como una suma: $2x + (-1)$. El producto se desarrolla como en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= [2x + (-1)](y + 3)\\ &= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)\\ &= 2xy + 6x + (-y) + (-3)\\ &= 2xy + 6x - y - 3\end{aligned}$$



2. Se toma $y + 3 = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(y + 3) &= 2x(w) - 1(w) && \text{Tomando } w = y + 3,\\ &= 2x(y + 3) - (y + 3) && \text{sustituyendo nuevamente } y + 3 = w,\\ &= 2xy + 6x - y - 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)(y + 3) = 2xy + 6x - y - 3$.

C

Para resolver el producto de un binomio por otro se puede hacer de 2 formas:

1. Se escribe $a - b = a + (-b)$ y luego se desarrolla el producto.

$$\begin{aligned}(a - b)(c + d) &= [a + (-b)]\,(c + d)\\ &= ac + ad + (-b)c + (-b)d\\ &= ac + ad + (-bc) + (-bd)\\ &= ac + ad - bc - bd\end{aligned}$$

2. Se toma $c + d = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio.

E

Desarrolla: $(3x - 5)(2y - 4)$.

Se escribe el primer término como $3x + (-5)$ y el segundo término como $2y + (-4)$:

$$\begin{aligned}(3x - 5)(2y - 4) &= [3x + (-5)][2y + (-4)]\\ &= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)\\ &= 6xy - 12x - 10y + 20\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 5)(2y - 4) = 6xy - 12x - 10y + 20$.

Desarrolla:

a) $(x + 1)(y - 1)$
b) $(x - 1)(y - 1)$
c) $(2x + 2)(-y + 2)$
d) $(-x - 2)(2y - 3)$
e) $(xy - x)(y + 10)$
f) $(2xy - y)(5x - 3)$

1.4 Binomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x + 2)(xy + y + 1)$.

El polinomio $xy + y + 1$ se llama **trinomio**, ya que posee tres términos, $(x + 2)(xy + y + 1)$ es el producto de un binomio por un trinomio.

S

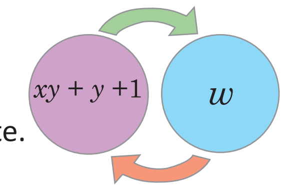
El producto puede desarrollarse de las siguientes maneras:

1. Multiplicando cada término del binomio por cada uno de los términos del trinomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\\ (x + 2)(xy + y + 1) &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$

2. Se toma $xy + y + 1 = w$, y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= (x + 2)w\\ &= x(w) + 2(w) && \text{Tomando } xy + y + 1 = w,\\ &= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2 && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$



Por lo tanto, $(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$.

C

El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

E

Desarrolla $(2x - 1)(2x - y + 3)$ de las dos formas dadas en la conclusión.

1. Primero, se escribe $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)\\ &= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

2. Se sustituye $w = 2x - y + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x - 1)w && \text{Tomando } w = 2x - y + 3,\\ &= 2x(w) - w\\ &= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3) && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

Desarrolla de la forma que más se te facilite:

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$

b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$

c) $(2x - 3)(x - y - 4)$

1.5 Trinomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x - y + 1)(x + y + 3)$.

¿Deben multiplicarse cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo?

S

Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

C

En el producto de un trinomio por un trinomio, se multiplica cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes.

E

Desarrolla el producto: $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$.

Como en el Problema inicial, se debe multiplicar cada término del primer trinomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) &= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)\\ &= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 15xy - 4xy - 9x + 6x - 10y^2 + 6y + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) = 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 1)(x + y + 3)$

b) $(x + y - 1)(x + y + 3)$

c) $(x - y - 1)(x + y + 3)$

d) $(x + y + 1)(x - y + 3)$

e) $(x + 3y + 4)(5x - 2y - 3)$

f) $(4x - 3y + 2)(2x - 6y - 3)$

1.6 Practica lo aprendido

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

a) $x(y + 3)$

b) $(x + 2)(y + 1)$

2. Desarrolla los siguientes productos:

Monomio por binomio:

a) $(-x)(y - 5)$

b) $(4x)(xy + y)$

c) $(-xy)(x - y)$

d) $(-3xy + 2y)(-xy)$

Binomio por binomio:

a) $(y + 2)(2x + 1)$

b) $(x + 1)(xy + y)$

c) $(2x - 5)(y + 4)$

d) $(xy + 3)(x - y)$

Binomio por trinomio:

a) $(x + 3)(3xy + 2x + 4y)$

b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$

c) $(xy - 1)(-10xy + 3x + 2y)$

d) $(2x - 3y)(-xy + 4x - 5y)$

Trinomio por trinomio:

a) $(x + y + 1)(x - y + 2)$

b) $(2x + 5y - 3)(-xy + 3x + 3)$

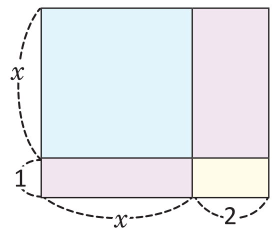
c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$

d) $(2xy + 3y - 6)(5xy + 2y + 10)$

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

P

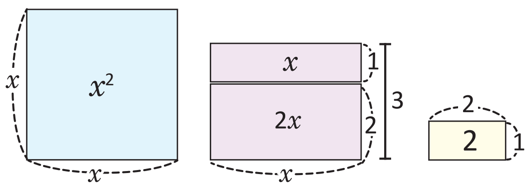
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $x + 1$ y su base es $x + 2$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(x + 2)$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es: $x^2 + 3x + 2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.

Por tanto: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Realizando el producto: Se tiene en cuenta que los términos x y $2x$ son semejantes, por tanto se suman sus coeficientes y se conserva la parte literal x:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= x^2 + (1 + 2)x + 1(2)\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

C

El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{Suma}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{Producto}}\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

E

Desarrolla: $(x + 2)(x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$, donde $a = 2$ y $b = -3$.

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

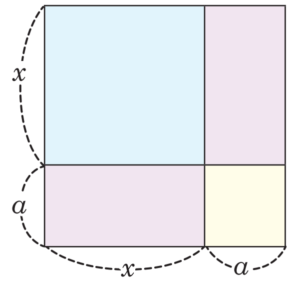
Desarrolla:

a) $(x + 3)(x + 5)$
b) $(x + 4)(x - 5)$
c) $(x - 5)(x + 2)$
d) $(y - 1)(y + 2)$
e) $(y - 2)(y - 3)$
f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:

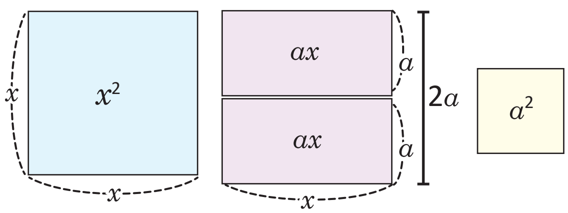


El área de un cuadrado de lado l es igual a l^2.

S

Primera forma: El lado del cuadrado formado por las cuatro piezas es $x + a$, por tanto su área será igual a $(x + a)^2$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:

$$x^2 + 2ax + a^2.$$

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Realizando el producto:
El producto $(x + a)^2$ también puede desarrollarse algebraicamente, utilizando lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

C

El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

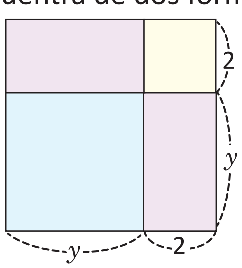
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Por ejemplo:

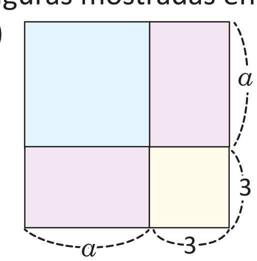
$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las figuras mostradas en cada literal:

a)



b)



2. Desarrolla:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x + 3)^2$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$

d) $(x + \frac{1}{4})^2$

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

P

Desarrolla el producto: $(x - a)^2$.

$(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$

S

Se escribe $(x - a)^2$ como $[x + (-a)]^2$ y se utiliza lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2\\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2\\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a)^2 &= (-a)(-a)\\ &= a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{ ....(1)}$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ ....(2)}$$

E

Desarrolla:

$(x - 2)^2$

Utilizando el caso (2) del cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Desarrolla:

a) $(x - 1)^2$

b) $(x - 3)^2$

c) $(x - 4)^2$

d) $(x - \frac{1}{2})^2$

e) $(x - \frac{1}{4})^2$

f) $(x - \frac{1}{3})^2$

2.4 Suma por la diferencia de binomios

P

Desarrolla el producto: $(x + a)(x - a)$.

S

Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$ y luego se desarrolla:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

En la solución:
$(x + a)[x + (-a)] \neq (x + a)^2$
Es decir, este producto se desarrolla de forma diferente al cuadrado de un binomio.

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

C

El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma: $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ .....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

E

Desarrolla:

$$(x - 2)(x + 2)$$

Utilizando suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

1. Desarrolla:
   a) $(x + 1)(x - 1)$
   b) $(x + 3)(x - 3)$
   c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$
   d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$

2. Desarrolla los siguientes productos:
   a) $(y - 8)(y - 10)$
   b) $(x + 11)^2$
   c) $(y - 9)^2$
   d) $(y + \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3})$

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

P

Desarrolla el producto: $(3x + 4y)^2$.

¿Puede realizarse el producto de forma similar a $(x + a)^2$?

S

Se toman $3x = w$, $4y = z$ y se desarrolla el producto como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(3x + 4y)^2 &= (w + z)^2 && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 4y = z,\\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w \text{ por } 3x \text{ y } z \text{ por } 4y.\end{aligned}$$

Por tanto, $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

C

Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

E

Desarrolla, aplicando productos notables:

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

Ambos binomios tienen el término $2x$. Se toma $2x = w$ y se desarrolla el producto de la misma forma que lo visto en la clase 1:

$$\begin{aligned}(2x + 1)(2x + 3) &= (w + 1)(w + 3) && \text{Tomando } 2x = w,\\ &= w^2 + (1 + 3)w + 1(3) \\ &= w^2 + 4w + 3 \\ &= (2x)^2 + 4(2x) + 3 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x.\end{aligned}$$

Por tanto, $(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$.

Desarrolla:

a) $(5x - 3y)^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3)$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3)$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5})$

2.6 Combinación de productos notables

P

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

¿Qué productos notables están involucrados en ambos literales? Por ejemplo, los trinomios del primer literal tienen en común la suma $x + y$.

S

a) Ambos trinomios tienen en común la suma $x + y$, y el número 1 es positivo en el primero y negativo en el segundo. Se toma $x + y = w$ y el producto se desarrolla como una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && \text{Tomando } x + y = w,\\ &= w^2 - 1^2\\ &= (x + y)^2 - 1 && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

b) Los productos involucrados son cuadrados de un binomio y productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Después de desarrollar ambos, se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\ &= 5x^2 + 3x + 11\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$.

C

Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identificar cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarrollar los productos teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reducir los términos semejantes, si los hay.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$

d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$

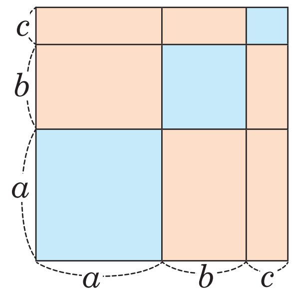
e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

2.7 Cuadrado de un trinomio

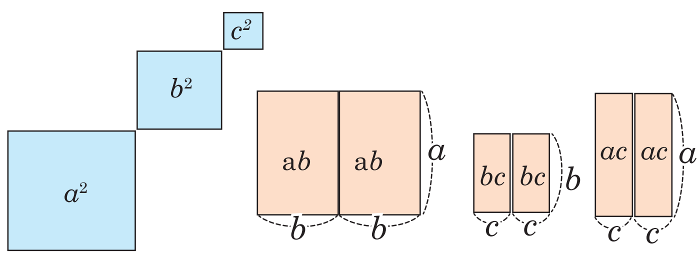
P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:



S

Primera forma: Como se trata de un cuadrado de lado $a + b + c$ su área se expresa como $(a + b + c)^2$.
Segunda forma: Se divide el cuadrado en piezas iguales y se tienen sus áreas respectivas:



Como se muestra en la imagen, la suma de las áreas de cada pieza es:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

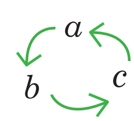
Realizando el producto: Se toma $b + c = w$ y se desarrolla como el cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + w)^2 \\ &= a^2 + 2aw + w^2 \\ &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Tomando $b + c = w$,
sustituyendo nuevamente $w = b + c$.

Por tanto: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Al desarrollar este producto es común colocar su desarrollo en este orden:



C

El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

E

Desarrolla: $(5x - 3y + 4)^2$.

El trinomio $5x - 3y + 4$ puede escribirse como $5x + (-3y) + 4$. Luego, el cuadrado se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(5x - 3y + 4)^2 &= (5x + (-3y) + 4)^2 \\ &= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x) \\ &= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x \\ &= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16\end{aligned}$$

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)^2$

b) $(2x + y + 3)^2$

c) $(3x - 2y + 5)^2$

d) $(x - 5y - 1)^2$

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

P

¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

¿En cuál producto notable están involucradas las expresiones $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, ab?

S

En el problema NO se pretende encontrar los valores de a y b, sino de $(a + b)^2$. Observa que $a^2 + b^2$ y ab corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En una suma, el orden de los sumandos no altera el total: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Se sustituyen los valores en lo anterior:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab\\ &= 6 + 2(3)\\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

E

Calcula 98×102 usando productos notables.

Los números 98 y 102 pueden escribirse como $100 - 2$ y $100 + 2$, respectivamente:

$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$

Lo anterior es una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2\\ &= 10\,000 - 4\\ 98 \times 102 &= 9\,996\end{aligned}$$

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto: $(100 - 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 - 2)$.

1. Resuelve lo siguiente:

   a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 34$ y $ab = 15$?

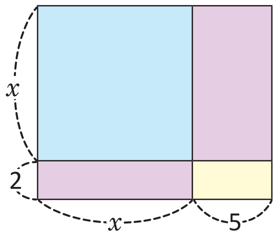
   b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a - b = 2$ y $a^2 - b^2 = 16$?

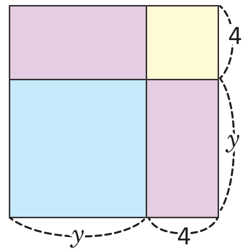
2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

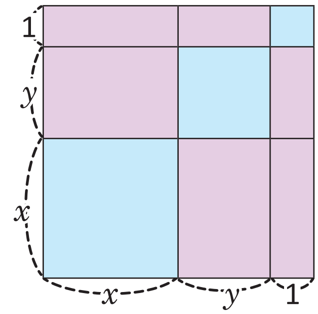
   a) 97×103 b) 95×105 c) 102^2 d) 105^2

2.9 Practica lo aprendido

1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las siguientes figuras:

a) 

b) 

c) 

2. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $(x + 1)(x + 9)$

b) $(x + 3)(x - 6)$

c) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{3}{6})$

d) $(y - \frac{1}{2})(y - \frac{3}{2})$

e) $(y - 1)(y + 2)$

f) $(x - 4)(x - 2)$

3. Desarrolla los siguientes cuadrados de binomios:

a) $(x + 6)^2$

b) $(y - 6)^2$

c) $(x + \frac{1}{5})^2$

d) $(y - \frac{1}{4})^2$

e) $(x + 5)^2$

f) $(y - 2)^2$

g) $(x + 2)^2$

h) $(y - \frac{1}{3})^2$

4. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$

b) $(x + 10)(x - 10)$

c) $(y + \frac{1}{5})(y - \frac{1}{5})$

d) $(y - \frac{2}{3})(y + \frac{2}{3})$

e) $(x + 4)(x - 4)$

f) $(x + 9)(y - 9)$

2.10 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(6x - 10)(6x - 2)$

b) $(\frac{x}{2} + 2)(\frac{x}{2} + 4)$

c) $(5x - 6y)^2$

d) $(6x + 10y)^2$

e) $(2x - 3)(2x - 1)$

f) $(5x - 3y)^2$

g) $(\frac{y}{3} - 3)^2$

h) $(2x + \frac{1}{2})(2x - \frac{1}{2})$

2. Desarrolla:

a) $(2x + y + 2)(2x + y - 2)$

b) $(x + y)(x - y) + (x + y)^2$

c) $(2x - 3)^2 - (5y - 1)(5y + 2)$

d) $(y^2 + 1)(y^2 - 1) - (y^2 + 1)^2$

e) $(5x + 10y + 3)^2$

f) $(4x - 2y - 6)^2$

3. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$, si $a^2 + b^2 = 104$ y $ab = 20$?

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a - b$, si $a + b = 8$ y $a^2 - b^2 = 32$?

c) ¿Cuál es el valor numérico de xy, si $x + y = 6$ y $x^2 + y^2 = 1$?

4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando productos notables:

a) 101^2

b) 102×101

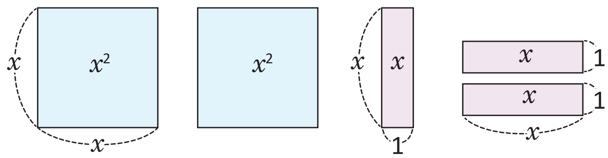
c) 49×51

d) 99^2

3.1 Factorización de polinomios

P

Antonio construirá un rectángulo con las siguientes piezas:

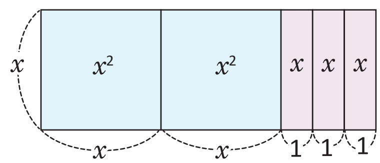


Las piezas azules son cuadrados de lado x; mientras que las piezas moradas son rectángulos de altura x y base 1.

a) ¿Cómo quedará el rectángulo?
b) ¿Cuál es el área total?
c) ¿Cuáles son las medidas de la altura y la base del rectángulo construido por Antonio?

S

a) El lado de los cuadrados azules es igual a la altura de los rectángulos morados (ambos miden x). El rectángulo puede formarse haciendo coincidir estas longitudes:



b) El área es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea, $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$.
c) Las medidas de la altura y la base son:

Altura $\longrightarrow$ x
Base $\longrightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

El área del rectángulo formado por las piezas se calcula como Altura × Base.

Como el área total es $2x^2 + 3x$, entonces:

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

C

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $2x^2 + 3x$ se factoriza como el producto $x(2x + 3)$; a cada uno de los polinomios x y $2x + 3$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

Factorizar

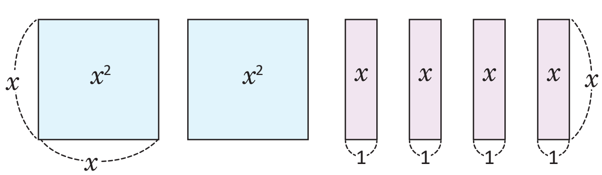
$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

Desarrollar

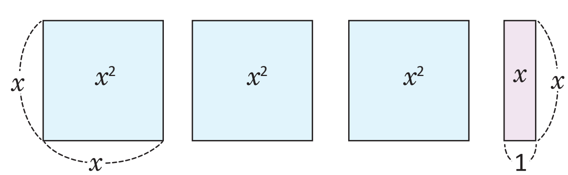
En la lección anterior, se daban las dimensiones del rectángulo para encontrar su área; ahora se da el área total para encontrar las dimensiones.

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a)



b)



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

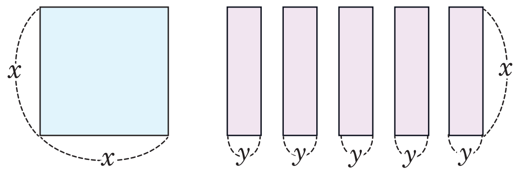
a) $2x(5x - 3)$ b) $-x(3x + 2)$ c) $(x + 4)(2x - 3)$ d) $3x(x - 5)(2x - 1)$

3.2 Factor común

P

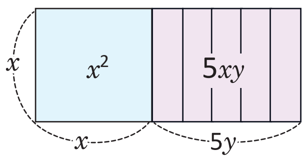
Realiza lo siguiente:

a) Escribe en tu cuaderno el área descrita por las piezas.
b) Forma un rectángulo y escribe su área en términos de su altura y su base.



S

a) El área de las piezas es: $x^2 + 5xy$.
b) El área del rectángulo es:



Altura $\longrightarrow$ x
Base $\longrightarrow$ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$
Su área es: $x(x + 5y)$.

Para factorizar la expresión, se debe escribir $x^2 + 5xy$ como producto de polinomios más simples. Observa lo siguiente:

$$x^2 = x(x)$$
$$5xy = x(5y)$$

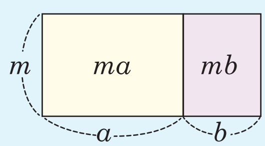
Ambos términos tienen en común el monomio x. Entonces:

$$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y) \longrightarrow \text{Identificar términos comunes.}$$
$$= x(x + 5y) \longrightarrow \text{Propiedad distributiva.}$$

Por lo tanto, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

C

Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio, utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.



E

Factoriza el polinomio:

$$5y^2 - 10xy$$

¿Qué tienen en común los términos $5y^2$ y $5xy$?

Se debe identificar el factor común en ambos polinomios:

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$
$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos. Por ejemplo, el máximo común divisor de 5 y 10 es 5.

Luego, se extrae dicho factor y se utiliza la propiedad distributiva:

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$
$$= 5y(y - 2x)$$

Factoriza los siguientes polinomios:

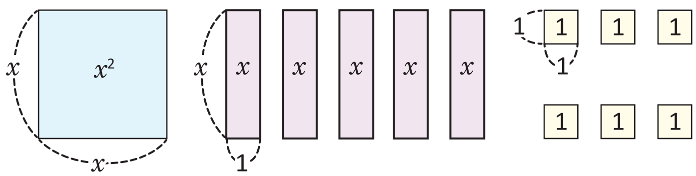
a) $2x^2 + xy$
b) $10x^2 - 5xy$
c) $x^2y + xy$
d) $2x^2y - 4xy$
e) $2x^2y - 3xy + y$
f) $3x^2 + 6y + 12xy$
g) $x^2y + x^2 - x$
h) $4xy - 6y$
i) $xy + 16x^2y^2$

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

P

Ana quiere factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$. Para poder hacerlo, se le ocurre lo siguiente:

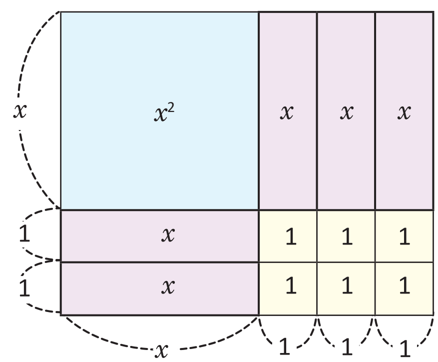
$x^2 + 5x + 6$ es el área del rectángulo que se forma con las siguientes piezas. Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ se debe encontrar la altura y la base del rectángulo.



¿Cómo queda factorizado $x^2 + 5x + 6$?

S

El rectángulo formado con las piezas se muestra en la figura. La altura del rectángulo es $(x + 2)$ y su base es $(x + 3)$. Luego, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Observa que el producto $(x + 2)(x + 3)$ es un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ y este se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 5x + 6$ deben buscarse dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Se prueba con las parejas de números (positivo y negativo) cuyo producto es +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5
−2 y −3	+6	−5

Como el producto debe ser 6 positivo, ambos números deben ser o bien positivos o bien negativos. Esto por la ley de los signos para la multiplicación:
(+)(+) = +
(−)(−) = +

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$ y $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).

2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

Factoriza $y^2 + 13y + 30$:
Se deben buscar dos números cuyo producto sea +30 y cuya suma sea +13. Como la suma es positiva, entonces ambos números deben ser positivos:

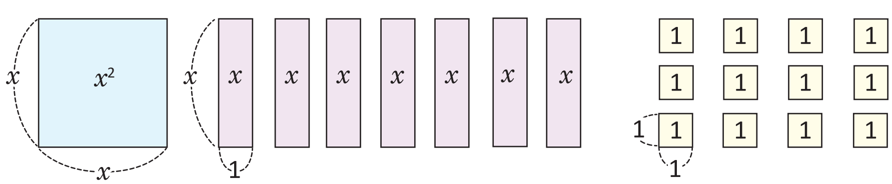
Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

Por lo tanto, $a = 3$, $b = 10$ y
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$.

1. En la siguiente figura:

   a) Reubica las siguientes piezas de modo que se forme un rectángulo.

   b) Encuentra el área del rectángulo formado en términos de su base y altura.



2. Factoriza los siguientes trinomios:

   a) $x^2 + 3x + 2$

   b) $x^2 + 9x + 20$

   c) $y^2 + 8y + 12$

   d) $y^2 + 11y + 30$

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

P

Factoriza los polinomios:

a) $x^2 - 13x + 36$

b) $y^2 - 6y - 40$

S

a) El trinomio cumple las condiciones para factorizarlo en el producto notable $(x + a)(x + b)$. Se buscan dos números cuyo producto sea +36 y cuya suma sea −13. Como la suma es negativa y el producto positivo, ambos números deben ser negativos:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Puedes desarrollar $(x - 4)(x - 9)$ para comprobar si la factorización es correcta.

Entonces:

$$x^2 - 13x + 36 = [x + (-4)][x + (-9)]$$
$$= (x - 4)(x - 9)$$

Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

b) De nuevo, se buscan dos números cuyo producto sea −40 y cuya suma sea −6. Como el producto es negativo (−40), entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

En la tabla faltan las parejas 5, −8 y −5, 8, pero ya se han encontrado los números que satisfacen.

Entonces:

$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)[y + (-10)]$$
$$= (y + 4)(y - 10)$$

Por lo tanto, $y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10)$.

C

Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan 2 números positivos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan 2 números negativos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan 2 números, uno positivo y el otro negativo cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$, según sea el caso.

Factoriza:

a) $x^2 + x - 2$

b) $x^2 - 10x + 21$

c) $x^2 - 7x - 30$

d) $y^2 - 4y - 32$

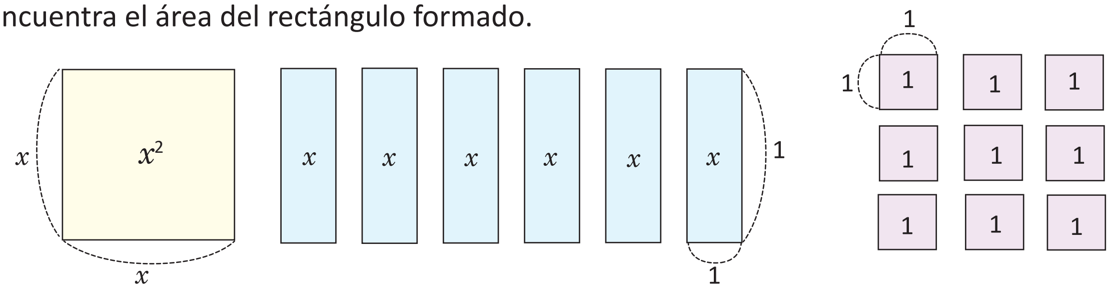
e) $y^2 - 14y + 33$

f) $x^2 + 13x + 42$

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

P Realiza lo siguiente:

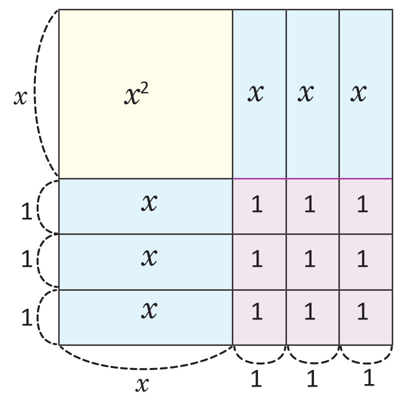
a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Coloca las piezas de modo que se forme un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo formado.



S

a) El área descrita por las piezas es:
$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9$.

b) El rectángulo formado por las piezas es:



Altura $\longrightarrow$ $x + 3$
Base $\longrightarrow$ $x + 3$

c) Observa que el rectángulo formado es un cuadrado cuya área es:

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Puede utilizarse lo visto en las clases anteriores, buscar dos números positivos (en este caso) cuyo producto sea +9 y cuya suma sea +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 9	+9	+10
3 y 3	+9	+6

Luego, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
$= (x + 3)^2$.

La factorización resulta en el cuadrado de un binomio. Este producto notable se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 6x + 9$ en el cuadrado de un binomio debe buscarse un número cuyo cuadrado sea 9 y el doble de este sea 6, justamente es 3. Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**.
Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

En un trinomio cuadrado perfecto el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo,

$$x^2 + 6x + 9.$$

Este es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de $3(3^2 = 9)$; además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2. \end{aligned}$$

Factoriza:

$$x^2 - 10x + 25$$

Es un trinomio cuadrado perfecto por las siguientes razones:

a) El término independiente es el cuadrado de un número:
25 es el cuadrado de 5 ($5^2 = 25$, y se tiene $a = 5$).

b) El coeficiente de x es el doble de 5:
$2a = 2(5) = 10$.

Como el segundo término es negativo, entonces:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

Factoriza:

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 8x + 16$

c) $y^2 - 18y + 81$

d) $y^2 + 14y + 49$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

P

En la figura 1, al cuadrado de lado x se le ha quitado un cuadrado de lado a (figura 2); dando como resultado la figura 3, cuya área es: $x^2 - a^2$.

Realizando un corte de manera conveniente, divide en piezas la figura 2 y forma un rectángulo.

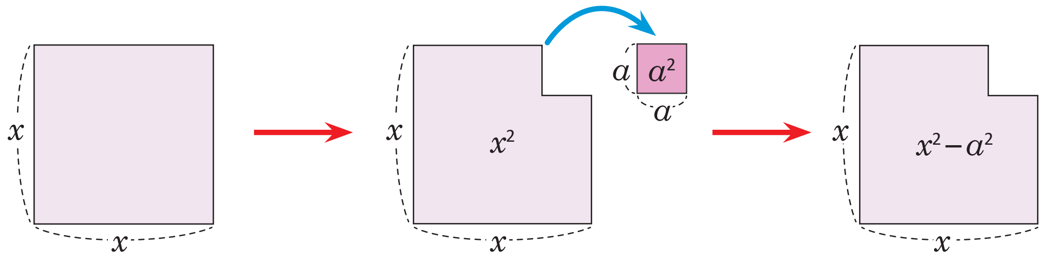


Figura 1 Figura 2 Figura 3

S

Se puede hacer un corte y reubicar las piezas como se muestra a continuación:

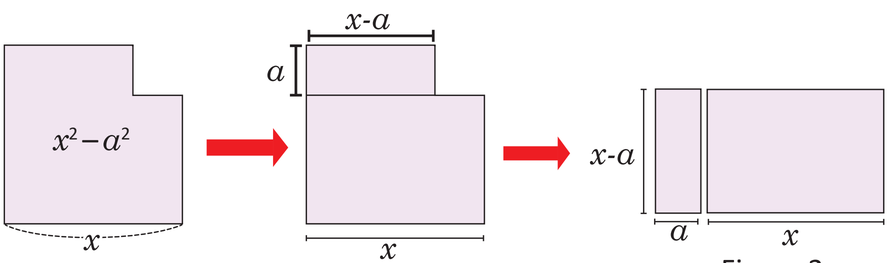


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Para la solución se dividió el rectángulo en estas piezas, sin embargo, no es la única forma de dividir el rectángulo y lograr demostrar la propiedad.

Observa que el área de la figura 1 es $x^2 - a^2$ y que el área de la figura 3 es $(x + a)(x - a)$.
Como estas expresiones representan la misma área. Entonces se tiene que

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

C

Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

E

Factoriza: $x^2 - 9$.

Para factorizar $x^2 - 9$, el término independiente 9 es igual al cuadrado de 3, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Factoriza:

a) $x^2 - 1$

b) $x^2 - 16$

c) $y^2 - 25$

d) $x^2 - y^2$

e) $y^2 - \frac{1}{4}$

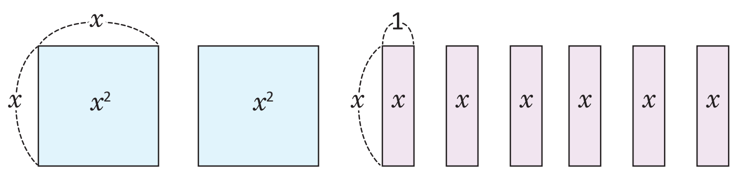
f) $x^2 - \frac{1}{9}$

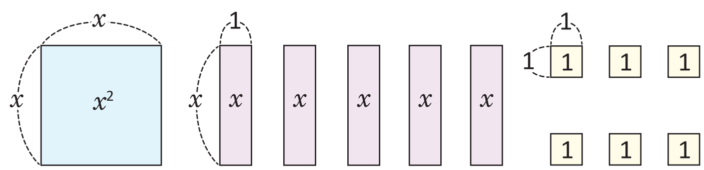
3.7 Practica lo aprendido

A continuación se presenta un resumen de las factorizaciones vistas hasta esta clase:

	Se factoriza:	Por ejemplo:
Factor común $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a) 

b) 

2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $5x(x - 1)$ b) $(-2x)(x + 10)$

c) $(x + y)(5x - y)$ d) $x(x - 5)(2x + 3)$

e) $2x(3x + 4)(y + 1)$ f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. Para el trinomio $x^2 - 11x + 18$:

a) Los dos números cuyo producto es +18 y cuya suma es −11, ¿son ambos positivos, negativos o uno positivo y otro negativo? Justifica tu respuesta.
b) Factoriza el trinomio.

4. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2 + 6xy$ b) $7xy - 21y^2$

c) $-x^2 + 2xy - 3xy^2$ d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2$

e) $x^2 - 6x - 55$ f) $y^2 + 5y - 50$

g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}$ h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}$

i) $x^2 - 81$ j) $y^2 - \frac{25}{36}$

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

P

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 25y^2$

¿Es posible utilizar factor común en cada caso? ¿Cuáles de los métodos vistos en clases anteriores puedes utilizar?

S

a) Los términos del trinomio no tienen un monomio común, pero puede utilizarse directamente uno de los métodos vistos en clases anteriores. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el tercero es el cuadrado de $3y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

Además, $2(2x)(3y) = 12xy$, por lo que $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Se toman $2x = w$ y $3y = z$ y se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto:

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$	Tomando $2x = w$ y $3y = z$,
$= w^2 + 2wz + z^2$	
$= (w + z)^2$	factorizando,
$= (2x + 3y)^2$	sustituyendo nuevamente $w = 2x$ y $z = 3y$.

Por lo tanto, $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) Igual que en el caso anterior, los términos del binomio, no tienen un monomio común. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el segundo es el cuadrado de $5y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

Se toman $2x = w$, $5y = z$ y se factoriza como diferencia de cuadrados:

$4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2$	Tomando $2x = w$ y $5y = z$,
$= w^2 - z^2$	factorizando,
$= (w + z)(w - z)$	sustituyendo nuevamente,
$= (2x + 5y)(2x - 5y)$.	

Por lo tanto, $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza:

a) $9x^2 - 30x + 25$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2$

c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25$

d) $36x^2 - 25$

e) $x^2 - 100y^2$

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

P

Factoriza:

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

No desarrolles los productos que se encuentran dentro de cada polinomio. Utiliza un procedimiento similar al de la clase anterior para poder factorizar.

S

a) Observa que $(x-1)^2$ es el cuadrado de $x-1$, $(y+1)^2$ es el cuadrado de $y+1$ y ambos se están restando. Puede factorizarse como diferencia de cuadrados, se toman $x-1=w$ y $y+1=z$ y se factoriza la diferencia de cuadrados:

$(x-1)^2-(y+1)^2=w^2-z^2$	Tomando $x-1=w$ y $y+1=z$,
$=(w+z)(w-z)$	factorizando,
$=(x-1+y+1)[x-1-(y+1)]$	sustituyendo nuevamente,
$=(x+y)(x-y-2)$	

Por lo tanto, $(x-1)^2-(y+1)^2=(x+y)(x-y-2)$.

b) Observa que $(x+1)^2$ es el cuadrado de $x+1$, y^2 es el cuadrado de y, además el segundo término es el producto de 2 por $x+1$ por y. Luego, el polinomio puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto: se toma $x+1=w$ y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=w^2+2wy+y^2$	Tomando $x+1=w$,
$=(w+y)^2$	factorizando,
$=(x+1+y)^2$	sustituyendo nuevamente $x+1=w$,
$=(x+y+1)^2$.	

Por lo tanto, $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+y+1)^2$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Recuerda que cuando utilices un cambio de variable: después de factorizar debes realizar el cambio nuevamente, reducir los términos semejantes (si los hay) y ordenar los términos de los factores.

Factoriza:

a) $4x^2-(y+2)^2$

b) $(x+3)^2-9y^2$

c) $(x-5)^2-(y-1)^2$

d) $y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$

e) $4x^2-4x(y-7)+(y-7)^2$

f) $(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2$

3.10 Factorizaciones sucesivas

P

Factoriza el siguiente polinomio: $2x^2 + 2x - 12$.

¿Es posible utilizar directamente alguno de los métodos vistos en las clases anteriores? ¿Qué deberías hacer primero?

S

Lo primero que debe hacerse es extraer el factor común de los términos, que en este caso es 2:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

El trinomio dentro del paréntesis puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$: los dos números (uno positivo y otro negativo) cuyo producto es −6 y cuya suma es +1 son 3 y −2. Luego:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor, utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

E

Factoriza el siguiente polinomio: $-2x^2y + 8xy - 8y$.

Primero, hay que extraer el factor común de los tres términos, en este caso es $-2y$.

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \qquad \text{Factorizando } x^2 - 4x + 4 \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2x^2 + 10x - 8$	b) $2x^2 + 32x + 30$	c) $3x^2 + 12x + 12$
d) $5xy^2 - 25xy + 30x$	e) $2x^2 - 18$	f) $-3y^2 + 300$
g) $-2x^2y + 8xy - 8y$	h) $2x^2y - 12xy + 18y$	i) $3x^2z - 12y^2z$

3.11 Combinación de factorizaciones

P

Factoriza: $18x^2 - 200y^2$.

Debes extraer primero el factor común en cada caso.

S

Los coeficientes de x^2 y y^2 tienen factor común 2:

$$\begin{aligned} 18x^2 - 200y^2 &= 2(9x^2) - 2(100y^2) \\ &= 2(9x^2 - 100y^2) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $9x^2 = (3x)^2$, $100y^2=(10y)^2$

$$\begin{aligned} &= 2[(3x)^2 - (10y)^2] && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 10y = z, \\ &= 2(w^2 - z^2) && \text{factorizando,} \\ &= 2(w + z)(w - z) && \text{sustituyendo nuevamente,} \\ &= 2(3x + 10y)(3x - 10y). \end{aligned}$$

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

C

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor. Si los términos del polinomio NO tienen un monomio común, entonces se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos vistos en clases anteriores; este proceso se repite para cada uno de sus factores resultantes (si es posible) hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios más simples.

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-18x^2y^2 + 32$

b) $3x^2z - 12y^2z$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$

d) $27m^2 - 75n^2$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

P

Utilizando factorización, encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

S

a) La operación es una diferencia de cuadrados:

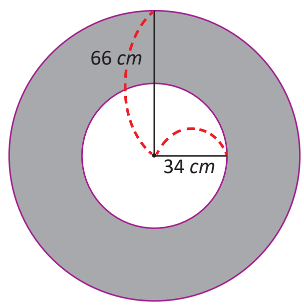
$$\begin{aligned} 99^2 - 1 &= (99 + 1)(99 - 1) \\ &= (100)(98) \\ 99^2 - 1 &= 9\,800 \end{aligned}$$

b) La operación también es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 35^2 - 15^2 &= (35 + 15)(35 - 15) \\ &= (50)(20) \\ 35^2 - 15^2 &= 1\,000 \end{aligned}$$

E

Calcula el área de la región sombreada (deja expresado el resultado en términos de π).



Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. La región delimitada por dos circunferencias concéntricas se llama **corona circular**.

Para calcular el área de la región sombreada debe restarse del área del círculo mayor, el área del círculo menor. El círculo mayor tiene radio 66 *cm*, y área:

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

El círculo menor tiene radio 34 *cm* y área:

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

Entonces, el área de la región sombreada es:

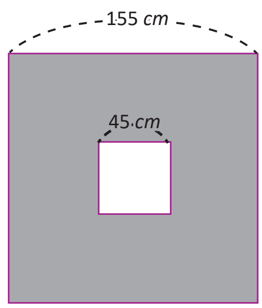
$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$	Se extrae factor común π,
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$	se factoriza como diferencia de cuadrados,
$= (100)(32)\pi$	se calculan las operaciones en los paréntesis,
$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$	se deja expresado en términos de π.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $3\,200\pi$ cm^2.

1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:

a) $35^2 - 25^2$ b) $45^2 - 35^2$ c) $98^2 - 4$

2. Calcula el área de la región sombreada (ambos cuadriláteros son cuadrados):



3.13 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 24x - 60$

b) $-4y^2 - 16y - 12$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4}$

f) $64x^2 - 49y^2$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x$

2. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

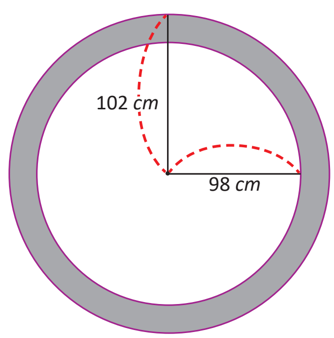
a) $75^2 - 25^2$

b) $95^2 - 25$

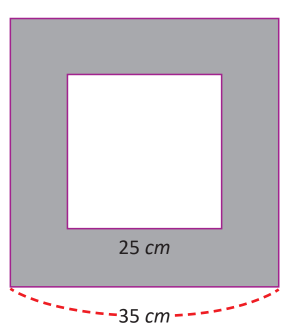
c) 101^2

d) 47×53

3. Calcula el área de la región sombreada:

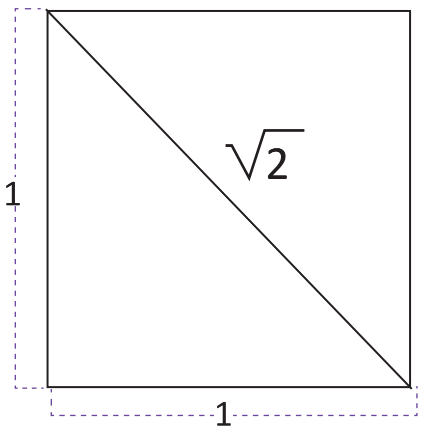


4. Calcula el área de la región sombreada:



Unidad 2

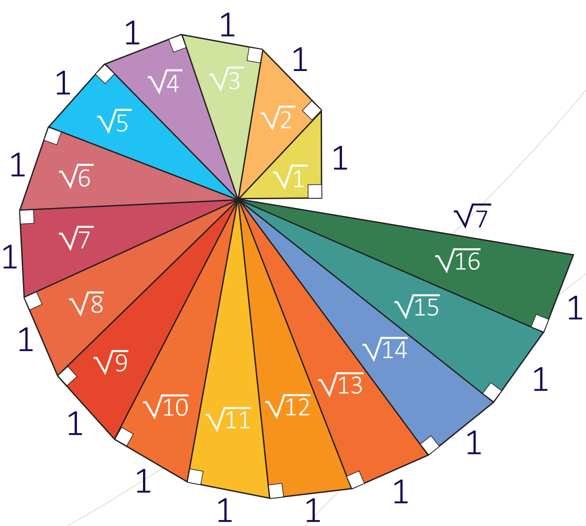
Raíz cuadrada



Raíz de 2. La diagonal de un cuadrado de lado 1.

En la historia de la matemática, el descubrimiento de un nuevo conjunto numérico no siempre fue bien recibido, tal es el caso de los números irracionales; alrededor del siglo V a. C., el matemático griego Hippasus fue el primero en demostrar la existencia de este tipo de números al descubrir que la diagonal de un cuadrado de lado 1 era un número que no puede expresarse como una fracción, esto causo mucha indignación en los pensadores de su época.

En matemática, la expansión de los números hasta los números reales y el conocimiento de que existen infinitos números permitió el desarrollo de áreas imprescindibles como el cálculo y la aritmética. Además permitió una mayor precisión en las mediciones de los objetos y potenció el desarrollo de la física y química actual. Uno de los números irracionales más importantes de la matemática es el que surge al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro, ese número es π = 3.1415926535... seguido de infinitos decimales.



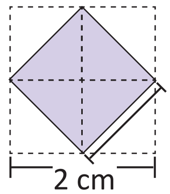
Sucesión de raíces cuadradas obtenidas a través de triángulos rectángulos.

Estudiarás el concepto de número real y clasificarás un número como racional o irracional, sabrás representar números con el símbolo radical y operar con raíces cuadradas, además de aplicar el contenido a situaciones cotidianas.

1.1 Sentido y símbolo de la raíz cuadrada

P

La siguiente figura está formada por 4 cuadrados de 1 cm de lado, y se forma el cuadrado interior como se muestra en la figura:



Piensa un número que al elevar al cuadrado da 2

El área del cuadrado se calcula:
$A = L^2$

¿Cuánto mide el área y el lado del cuadrado formado en el interior?

S

El área del cuadrado está formada por la mitad del área de cada cuadrado de 1 cm, entonces el área del cuadrado interior es **2 cm².**

Probando si existe algún número conocido que al elevar al cuadrado dé como resultado 2.

Probando para 1:	$1^2 = 1 < 2$	Probando para 2:	$2^2 = 4 > 2$	El valor está entre 1 y 2.
Probando para 1.4:	$1.4^2 = 1.96 < 2$	Probando para 1.5:	$1.5^2 = 2.25 > 2$	El valor está entre 1.4 y 1.5.
Probando para 1.41:	$1.41^2 = 1.9881 < 2$	Probando para 1.42:	$1.42^2 = 2.0164 > 2$	El valor está entre 1.41 y 1.42.
Probando para 1.414:	$1.414^2 = 1.9993 < 2$	Probando para 1.415:	$1.415^2 = 2.002 > 2$	El valor está entre 1.414 y 1.425.

Finalmente no es posible escribir un número decimal que al elevarlo al cuadrado resulte 2.

Entonces, por convención, el lado del cuadrado con área 2 será representado por $\sqrt{2}$ **cm.**

C

El símbolo $\sqrt{}$ representa un número **no negativo** que al elevarlo al cuadrado da como resultado el número que está dentro del símbolo.

Se denota con el símbolo $\sqrt{}$ que se llama **radical** y se lee "raíz cuadrada". El número dentro del radical se llama **radicando**.

Radical $\longrightarrow \sqrt{a} \longleftarrow$ Radicando

Por ejemplo: $\sqrt{3}$ se lee "raíz cuadrada de tres" y representa un número que al elevarlo al cuadrado da como resultado 3.

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Se observa que no es posible escribir un número decimal que al elevarlo al cuadrado resulte 3.

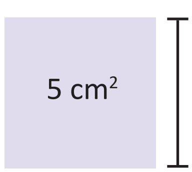
E

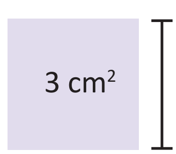
¿Qué número está siendo representado al elevar al cuadrado la siguiente expresión?

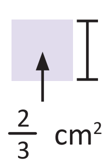
$\sqrt{\frac{2}{5}}$ Al elevar al cuadrado $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ representa el número $\frac{2}{5}$. Por tanto:

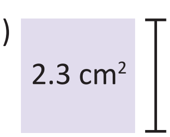
$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Determina qué número está siendo representado al elevar al cuadrado las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $\sqrt{0.2}$

1.2 Representación de números con el símbolo de raíz cuadrada

P

¿Cuánto miden los lados de un cuadrado cuya área es 9 cm^2?

A = 9 cm^2 ¿Cuánto mide?

S

Denotando la medida del lado del cuadrado con notación de raíz cuadrada: $\sqrt{9}$ cm
Lo cuál significa que $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$.

Probando si existe algún número conocido que al elevar al cuadrado dé como resultado 9.

Probando para 2, $2^2 = 4 < 9$.

Probando para 3, $3^2 = 9$. Entonces, el número representado por $\sqrt{9}$ es 3.

Por lo tanto $\sqrt{9} = 3$.

Y el lado del cuadrado mide: **3 cm**.

C

Dentro de los números representados con el símbolo de radical, hay números que se pueden representar sin usar este símbolo. A estos números se les conoce como **raíces exactas**.

Por ejemplo: $\sqrt{25}$ Representa un número que al elevarlo al cuadrado da como resultado 25.

$$\left(\sqrt{25}\right)^2 = 25$$

Y el número representado por $\sqrt{25}$ es 5 porque: $5^2 = 25$.

Por lo tanto $\sqrt{25} = 5$.

Si $a > 0$,
se cumple que
$\sqrt{a^2} = a$

E

Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

Probando para $\frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Probando para $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Por lo tanto, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, es raíz exacta.

b) $\sqrt{0.16}$

Probando para 0.3: $(0.3)^2 = 0.09$.

Probando para 0.4: $(0.4)^2 = 0.16$.

Por lo tanto, $\sqrt{0.16} = 0.4$, es raíz exacta.

1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados:

a) 1 cm^2

b) 4 cm^2

c) $\frac{9}{16}$ cm^2

d) 0.49 cm^2

2. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\sqrt{\frac{1}{25}}$ d) $\sqrt{0.01}$

1.3 Raíces cuadradas de un número

P

Determina qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9.

S

Se busca el número que al elevar al cuadrado da como resultado 9.

Sea a ese número.
El número a cumple la ecuación $a^2 = 9$.
Las soluciones son $a = 3$ y $a = -3$.

Los únicos números que al elevarlos al cuadrado resultan 9 son: 3 y –3.

C

Se definen las **raíces cuadradas** de un número $\boldsymbol{a}$ positivo como los números que al elevarlos al cuadrado resultan $\boldsymbol{a}$.

Entonces un número $\boldsymbol{b}$ es raíz cuadrada de $\boldsymbol{a}$ si se cumple que: $b^2 = a$.

Los números que cumplen esta igualdad son b y $-b$: $(-b)^2 = b^2 = a$.

Y se dirá que las raíces cuadradas de $\boldsymbol{a}$ son $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{-b}$.

> Observa que,
> el único número que tiene una sola raíz cuadrada es cero, porque:
> Solamente $0^2 = 0$.

Por ejemplo: Las raíces cuadradas de 9 son:

$$3 \text{ y } -3 \text{ pues } (-3)^2 = 9 \text{ y } 3^2 = 9.$$

Para denotar tanto la raíz cuadrada positiva como negativa, se utilizará el signo ± que se lee **más menos**:

Las raíces cuadradas de 9 son: ± 3.

A la raíz cuadrada con signo positivo se le conoce como **raíz cuadrada** y se denota $\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Por ejemplo:

$$\sqrt{9},\ \sqrt{\frac{25}{4}},\ \sqrt{5},\ \text{etc.}$$

A la raíz cuadrada con signo negativo se le conoce como **raíz cuadrada negativa** y es el número opuesto de $\sqrt{\boldsymbol{a}}$, es decir, $-\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Por ejemplo:

$$-\sqrt{9},\ -\sqrt{\frac{25}{4}},\ -\sqrt{5},\ \text{etc.}$$

En general, para un número $\boldsymbol{a}$ positivo se cumple que

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{a} & \xrightarrow{\text{Elevar al cuadrado}} & a \\ -\sqrt{a} & \xleftarrow[\text{Sacar raíces cuadradas}]{} & a \end{array}$$

Observa:

$3 = \sqrt{9}$ $\xrightarrow{\text{Elevar al cuadrado}}$ 9

$-3 = -\sqrt{9}$ $\xleftarrow{\text{Sacar raíces cuadradas}}$

Si a es cualquier número real se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$.
Por ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

El símbolo | | denota el valor absoluto de un número.

E

Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) $\frac{25}{4}$ Determinando los números: $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ y $-\sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$.

Y las raíces cuadradas son: $\pm\frac{5}{2}$.

b) 5 Determinando los números: $\left.\begin{array}{r}\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{array}\right\}$ No se pueden expresar sin el símbolo de radical.

Y las raíces cuadradas son: $\pm\sqrt{5}$.

1. Determina qué números elevados al cuadrado dan como resultado:

a) 144 b) 169 c) 225

d) 121 e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{41}{36}$

2. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números.

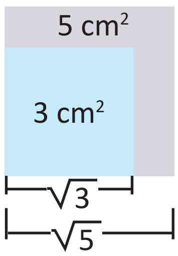
a) 25 b) 49 c) $\frac{9}{36}$

d) 10 e) 13 f) 0.04

1.4 Orden de las raíces cuadradas

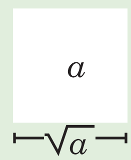
Se tienen 2 cuadrados de diferente área, uno de 3 cm^2 y otro de 5 cm^2.
¿Qué cuadrado tiene lados de mayor longitud?

Para analizar los lados de ambos cuadrados se puede colocar de la siguiente manera:



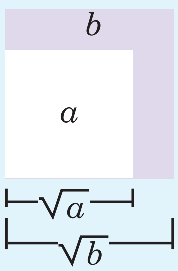
Y al colocar los cuadrados de esta manera se puede notar que el lado del cuadrado de 3 cm^2 de área es menor que el lado del cuadrado de 5 cm^2 de área.

El lado de un cuadrado de área "a" es: $\sqrt{a}$.



Entonces, como $3 < 5$ se cumple que $\sqrt{3} < \sqrt{5}$.

En general si el radicando de una raíz cuadrada es menor que el radicando de otra, entonces la primera raíz cuadrada es menor que la segunda, así:



Para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > \mathbf{0}$, si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Por ejemplo:

¿Qué número es mayor $\sqrt{12}$ o $\sqrt{11}$?

Como $11 < 12$ entonces $\sqrt{11} < \sqrt{12}$.

Observa que el radicando hace referencia al área de un cuadrado y la raíz a la longitud del lado del mismo cuadrado.

Determina el orden de los siguientes números:

a) 3 y $\sqrt{7}$

Dado que 3 se puede expresar como $\sqrt{9}$.

Y comparando $\sqrt{9}$ y $\sqrt{7}$:

$9 > 7$ entonces $\sqrt{9} > \sqrt{7}$.

Por lo tanto: $3 > \sqrt{7}$.

b) $-\sqrt{15}$ y $-\sqrt{\frac{17}{2}}$

Al comparar números negativos el que tiene mayor valor absoluto es el menor.

Comparando $\sqrt{15}$ y $\sqrt{\frac{17}{2}}$:

$\frac{17}{2} < 15$ entonces $\sqrt{\frac{17}{2}} < \sqrt{15}$.

Por lo tanto, al ser negativos se cumple que

$$-\sqrt{\frac{17}{2}} > -\sqrt{15} .$$

1. Escribe el símbolo <, >, o = según corresponda.

a) $\sqrt{7}\ \square\ \sqrt{6}$ b) $2\ \square\ \sqrt{3}$ c) $0.7\ \square\ \sqrt{0.7}$

d) $-\sqrt{14}\ \square\ -\sqrt{13}$ e) $-\sqrt{\frac{2}{7}}\ \square\ -\frac{2}{7}$ f) $\sqrt{\frac{1}{2}}\ \square\ \sqrt{0.5}$

En c), e) y f) ten cuidado, al elevar al cuadrado observa cuál es mayor.

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor.

a) $\sqrt{10}$ b) -5 c) 10 d) $-\sqrt{15}$ e) $\sqrt{\frac{100}{4}}$ f) $-\sqrt{1.5}$

1.5 Números racionales e irracionales

P

Representa los siguientes números como fracciones:

a) 7 b) 0.25 c) −2.3

S

a) 7

$7 = \frac{7}{1}$

Toda división entre uno da como resultado el mismo número

b) 0.25

$0.25 \times \frac{100}{100} = \frac{25}{100}$ Multiplicando por 1

$= \frac{1}{4}$ Simplificando

c) −2.3

$-2.3 \times \frac{10}{10} = -\frac{23}{10}$

En b) y c) se busca un número que haga desaparecer las cifras decimales. En ambos casos, se ha multiplicado por 1, por lo que el valor de los números es el mismo.

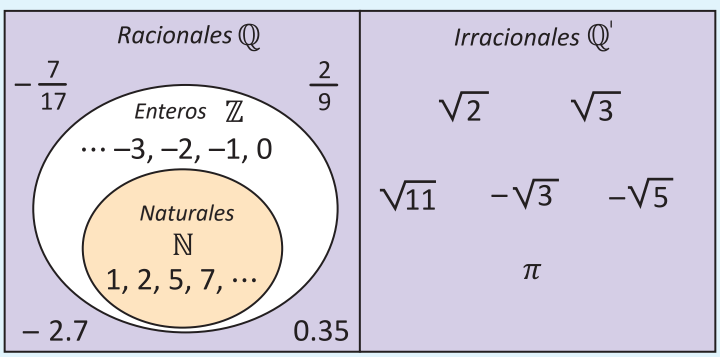
C

Los números que pueden representarse como una fracción, es decir, de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b números enteros y $b \neq 0$ se llaman **números racionales**, se representan (denotan) por: $\mathbb{Q}$.

En el problema anterior, todos los números podían representarse como fracción, por lo que todos ellos son números racionales.

Los números que no pueden ser expresados de la forma $\frac{a}{b}$, se llaman **números irracionales** y se representan (denotan) por: $\mathbb{Q}'$. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π.

Números



1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales, según sea el caso.

a) 8 b) -0.09 c) $-\sqrt{11}$ d) $-\pi$

2. Representa los siguientes números como fracciones:

a) 2 b) 0.35 c) −6 d) −1.5

3. Escribe las siguientes fracciones como números decimales, realizando la división.

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{5}{11}$ d) $\frac{4}{3}$

Observa lo que sucede con el resultado en los literales c) y d) del numeral 1.

1.6 Conversión de números decimales a fracción

Representa los siguientes números como una fracción.

a) 1.333333...   b) 0.262626...

> Los tres puntos al final significan que la parte decimal repite el mismo patrón infinitamente.

Considerando $x = 1.333333...$
Analizando la diferencia entre $10x$ y x:

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 13.3333... \\ - & x = & 1.3333... \\ \hline & 9x = & 12.0000... \end{array}$$

Despejando x: $x = \dfrac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \dfrac{4}{3}$.

Por lo tanto, $x = 1.333333 = \dfrac{4}{3}$.

Considerando $x = 0.26262626...$
Analizando la diferencia entre $100x$ y x:

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 26.262626... \\ - & x = & 0.262626... \\ \hline & 99x = & 26.000000... \end{array}$$

Entonces: $x = \dfrac{26}{99}$.

Por lo tanto:

$0.26262626 = \dfrac{26}{99}$.

> Al multiplicar un número decimal por 10, 100, 1 000,... el punto decimal se desplaza a la derecha 1, 2, 3,... espacios respectivamente.

> Al restar 13.333... con 1.333 y 26.2626... con 0.2626... se elimina la parte infinita periódica.

Los números decimales cuya parte decimal tiene un número de cifras, que se repiten infinitamente se conocen como **números decimales periódicos.** Para representar este tipo de números se utilizará una barra sobre el período (cifras que se repiten) del número. Así 1.873535... = $1.87\overline{35}$.

Para convertir un número de período 1 o 2 a fracción:

1. Se representa el número con x y se calcula $10x$ (o $100x$).
2. Se resta $10x$ (o $100x$) con x para eliminar la parte periódica.
3. Se despeja x y se simplifica la fracción que representa el número decimal periódico.

Por ejemplo: $2.\overline{15}$

1. $x = 2.\overline{15}$ $100x = 215.\overline{15}$

Período 2

2. $$\begin{array}{rrl} & 100x = & 215.1515... \\ - & x = & 2.1515... \\ \hline & 99x = & 213.0000... \end{array}$$

3. $x = \dfrac{\overset{71}{\cancel{213}}}{\underset{33}{\cancel{99}}} = \dfrac{71}{33}$

Todos los números racionales se representan como decimales o decimales periódicos.

1. Clasifica los siguientes números decimales como periódicos y no periódicos.

a) 3.141592   b) 1.452727...   c) 14.7777...

d) 2.7272...   e) 0.873521   f) 1.8555...

2. Expresa los siguientes números decimales periódicos como fracción.

a) $0.\overline{4}$ b) $0.\overline{17}$ c) $3.\overline{5}$

d) $1.\overline{25}$ e) $0.\overline{741}$ f) $4.\overline{217}$

1.7 Definición de los números reales

P

Coloca los siguientes números en la recta numérica.

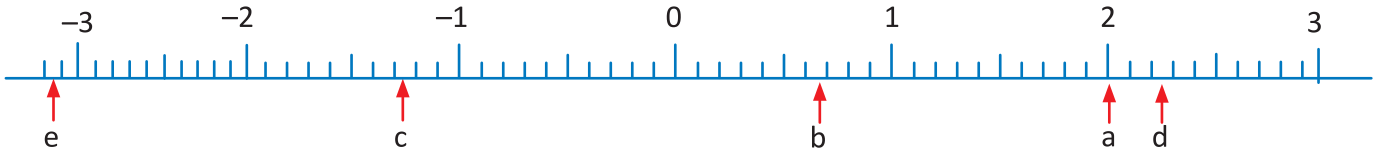
a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) $-1.271212...$ d) $\sqrt{5}$ e) $-\pi$

S

Utilizando las expresiones decimales de estos números.

a) $2 = 2$ b) $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ c) $-1.271212...$ d) $\sqrt{5} = 2.236...$ e) $-\pi = -3.141...$

Ubicando en la recta numérica.



C

A cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real y viceversa.

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se conoce como: **números reales.**

Los números reales se representan por: $\mathbb{R}$
Por ejemplo:

- Los enteros positivos, negativos y el cero son reales porque son racionales.

$$2 = \frac{2}{1},\ -3 = \frac{-3}{1},\ 0 = \frac{0}{1}$$

- Los números fraccionarios positivos y negativos son reales porque son racionales.

$$\frac{3}{5},\ -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$$

- Los números decimales, porque son racionales o irracionales.

$$0.7,\ -0.34,\ 0.\overline{3},\ -1.2\overline{34},\ 4.231574...,\ \text{etc.}$$

- Los números expresados con raíz cuadrada, porque son irracionales.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{10}\ \text{ etc.}$$

Y se puede sumar, restar, multiplicar y dividir entre números reales.

- Reales ($\mathbb{R}$)
  - Racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Números negativos
      - El cero
      - Números Naturales ($\mathbb{N}$)
    - Fracciones
  - Irracionales ($\mathbb{Q}'$)

Explica por qué los siguientes números son números reales.

a) 7 b) -15 c) $\frac{5}{9}$ d) -0.04

e) $3.141592...$ f) $-1.45\overline{27}$ g) $14.\overline{7}$ h) $-2.\overline{72}$

i) $\sqrt{7}$ j) $-\sqrt{16}$ k) π l) $-\sqrt{0.09}$

1.8 Practica lo aprendido

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a) El cero no es un número racional. $\square$

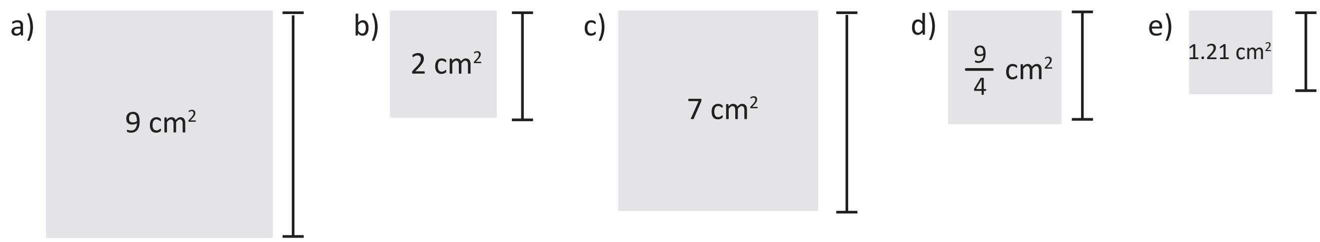
   b) La expresión fraccionaria de $0.\overline{9}$ es $\frac{9}{9}$. $\square$

   c) La igualdad $\sqrt{(-2)^2} = -2$ es cierta. $\square$

   d) El número $\sqrt{16}$ es un número racional. $\square$

   e) La resta de números irracionales siempre da como resultado otro número irracional. $\square$

2. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados:



3. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

   a) 81   b) 17   c) $\frac{16}{49}$ d) 0.4

4. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

   a) $\sqrt{36}$ b) $-\sqrt{\frac{64}{25}}$ c) $-\sqrt{0.36}$ d) $\sqrt{2.25}$

1.9 Practica lo aprendido

1. Determina cuáles de los siguientes números son iguales:

   a) $\left(\sqrt{2}\right)^2$ b) $\sqrt{2^2}$ c) $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ d) $\sqrt{(-2)^2}$

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor:

   a) $\sqrt{3}$ b) 2   c) -3 d) $-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ f) $-\sqrt{2.9}$

3. En los siguientes literales:

   a) Aproxima el valor de $\sqrt{15}$ utilizando las potencias indicadas.

   $3.86^2 = \square$ $3.87^2 = \square$ $3.88^2 = \square$ $3.89^2 = \square$

   $$\square < \sqrt{15} < \square$$

   b) Aproxima hasta las centésimas los siguientes números irracionales, utilizando la calculadora.

   $$\square < \sqrt{7} < \square$$

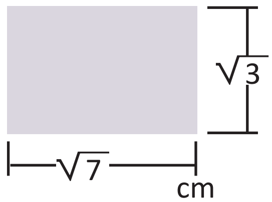
   $$\square < -\sqrt{14} < \square$$

4. Clasifica los siguientes números reales como racionales o irracionales. Si son racionales, exprésalos en la forma $\frac{a}{b}$.

   a) 15   b) $-1.252547...$ c) $\sqrt{7}$ d) $-\sqrt{0.01}$

2.1 Multiplicación de raíces cuadradas

Calcula el área del siguiente rectángulo que posee $\sqrt{3}$ cm de altura y $\sqrt{7}$ cm de base.



Para calcular el área se debe multiplicar $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$.
Para operarlo, observa que

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}\times\sqrt{7})^2 &= (\sqrt{3}\times\sqrt{7})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{7})\\ &= (\sqrt{3})^2\times(\sqrt{7})^2\\ &= 3\times 7\end{aligned}$$

En potenciación se cumple que $a^2b^2 = (ab)^2$

Luego se cumple que $(\sqrt{3} \times \sqrt{7})^2 = 3 \times 7$.

Luego, tomando la raíz cuadrada positiva: $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$

$= \sqrt{21}$ cm^2

En general, para realizar $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ con $a,\ b \geq 0$.
Se cumple que $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$.
Tomando la raíz cuadrada positiva:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Se multiplican los radicandos de cada raíz cuadrada.

Por ejemplo:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$$

Realizar las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

Observa que

$\sqrt{4^2} = 4$

Pero $\sqrt{(-4)^2}$ no es -4, porque

$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

a) $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{8}$

Aplicando la ley de los signos:

$-(\sqrt{2} \times \sqrt{8})$.

Resolviendo:

$-(\sqrt{2} \times \sqrt{8}) = -(\sqrt{2 \times 8}) = -\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4$.

b) $(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{3})$

Aplicando la ley de los signos:

$(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{3}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{3})$

Resolviendo:

$(\sqrt{5} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{5 \times 3}) = \sqrt{15}$.

Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

c) $(-\sqrt{3}) \times \sqrt{7}$

d) $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{7})$

e) $\sqrt{10} \times (-\sqrt{3})$

f) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{12})$

g) $(-\sqrt{18}) \times \sqrt{2}$

h) $(-\sqrt{50}) \times (-\sqrt{2})$

2.2 División de raíces cuadradas

P

Encuentra una forma para realizar la división $\sqrt{3} \div \sqrt{7}$.

S

Se expresa la división como una fracción: $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

En potenciación se cumple que $\dfrac{a^2}{b^2} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

Además las raíces cuadradas cumplen: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ $\quad \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

Entonces: $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = \dfrac{3}{7}$. Por propiedades de potencia: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \dfrac{3}{7}$.

El número positivo que elevado al cuadrado da $\dfrac{3}{7}$ es $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Tomando la raíz cuadrada positiva: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Por lo tanto: $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

C

En general, para realizar $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ con $a \geq 0$, $b > 0$.

Se expresa como fracción y se cumple que $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$.

Tomando la raíz cuadrada positiva: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Por ejemplo: $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Se dividen los radicandos de cada raíz cuadrada y se expresan como fracción.

E

Realizar las siguientes divisiones de raíces cuadradas:

a) $\left(-\sqrt{6}\right) \div \sqrt{10}$

Aplicando la ley de los signos:

$\left(-\sqrt{6}\right) \div \sqrt{10} = -\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)$.

Resolviendo:

$-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\dfrac{6}{10}} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

b) $\left(-\sqrt{8}\right) \div \left(-\sqrt{18}\right)$

Aplicando la ley de los signos:

$\left(-\sqrt{8}\right) \div \left(-\sqrt{18}\right) = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$.

Resolviendo:

$\sqrt{\dfrac{8}{18}} = \sqrt{\dfrac{8}{18}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$.

Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ $\quad$ b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ $\quad$ c) $\left(-\sqrt{3}\right) \div \sqrt{6}$ $\quad$ d) $\left(-\sqrt{15}\right) \div \left(-\sqrt{6}\right)$

e) $\sqrt{3} \div \left(-\sqrt{7}\right)$ $\quad$ f) $\sqrt{27} \div \left(-\sqrt{12}\right)$ $\quad$ g) $\left(-\sqrt{20}\right) \div \sqrt{5}$ $\quad$ h) $\left(-\sqrt{12}\right) \div \left(-\sqrt{3}\right)$

2.3 Expresión de números sin el símbolo de radical

P

Expresa el número $\sqrt{225}$ en el símbolo de radical.

S

Expresando 225 en su descomposición prima:
Entonces $225 = 3^2 \times 5^2$.
Y en la raíz cuadrada se cumplirá:

$$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \times 5^2}$$

Utilizando la multiplicación de radicales:

$$\sqrt{3^2 \times 5^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} = 3 \times 5 = 15$$

Por lo tanto: $\sqrt{225} = 15$.

Para encontrar la descomposición prima de 225.

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

entonces $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$.

C

Para expresar números sin el símbolo de radical:

1. Se encuentra la descomposición prima del radicando.
2. Se separa la raíz cuadrada en multiplicaciones de potencias cuadradas.
3. Se calcula cada raíz cuadrada y se multiplican los resultados.

Por ejemplo: $\sqrt{324}$

1. $324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$
2. $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}$
   $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2}$
3. $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

E

Expresa el número $\sqrt{\dfrac{400}{441}}$ sin el símbolo de radical.

$\sqrt{\dfrac{400}{441}} = \dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}}$ Haciendo el proceso para el numerador y el denominador:

1. $400 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2$ 2. $\sqrt{400} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{5^2}$ 3. $\sqrt{400} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

1. $441 = 3^2 \times 7^2$ 2. $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7^2}$ 3. $\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$

Observa:

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Por lo tanto: $\dfrac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}} = \dfrac{20}{21}$.

Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{900}$

b) $-\sqrt{625}$

c) $-\sqrt{441}$

d) $-\sqrt{\dfrac{49}{144}}$

e) $\sqrt{\dfrac{81}{196}}$

f) $-\sqrt{\dfrac{100}{121}}$

2.4 Multiplicación de un número racional con una raíz cuadrada

P

Realiza la multiplicación $5 \times \sqrt{2}$ y exprésala como la raíz cuadrada de un solo número.

S

Expresando 5 con el símbolo de radical $5 = \sqrt{25}$.

Entonces, se tiene $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$.

Realizando la multiplicación $\sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

Por lo tanto, $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{50}$.

Para representar la multiplicación $5 \times \sqrt{2}$ se puede utilizar la notación: $5\sqrt{2}$

C

La notación $a\sqrt{b}$ simboliza la multiplicación $a \times \sqrt{b}$ con $a, b \geq 0$.

Para realizar la multiplicación $a \times \sqrt{b}$ y expresarla como la raíz cuadrada de un número:

1. Se expresa a con el símbolo de radical.

$$a = \sqrt{a^2}$$

2. Se multiplican las raíces cuadradas.

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

Por ejemplo: $3\sqrt{3}$

1. $3 = \sqrt{9}$

2. $3\sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$

$$= \sqrt{9 \times 3}$$
$$= \sqrt{27}$$

E

Expresa el número $\frac{\sqrt{5}}{3}$ como la raíz cuadrada de un número.

Expresando el número 3 con el símbolo de radical $3 = \sqrt{9}$.

Luego, $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$.

Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número.

a) $3\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

2.5 Simplificación de raíces cuadradas inexactas

P

¿Cómo se puede simplificar la expresión de los números a) $\sqrt{12}$ y b) $\sqrt{\frac{5}{9}}$?

S

a) Expresando 12 en su descomposición prima:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$$

Simplificando la expresión:

$$\sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

b) Expresando el radical como una fracción:

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$$

Simplificando la raíz cuadrada del denominador:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

C

Se conoce como **simplificar** una raíz cuadrada a expresarla con un radicando menor que el inicial.
Y se dice **simplificar a la mínima expresión** una raíz cuadrada cuando se simplifica el radicando al menor valor posible. **Si a, $b \geq 0$ entonces $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.**

Por ejemplo, simplificar $\sqrt{90}$ a su mínima expresión.

Utilizando la descomposición prima de 90:

$$\sqrt{90} = \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$$

Observa:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Y la simplificación de $\sqrt{90}$ a su mínima expresión es $3\sqrt{10}$, porque ya no se puede reducir el radicando.
Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe simplificar el resultado a la mínima expresión.

E

Simplifica el número $-\sqrt{396}$ a su mínima expresión.

Utilizando la descomposición prima de 396:

$$-\sqrt{396} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 11} = -\sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{11} = -2 \times 3 \times \sqrt{11} = -6\sqrt{11}$$

Observa:

396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

Y como ya no se puede reducir el radicando, la simplificación a la mínima expresión de $-\sqrt{396}$ es: $-6\sqrt{11}$

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18}$ b) $-\sqrt{\frac{6}{25}}$ c) $\sqrt{27}$ d) $-\sqrt{200}$ e) $-\sqrt{\frac{5}{81}}$

2. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

a) $\sqrt{252}$ b) $-\sqrt{450}$ c) $\sqrt{405}$

2.6 Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación

P

Realiza la multiplicación $\sqrt{28} \times \sqrt{18}$

S

Se puede simplificar antes de operar.

$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

Entonces:

$$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{2}$$
$$= 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{14}$$

Se puede multiplicar desde el inicio.

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = \sqrt{28 \times 18}$

Luego, se expresa como factores primos:

$\sqrt{28 \times 18} = \sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2}$

Y se simplifica:

$$\sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2} = 2 \times 3 \times \sqrt{7 \times 2}$$
$$= 6\sqrt{14}$$

Observa que para evitar cálculos grandes se evita hacer la multiplicación 28×18.

C

Para multiplicar raíces cuadradas con números grandes como radicando se puede hacer lo siguiente:

1. Se simplifica cada raíz cuadrada si es posible.
2. Se multiplican las raíces ya simplificadas.
3. Se simplifica si es posible.

Por ejemplo: $\sqrt{20} \times \sqrt{90}$

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
2. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} = 6\sqrt{50}$
3. $6\sqrt{50} = 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

E

Realiza la multiplicación $-\sqrt{98} \times \sqrt{80}$.

Cuando los radicandos son muy grandes, se factoriza en primos antes de multiplicar.

$$-\sqrt{98} \times \sqrt{80} = -\sqrt{98 \times 80} = -\sqrt{2 \times 7^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5}$$
$$= -7 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2 \times 5}$$
$$= -28\sqrt{10}$$

Observa:

98	2
49	7
7	7
1	

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{12}$ b) $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$ c) $\sqrt{18} \times (-\sqrt{50})$ d) $(-\sqrt{27}) \times (-\sqrt{32})$

e) $\sqrt{10} \times \sqrt{14}$ f) $\sqrt{8} \times \sqrt{6}$ g) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{15})$ h) $\sqrt{96} \times (-\sqrt{20})$

2.7 Racionalización de denominadores

P

Encuentra una fracción equivalente que no tenga raíz cuadrada en el denominador para $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

S

Considerando la fracción equivalente: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Realizando la multiplicación: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Al multiplicar y dividir una fracción por un mismo número se obtiene una fracción equivalente, es decir, que representa la misma cantidad. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

Comprobando los valores de cada expresión en la calculadora.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106...$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$

Observa que esta expresión en la que se simplifica la raíz cuadrada del denominador es mucho más fácil de insertar en la calculadora y también para hacer operaciones de fracciones, porque así el denominador es entero.

C

El proceso en el cuál se encuentra una fracción equivalente sin raíces cuadradas en el denominador de una fracción se llama: **racionalización de denominadores.**

Para racionalizar el denominador de una fracción $\frac{b}{\sqrt{a}}$ donde $a > 0$ se siguen los pasos:

1. Se multiplica por la fracción $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. Se realiza la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Por ejemplo, racionaliza $\frac{3}{\sqrt{6}}$:

1. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe racionalizar los radicales del denominador.

E

Racionaliza los siguientes números: a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$.

a) 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) Se simplifica $\sqrt{12} : \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1. $-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

2. $-\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5 \times 3}}{2 \times 3}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{6}$

Racionaliza los siguientes números.

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{8}{\sqrt{20}}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{7}{\sqrt{21}}$ g) $-\frac{12}{\sqrt{18}}$ h) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$

2.8 Suma y resta de raíces cuadradas

P

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

S

a) Tomando $a = \sqrt{3}$: $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7a + 2a = 9a = 9\sqrt{3}$

b) Tomando $a = \sqrt{3}$: $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7a - 2a = 5a = 5\sqrt{3}$

$7a = a + a + a + a + a + a + a.$

$2a = a + a.$

C

Para sumar y restar raíces cuadradas, se suman y restan los coeficientes de las raíces cuadradas que tienen igual radicando.

Ejemplos: a) $6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ | b) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Identificando los números que tienen igual radicando:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Sumando y restando los coeficientes de las raíces con igual radicando:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + (5 - 3)\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = (3 + 2)\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

Por lo tanto:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + 2\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

Observa:

$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$

$1.41... + 1.73... \neq 2.23...$

No se puede expresar $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ de forma más simple.

Ten cuidado para sumar $\sqrt{a} + \sqrt{a}$, **no** es $\sqrt{a + a} = \sqrt{2a}$, es igual a: $2\sqrt{a}$.

Ten cuidado

Multiplicando: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Sumando: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{6} + 7\sqrt{6} + 8$

e) $2\sqrt{2} - 6 - 7\sqrt{2}$ f) $9\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$ g) $7\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$ h) $5\sqrt{7} - 4\sqrt{3} - 8\sqrt{7}$

2.9 Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación y racionalización

P

Efectúa las siguientes operaciones: a) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$ b) $\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}}$.

S

a) Simplificando cada raíz cuadrada:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Y sumando las raíces cuadradas:

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$
$$= (3 - 4 + 5)\sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

b) Simplificando una raíz cuadrada y racionalizando la otra:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Y restando las raíces cuadradas:

$$\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$
$$= 0$$

A las raíces cuadradas con igual radicando se les conoce como **raíces semejantes.**

C

Para sumar y restar raíces cuadradas con radicandos diferentes:

1. Se simplifican los términos a su mínima expresión.
2. Se racionaliza las raíces que sean posibles.
3. Se efectúan las sumas y restas con raíces semejantes.

Por ejemplo: $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{30}{\sqrt{5}}$.

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

2. $\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30}{5}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

3. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{30}{\sqrt{5}}$

   $= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{27}$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{27}$

d) $\sqrt{12} + \frac{3}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{63} + \frac{28}{\sqrt{7}}$

f) $\sqrt{72} - \frac{8}{\sqrt{2}}$

g) $\sqrt{28} + \sqrt{7} + \frac{35}{\sqrt{7}}$

h) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \frac{18}{\sqrt{2}}$

i) $\sqrt{75} - \sqrt{12} - \frac{3}{\sqrt{3}}$

2.10 Operaciones combinadas de raíces cuadradas, parte 1

P

Efectúa la operación $\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5)$.

S

Tomando $\sqrt{3} = a$:

Se puede aplicar la propiedad distributiva:

La propiedad distributiva cumple que:
$a\,(b + c) = ab + ac.$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 5) = a\,(a + 5) = a^2 + 5a$$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 5) = (\sqrt{3})^2 + 5\,(\sqrt{3})$$

$$= 3 + 5\sqrt{3}$$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se cumple para números reales y en particular para raíces cuadradas.

Para 3 números reales a, b, c se cumple que $a\,(b + c) = ab + ac$.

Por ejemplo: $\sqrt{5}\,(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = \sqrt{5}\,(\sqrt{6}) + (\sqrt{5})^2$

$$= \sqrt{30} + 5$$

E

Efectúa la operación $\sqrt{5}\,(\sqrt{45} + 7)$.

Se simplifica $\sqrt{45}$: $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Entonces: $\sqrt{5}\,(\sqrt{45} + 7) = \sqrt{5}\,(3\sqrt{5} + 7) = 3 \times (\sqrt{5})^2 + 7\,(\sqrt{5}) = 3 \times 5 + 7\sqrt{5} = 15 + 7\sqrt{5}$.

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

Revisa si se simplifica antes de calcular.

a) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7} + 6)$

b) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 3)$

c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{45} + 3)$

d) $\sqrt{6}\,(\sqrt{24} + 9)$

e) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75} - 4)$

f) $\sqrt{5}\,(\sqrt{20} - 6)$

g) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7} + \sqrt{3})$

h) $\sqrt{2}\,(\sqrt{18} + \sqrt{48})$

2.11 Operaciones combinadas de raíces cuadradas, parte 2

P

Efectúa la operación $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)$.

S

Desarrollando la multiplicación:

$$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1) = \sqrt{5}(\sqrt{2}) + \sqrt{5}(1) + 3(\sqrt{2}) + 3(1)$$

$$= \sqrt{10} + \sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 3$$

Para operar $(a+b)(c+d)$ se efectúa así:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se cumple para números reales y en particular para raíces cuadradas, también en el caso $(a+b)(c+d)$.

Para 4 números reales a, b, c, d se cumple que $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

Por ejemplo: $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{7}(\sqrt{2}) + \sqrt{7}(\sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{2}) + (\sqrt{3})^2$$

$$= \sqrt{14} + \sqrt{21} + \sqrt{6} + 3$$

E

Efectúa la operación $(\sqrt{2}+1)^2$.

Aplicando los productos notables:

$$(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(1) + (1)^2$$

$$= 2 + 2\sqrt{2} + 1$$

$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

Desarrollo del producto notable:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas. Simplifica las respuestas a su mínima expresión.

a) $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}-4)$

b) $(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}+4)$

c) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-7)$

d) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

e) $(\sqrt{5}+6)^2$

f) $(\sqrt{3}-2)^2$

g) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$

h) $(\sqrt{6}-4)(\sqrt{2}-2)$

i) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

2.12 Practica lo aprendido

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a) $\sqrt{121} = 11$ entonces $\sqrt{12.1} = 1.1$. [ ]

   b) Al realizar la división $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ se obtiene un número racional. [ ]

   c) El resultado de efectuar $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ es $2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. [ ]

   d) El resultado de efectuar $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$. [ ]

   e) Al racionalizar el número $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ se obtiene el número $\sqrt{2}$. [ ]

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$ b) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{10}$ c) $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{14})$

3. Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{5} \div \sqrt{7}$ b) $\sqrt{6} \div (-\sqrt{14})$ c) $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{24})$

4. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

   a) $\sqrt{900}$ b) $-\sqrt{\frac{400}{81}}$

5. Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número.

   a) $2\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

2.13 Practica lo aprendido

1. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

   a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{\frac{11}{64}}$ c) $\sqrt{405}$

2. Efectúa las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{45} \times \sqrt{28}$ b) $\sqrt{30} \times \sqrt{21}$

3. Racionaliza las siguientes raíces cuadradas.

   a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{30}{\sqrt{5}}$

4. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas.

   a) $6\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$ b) $13\sqrt{5} - 7 - 8\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$

   d) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$ e) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ f) $\sqrt{98} - \frac{20}{\sqrt{2}}$

5. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 6)$ b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75} - 8)$ c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})$

   d) $(\sqrt{3} - 7)(\sqrt{3} - 5)$ e) $(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})$ f) $(\sqrt{5} - 4)^2$

2.14 Resolución de problemas con números reales

P

En la escuela de Mario se han destinado \$225 para comprar las camisas de la promoción. Si el número de camisas coincide con el precio de cada una de ellas, ¿cuánto es el costo de cada camisa?

S

- Si fueran 3 camisas, cada camisa debería costar \$3 y se gastarían \$9 en total.
- Si fueran 10 camisas, cada camisa debería costar \$10 y se gastarían \$100 en total.

En general, tomando a como el costo de cada camisa.
El problema menciona que el número de camisas coincide con el precio de ellas.

Entonces, se compraron a camisas a un precio de a dólares.
Y como el gasto total es \$225, se cumple que $a^2 = 225$.

Por lo tanto, el costo de cada camisa es: $\sqrt{225}$.
Descomponiendo en factores primos: $\sqrt{3^2 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15$.

Recuerda que $\sqrt{225}$ significa el número positivo que elevado al cuadrado da 225.

El costo de cada camisa es de **\$15**.

C

Para resolver una situación problemática se siguen los pasos:

1. Identificar la información que brinda el problema.

2. Si es posible realizar un esquema de la situación del problema.

3. Buscar un método de solución para el problema.

4. Brindar la respuesta al problema planteado.

5. Verificar si la respuesta satisface todas las condiciones del problema.

1. En la escuela de Carmen gastarán \$144 para comprar los uniformes de los intramuros, si el número de uniformes coincide con el precio de cada uno de ellos, ¿cuánto es el costo de cada uniforme?

2. Un tablero de ajedrez es cuadrado y tiene 64 cuadritos, ¿cuántos cuadritos tiene cada lado del tablero?

3. Se enladrillará un terreno cuadrado con baldosas cuadradas de 0.25 m cada una, ¿cuántas baldosas hay que comprar si el terreno tiene un área de 25 m^2?

2.15 Practica lo aprendido

1. Determina los números naturales que puede representar "a" para que se cumpla la siguiente relación:

$$3 < \sqrt{a} < 4$$

2. Aproxima los siguientes números tomando en cuenta que $\sqrt{5} \approx 2.236$.

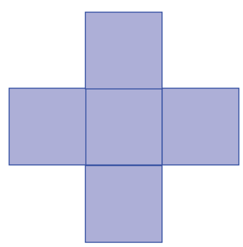
a) $\sqrt{20}$ b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{15}{\sqrt{5}}$

3. Considerando $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{7}$, determina el valor de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $(x + y)^2$ b) xy c) $x^2 - y^2$

4. Determina dos números que sumados dan 318 y la raíz cuadrada de uno es igual a la raíz cuadrada del otro aumentado en 20.

5. Determina el perímetro de la siguiente figura si tiene un área de 245 m^2. La figura está compuesta por cuadrados.



6. Se sembrarán 170 matas de frijol en dos bandejas cuadradas para cultivo de esquejes (retoños). Si uno de ellos tiene 7 divisiones por lado, ¿cuántas divisiones debe tener el otro recipiente?

7. Se deja caer un objeto de un edificio de 10 m de alto, ¿cuántos segundos después de haberlo soltado chocará contra el suelo si el tiempo viene dado por la expresión $t = \sqrt{\frac{10y}{49}}$? ($y$: altura de la que cae el objeto).

8. Don Juan quiere cercar su terreno cuadrado de 2 500 m^2 de área. Si cada metro cercado tiene un costo de $3.75, ¿cuánto será el costo total por cercar el terreno?

Ecuación Cuadrática

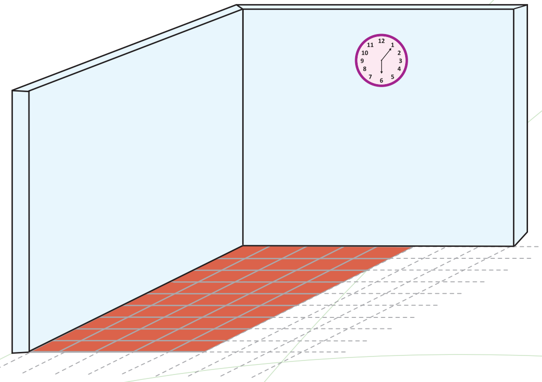
3 Unidad

Tablilla BM 13901 es uno de los textos matemáticos más antiguos se encuentra en el Museo Británico de Londres, Inglaterra, comprende 24 problemas y sus soluciones.

En matemática, el uso de símbolos no solamente se da en notaciones para números; el primer paso hacia el razonamiento simbólico se dio en el contexto de la solución de problemas. En la antigua Babilonia lo que se hacía era presentar información sobre una cantidad desconocida y luego se presentaba su valor; un ejemplo de esto se da en la Tablilla BM 13901, que data del siglo XVIII: "He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, obteniendo $6\frac{1}{4}$" a esto se le denominó "el método de falsa posición" que resulta ser el proceso de solución de la siguiente ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $c < 0$.

A pesar de que las soluciones de una ecuación cuadrática fueron conocidas por algunos matemáticos hindúes y árabes de forma verbal y a través de construcciones geométricas, fue por el matemático hindú Bhaskara nacido en el 1114 d. C., que se conoció la solución de este tipo de ecuaciones utilizando el álgebra simbólica.

Desde épocas muy remotas, muchos calculadores y prácticos utilizaban métodos que se apoyaban en las técnicas para medir tierras; en la actualidad, el algoritmo es utilizado para conocer la cantidad de materiales que se necesitarían en una construcción, en las finanzas para conocer el sueldo devengado por los trabajadores, también para conocer raciones de alimentos, reparto de herencias, entre otros.



Si se tiene una cantidad definida de ladrillos cuadrados y el área que se debe cubrir, se puede formular una ecuación cuadrática para identificar el tamaño de los ladrillos.

Con estos contenidos verás la importancia de resolver ecuaciones cuadráticas utilizando factorización y la fórmula cuadrática usando recursos geométricos. Además estudiarás si hay soluciones en una ecuación cuadrática y se plantearán ecuaciones cuadráticas para resolver problemas de aplicación.

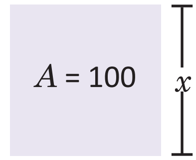
1.1 Sentido y definición de la ecuación cuadrática

P

Don Antonio tiene un terreno cuadrado para cultivar frijol, ¿cómo se puede determinar la medida de los lados del terreno si este tiene un área de 100 m^2?

S

Haciendo un esquema de la situación:



Utilizando x para simbolizar la longitud del lado.

El área del terreno es de 100 m^2, entonces se puede plantear la ecuación:

$$x^2 = 100$$

El área del cuadrado es:
$$A = L^2$$
Donde L es la longitud del lado al cuadrado.

Para determinar la medida de los lados del terreno hay que resolver esta ecuación.

C

La ecuación planteada en el problema es $x^2 = 100$, si se transpone el 100, también se puede expresar como $x^2 - 100 = 0$, en la cual la incógnita está elevada al cuadrado. Este tipo de ecuaciones son llamadas **ecuaciones cuadráticas.**

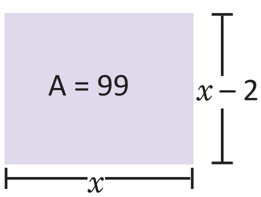
En general, se define ecuación cuadrática como las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; con a, b, c números reales y $a \neq 0$.

Transponer en una ecuación significa pasar de un miembro de la ecuación al otro.

Por ejemplo: $2x^2 - 3 = 0$, $9x^2 - 3 = 0$, $(x + 5)^2 - 16 = 0$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 + 4x = 0$, etc.

E

Don Miguel tiene un terreno rectangular cuyo largo tiene 2 m más que el ancho y su área es de 99 m^2. Determina la ecuación que simboliza el problema representando con x la medida del largo.

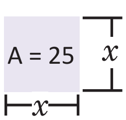


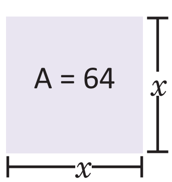
Aplicando el área del rectángulo ($A = base \times altura$). $x(x - 2) = 99$

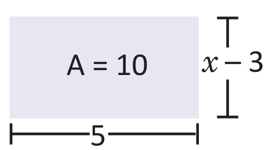
Desarrollando el producto: $x^2 - 2x = 99$

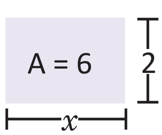
Transponiendo el 99: $x^2 - 2x - 99 = 0$

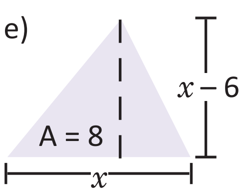
1. Encuentra la ecuación que determina la longitud desconocida en cada figura.

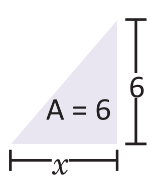
a)


b)


c)


d)


e)


f)


También se puede plantear el mismo problema con un triángulo, se debe tener presente que el área del triángulo es:
$$A = \frac{base \times altura}{2}$$

2. Determina cuáles de las ecuaciones planteadas en el ejercicio anterior son cuadráticas.
3. Determina la ecuación para encontrar dos números enteros consecutivos que al multiplicarlos resulten 42.

1.2 Soluciones de la ecuación cuadrática

P

Determina cuáles de los números, –4, –3, 3, 4, son soluciones de las ecuaciones.

a) $3x = 12$ b) $x^2 - x - 12 = 0$

S

Utilizando –4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(-4) = -12$ b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$

–4 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando –3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(-3) = -9$ b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$

–3 no es solución de la ecuación a), pero si es solución de la ecuación b).

Utilizando 3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(3) = 9$ b) $(3)^2 - (3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6$

3 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando 4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.

a) $3(4) = 12$ b) $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

4 es solución de ambas ecuaciones.

Por lo tanto, la ecuación a) tiene una solución (4), y la ecuación b) tiene dos soluciones (4 y –3).

C

Los valores de la incógnita que cumplen una ecuación cuadrática se llaman **soluciones.**

El proceso de **resolver una ecuación cuadrática** consiste en encontrar todas las soluciones de ella. En la ecuación cuadrática pueden haber hasta dos soluciones.

Las ecuaciones lineales tienen solamente una solución.

1. Determina cuáles de los números en los paréntesis son soluciones de las ecuaciones.

a) $x^2 - 9 = 0$ (–3, –1, 1, 3) b) $2x - 6 = 0$ (–3, –1, 1, 3)

c) $x^2 - 2x - 8 = 0$ (–4, –2, 2, 4) d) $2x + 8 = 0$ (–4, –2, 2, 4)

e) $x^2 + 4x + 3 = 0$ (–3, –1, 1, 3) f) $4x + 12 = 0$ (–3, –1, 1, 3)

g) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (–4, –2, 2, 4) h) $x - 4 = 0$ (–3, –1, 1, 3)

2. Determina cuáles de las ecuaciones del numeral anterior son cuadráticas y cuáles lineales. Justifica la respuesta.

1.3 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$

P

Resuelve la ecuación cuadrática planteada en el problema de don Antonio de la primera clase.

$$x^2 = 100$$

S

Para resolver esta ecuación se puede utilizar la idea de las raíces cuadradas de un número.
Como $x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

Entonces: $x = \pm\sqrt{100}$.

Expresando sin el símbolo de radical, $x = \pm 10$.

Al elevar un número al cuadrado da el mismo resultado que elevar el negativo del número al cuadrado:

$$3^2 = (-3)^2 = 9$$

El problema de don Antonio era sobre la longitud de los lados del terreno, por lo que la solución negativa no se puede tomar en cuenta y por lo tanto, la solución del problema es: **10 m.**

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = c$ se siguen los pasos:

1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de c.

$$x = \pm\sqrt{c}$$

2. Se expresa el número sin el símbolo de radical, si es posible.

Por ejemplo: $x^2 = \frac{1}{4}$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

2. $x = \pm\frac{1}{2}$

E

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 20 = 0$.

Se transpone el número 20 en la ecuación $x^2 = 20$.

Se resuelve la ecuación $x^2 = 81$. 1. $x = \pm\sqrt{20}$ 2. $x = \pm 2\sqrt{5}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = \frac{1}{9}$ c) $x^2 = \frac{4}{9}$ d) $x^2 - 1 = 0$

e) $x^2 - 9 = 0$ f) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ g) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$ h) $\frac{4}{36} - x^2 = 0$

2. El hermano de Julia es 4 años mayor que ella y la hermana es 4 años menor, ¿qué edad tiene Julia si al multiplicar las edades de sus hermanos resulta 20?

1.4 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$

P

Marta y Mario juegan a "las adivinanzas", Marta le dice a Mario que ella está pensando un número que multiplicado con su triple da como resultado 12, ¿cómo puede determinar Mario el número que podría estar pensando Marta?

S

Representando por x el número que está pensando Marta.
Entonces el triple del número que está pensando Marta es representado por "$3x$".
Luego para representar que el número multiplicado con su triple es 12 , se plantea la siguiente ecuación: $x\,(3x) = 12$.

Multiplicando los términos: $3x^2 = 12$.

Despejando "x^2", $x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$.

Resolviendo la ecuación, $x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, el número que está pensando Marta podría ser: **+2 o –2**.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c,\ c \neq 0$ se siguen los pasos:

1. Se despeja el término x^2.

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de $\frac{c}{a}$.

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

3. Se expresa sin el símbolo de radical o se simplifica a la mínima expresión, cuando se pueda.

Observa que si el signo de a es diferente al signo de c entonces $\frac{a}{c}$ tiene signo negativo, entonces la ecuación no tendría solución en los números reales porque no están definidas las raíces cuadradas de un número negativo.

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $3x^2 - 2 = 0$

Se transpone el –2 en la ecuación: $3x^2 = 2$

Se resuelve la ecuación $3x^2 = 2$. 1. $x^2 = \frac{2}{3}$ 2. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Cuando hay un radical en el denominador debe racionalizarse.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 = 18$ b) $-4x^2 = -1$ c) $x^2 = 7$

d) $-4x^2 + 4 = 0$ e) $10 - 2x^2 = 0$ f) $-x^2 + 2 = 0$

Observa que las ecuaciones de la forma $x^2 = c$; son un caso especial de las de la forma $ax^2 = c$, cuando $a = 1$.

2. Encuentra las longitudes de una cancha de baloncesto, si el largo de la cancha es el doble de su ancho y tiene un área de 450 m^2.

1.5 Solución de ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$

P

Resuelve la ecuación cuadrática $(x + 1)^2 = 25$.

S

Para resolver esta ecuación se representará la parte dentro del paréntesis $x + 1$ por $w = x + 1$ luego se usa la idea de raíz cuadrada.

$w^2 = 25$ Sustituyendo $w = x + 1$,

$w = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x + 1 = \pm 5$ sustituyendo nuevamente $x + 1 = w$.

La estrategia de representar una parte de la ecuación por una letra diferente se conoce como **cambio de variable.**

Es decir, $x + 1 = 5$ y $x + 1 = -5$.

$x = 5 - 1 = 4$ y $x = -5 - 1 = -6$ despejando x.

Finalmente las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 = 25$ son: $\boldsymbol{x = 4}$ y $\boldsymbol{x = -6}$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + m)^2 = n$ se siguen los pasos:

1. Se cambia la variable $x + m$ por w:
   $w^2 = n$
2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = n$:
   $w = \pm\sqrt{n}$
3. Se sustituye a la variable inicial:
   $x + m = \pm\sqrt{n}$
4. Se resuelve para la variable inicial:
   $x = -m \pm\sqrt{n}$

Por ejemplo:

$(x - 3)^2 = 7$ Haciendo $w = x - 3$

1. $w^2 = 7$
2. $w = \pm\sqrt{7}$
3. $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
4. $x = 3 \pm\sqrt{7}$

Observa que
Si $n = 0$; la ecuación solo tiene una solución, $x = -$m.

Si n es negativo; la ecuación no tiene solución.

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 5)^2 - 12 = 0$.

Se transpone -12 en la ecuación: $(x - 5)^2 = 12$.

Se resuelve la ecuación $(x - 5)^2 = 12$.

1. $w^2 = 12$ 2. $w = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ 3. $x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$ 4. $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x + 4)^2 = 4$ b) $(x - 2)^2 = 2$ c) $(-x - 3)^2 = 8$ d) $(x + 2)^2 = 0$

e) $(x - 4)^2 - 16 = 0$ f) $(x + 3)^2 - 3 = 0$ g) $(-x + 6)^2 - 12 = 0$ h) $(1 - x)^2 = 0$

2. ¿Cuánto debe aumentar cada lado del terreno cuadrado de don Antonio si quiere cultivar 144 m² de frijol?

Recuerda que los lados del terreno de don Antonio medían 10 m cada uno, y se determinó en la clase 3 de esta lección.

1.6 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$

P

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$.

S

La siguiente propiedad se cumple para cualesquiera números reales A, B.

Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$

Además, la expresión $x^2 + 5x$ se puede factorizar sacando factor común x: $x^2 + 5x = 0$.

Y se tiene la ecuación: $x(x + 5) = 0$.

Se cumple que $x = 0$ o $x + 5 = 0$.

Resolviendo la ecuación lineal $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Y las soluciones para la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$ son: $\boldsymbol{x = 0}$ o $\boldsymbol{x = -5}$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando factor común:

$$x(x + b) = 0$$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + b = 0$$

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo la ecuación lineal $x + b = 0$.

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$.

E

¿Cómo se resuelve la ecuación $ax^2 + bx = 0$? Por ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$.

Se factoriza $x(a + bx) = 0$ y luego se encuentran las soluciones.

1. $x(3x + 2) = 0$
2. $x = 0$ o $3x + 2 = 0$
3. $x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $3x^2 + 5x = 0$

d) $4x^2 - x = 0$

e) $-x^2 + x = 0$

f) $-x^2 - 2x = 0$

g) $2x^2 + 8x = 0$

h) $-3x^2 + 6x = 0$

1.7 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

P

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 4x + 4 = 0$.

S

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$.

El trinomio cuadrado perfecto se factoriza:
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

Entonces:

$$x + 2 = 0$$
$$\boldsymbol{x = -2}$$

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando el trinomio cuadrado perfecto:
   $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio de la clase 6 y se determina la ecuación lineal a resolver $x + a = 0$.

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática:
   $\boldsymbol{x = -a}$

E

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

1. $4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$ Tomando $w = 2x$,

2. $(w + 1)^2 = (2x + 1)^2 = 0$ sustituyendo nuevamente $2x = w$,

3. $2x + 1 = 0$.

   $x = -\frac{1}{2}$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$

e) $y^2 - 10y + 25 = 0$

f) $y^2 + 14y + 49 = 0$

1.8 Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$

P

Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 2)(x - 3) = 0$.

S

Se tiene $\underbrace{(x-2)}_{A} \times \underbrace{(x-3)}_{B} = 0$ se debe cumplir que

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones lineales:

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Para cualesquiera números reales A, B se cumple que Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x - a)(x - b) = 0$ se siguen los pasos:

1. Se aplica la propiedad y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:
   $x - a = 0$ o $x - b = 0$

2. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo las ecuaciones lineales:
   $x = a$ o $x = b$

Por ejemplo: $(x + 1)(x - 4) = 0$

1. $x + 1 = 0$ o $x - 4 = 0$

2. $x = -1$ o $x = 4$

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

En este caso primero se factoriza la expresión buscando el producto notable correspondiente, 2 números que multiplicados dan 6 y sumados 5, son 3 y 2.

Resolviendo: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

1. $x + 3 = 0$ o $x + 2 = 0$

2. $x = -3$ o $x = -2$

Las expresiones de la forma:
$$x^2 + (a + b)x + ab = 0$$
se factorizan de la siguiente manera:
$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)(x + b).$$

---

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

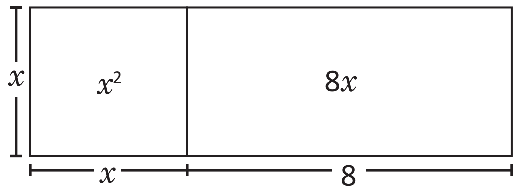
a) $(x - 2)(x - 1) = 0$ b) $(x + 5)(x - 3) = 0$ c) $(x - 7)(x + 2) = 0$ d) $(x + 4)(x + 3) = 0$

e) $x^2 - 7x + 6 = 0$ f) $x^2 - 2x - 8 = 0$ g) $x^2 + x - 6 = 0$ h) $x^2 - 4x + 3 = 0$

2. Encuentra dos números consecutivos que al elevarlos al cuadrado y luego sumarlos, dé como resultado 25.

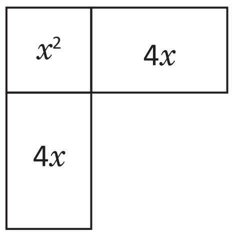
1.9 Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas

El área de la figura es 33 cm². Encuentra la medida del lado x utilizando una justificación geométrica.

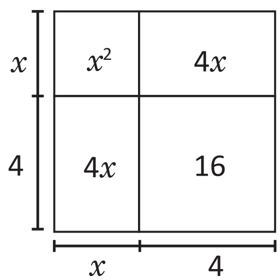


Puedes pensar en recortar y adecuar las piezas de modo conveniente.

1. Dividiendo el rectángulo en dos partes iguales y girando 90° una de esas partes.



2. Completando el cuadrado de lado 4.



3. El área de la figura inicial es 33 cm², si se agrega un cuadrado de lado 4, el área de la figura anterior es 49 cm².

Por tanto, el lado x debe tomar el valor de 3 cm, ya que **(7 cm)² = 49 cm²**.

Solución algebraica:

$x^2 + 8x = 33$

1. $x^2 + 4x + 4x = 33$

2. $x^2 + 2(4x) + 4^2 = 33 + 4^2$

3. $(x + 4)^2 = 49$

Solución: $x = 3$

Se pueden utilizar argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática.

Las ecuaciones cuadráticas tienen hasta dos soluciones, pero dado que se trata del lado de una figura solo se considera la positiva.

Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x = 8$

b) $x^2 + 10x = 56$

c) $x^2 + 6x = 27$

1.10 Solución de ecuaciones completando cuadrados

P

Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 8x - 20 = 0$.

S

Para resolver se puede transformar a la forma $(x + m)^2 = n$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Se transpone el –20: $x^2 + 8x = 20$.

Sumando un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

Simplificando las fracciones y haciendo algunos cálculos se tendrá la ecuación: $x^2 + 8x + 16 = 36$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio la expresión es la siguiente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Y el término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Dado que la expresión del miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, la ecuación puede ser expresada como $(x + 4)^2 = 36$.

Resolviendo esta ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$: $x + 4 = \pm 6 \Rightarrow x + 4 = 6$ o $x + 4 = -6$.

Por lo tanto, las soluciones son: $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{x = -10}$.

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se siguen los pasos:

Por ejemplo: $x^2 + 2x - 1 = 0$

1. Se pasa el término c al miembro derecho.
   1. $x^2 + 2x = 1$
2. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.
   2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos.
   3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.
   4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Soluciones. $x = -1 + \sqrt{2}$ o $x = -1 - \sqrt{2}$

A la solución de ecuaciones cuadráticas utilizando este procedimiento se le conoce como solución por **complemento de cuadrados**.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$ b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 8x + 16 = 0$

e) $x^2 + 2x - 2 = 0$ f) $x^2 - 4x + 2 = 0$ g) $x^2 + 5x + 5 = 0$ h) $x^2 + x - 1 = 0$

1.11 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

P

Para resolver la siguiente ecuación sigue los pasos a), b), c).

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

a) Divide la ecuación por el coeficiente de x^2 y pasa el termino constante al lado derecho de la ecuación.
b) Suma por un numero conveniente y completa cuadrados.
c) Despeja la variable x.

S

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ Dividiendo por 3.

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumando por un número conveniente.

$(x + \frac{5}{6})^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ Completando cuadrados.

c) $(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{25-12}{36}$ Sumando las fracciones de la derecha.

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ Despejando x.

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden seguir los pasos:

1. Se divide la ecuación por el coeficiente a de x^2.
2. Se pasa el término constante al miembro derecho.
3. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo, sea un trinomio cuadrado perfecto.
4. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos necesarios.
5. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$

1.12 Fórmula general de la ecuación cuadrática

P

Encuentra la fórmula para resolver la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

S

Para resolver se puede dividir por "a" para transformar a la forma $x^2 + bx + c = 0$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Ahora se procederá resolviendo la ecuación cuadrática:

Primero se divide entre el coeficiente de x^2 ambos lados de la ecuación, para que el coeficiente sea 1.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego se transpone $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completan cuadrados perfectos.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se hacen los cálculos.

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Se hacen los cálculos al lado derecho de la ecuación.

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se resuelve la ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la fórmula a la que se llegó al final de la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general de la ecuación cuadrática.** Y para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática se sustituyen los valores de a, b, c en la fórmula.

Por ejemplo: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Si se sustituye $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ en la fórmula general, se verifica que

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$ b) $-4x^2 - x + 1 = 0$ c) $x^2 + 3x - 9 = 0$ d) $-4x^2 + 5x + 5 = 0$

1.13 Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática

P

Resuelve las ecuaciones utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

S

Sustituyendo en la fórmula general:

a) $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm 1\sqrt{5})}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

Es necesario simplificar

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ o } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

b) $a = 3,\ b = 5,\ c = -2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

Es necesario calcular las raíces cuadradas de 49

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{6} \qquad x = \frac{-5 - 7}{6}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ o } x = -2$$

Se calculan las dos soluciones

C

Para aplicar la fórmula general de la ecuación cuadrática solamente se identifican los valores de a, b, c en la ecuación cuadrática; al calcular las soluciones es posible que sea necesario simplificar o expresar las raíces como números racionales (cuando sea posible, determinar las raíces cuadradas del radicando).

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

e) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

f) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

g) $4x^2 + 6x + 1 = 0$

h) $-2x^2 + 2x + 1 = 0$

1.14 Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

P

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ usando factorización, fórmula general y completando cuadrados, ¿coinciden las soluciones? Escribe en el cuaderno tu opinión sobre cada método.

S

Factorización

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x + 4)(x + 3) = 0$$

$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = -3$$

Fórmula general

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -4$$

Completando cuadrados

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x^2 + 7x = -12$$

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-48 + 49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \quad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -4$$

Observa que en este caso resultó más sencillo y práctico aplicar el método de factorización; además, el método de la fórmula cuadrática conlleva un poco más de cálculo, pero es aplicable a todos los casos; finalmente, el método completando cuadrados, para este caso resultó complejo, pero hay casos en que puede resultar más sencillo.

C

Para escoger el método más eficiente de resolver ecuaciones cuadráticas se puede:

1. Resolver usando factorización.
2. Si no es posible encontrar una factorización se puede aplicar alguno de los otros dos métodos.

La fórmula general es aplicable en todos los casos pero en ocasiones puede conllevar un cálculo más complejo que si se utiliza otro método.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

b) $4x^2 - 16 = 0$

c) $(6 - x)^2 - 1 = 0$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$

f) $5x^2 + 10x = 0$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$

h) $5x^2 - 11x + 2 = 0$

1.15 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando los métodos vistos en clase:

Forma $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$ b) $-9x^2 = -1$ c) $3x^2 - 27 = 0$ d) $21 - 3x^2 = 0$ e) $-x^2 - 3 = 0$

Forma $(x + m)^2 = n$.

a) $(x + 1)^2 = 9$ b) $(-x + 2)^2 = 3$ c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$ d) $(-3 - x)^2 = 0$ e) $(5 - x)^2 + 3 = 0$

Forma $x^2 + \mathrm{b}x + c = 0$ (Completa cuadrados perfectos).

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ b) $x^2 + 4x - 12 = 0$ c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ e) $x^2 - 8x + 12 = 0$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$ g) $x^2 + 2x + 4 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ j) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general:

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ b) $4x^2 + 17x - 15 = 0$ c) $12x^2 - 13x + 3 = 0$ d) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

e) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ f) $4x^2 - 7x + 2 = 0$ g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$ h) $x^2 - 4x - 1 = 0$

1.16 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

Forma $x^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 7x = 0$ b) $2x^2 - x = 0$ c) $x^2 + 3x = 0$ d) $4x^2 + 12x = 0$

Forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ c) $16x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

Forma $(x + a)(x + b) = 0$.

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$ b) $(x - 3)(x + 2) = 0$ c) $(x + 5)(x - 7) = 0$ d) $(x + 2)(x + 4) = 0$

Forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ b) $x^2 - 2x - 24 = 0$ c) $x^2 + 7x - 18 = 0$ d) $x^2 - 11x + 28 = 0$

2. Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 6x = 7$ b) $x^2 + 10x = 11$ c) $x^2 + 8x = 9$

2.1 Discriminante de la ecuación cuadrática

P

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general. Observa el valor del radicando.

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $2x^2 + x + 1 = 0$

S

a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$

$= \frac{-3 \pm 1}{4}$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ y $\boldsymbol{x = -1}$

El radicando es mayor que cero y hay dos soluciones.

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8}$

$= \frac{\cancel{-4}^{\,-1}}{\cancel{8}_{\,2}} = -\frac{1}{2}$

El radicando es cero y la solución es única.

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

Observa que no se han definido las raíces cuadradas de números negativos, entonces $\pm\sqrt{-7}$ no son números reales.

El radicando es menor que cero y no hay solución en los números reales.

C

El radicando de la fórmula general que viene dado por la expresión $b^2 - 4ac$ es llamado **el discriminante** de la ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow \text{Discriminante}$$

Observa que el discriminante puede cumplir cualquiera de los siguientes tres casos:

a) $b^2 - 4ac > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones**.

b) $b^2 - 4ac = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene solo **una solución**.

El discriminante es cero porque la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto.

c) $b^2 - 4ac < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática **no tiene solución en los números reales.**

1. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones, comparando el valor del discriminante con cero.

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$ b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ d) $x^2 - 2x = 0$

e) $x^2 + 1 = 0$ f) $5x^2 - 9x + 1 = 0$ g) $4x^2 - 9 = 0$ h) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

2. Determina cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.

Unidad 3

2.2 Uso del discriminante en resolución de problemas

P

Muestra que no existen dos números reales tales que su suma sea 4 y su producto sea 5.

S

Sean x y y los dos números. Debe cumplirse que $x + y = 4$ y además $xy = 5$.

Tomando la primera ecuación:

$x + y = 4$	
$x^2 + xy = 4x$	Multiplicando por x en ambos lados,
$x^2 + 5 = 4x$	dado que $xy = 5$,
$x^2 - 4x + 5 = 0$	trasladando y ordenando los terminos en el lado izquierdo.

Analizando el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$(-4)^2 - 4(1)(5) < 0$$

Discriminante de una ecuación cuadrática: $b^2 - 4ac < 0$.

Entonces, no existen soluciones en los números reales para esta ecuación cuadrática. Por tanto, no existen números reales tales que la suma sea 4 y multiplicados den 5.

C

Se puede utilizar el discriminante de una ecuación cuadrática para resolver diversos problemas. Se plantea la ecuación cuadrática y se analizan sus soluciones. En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) $b^2 - 4ac > 0$	Existen dos soluciones reales.
b) $b^2 - 4ac = 0$	Existe una solución real.
c) $b^2 - 4ac < 0$	No existen soluciones reales.

1. La suma de dos números es 4 y al multiplicarlos el resultado es c. Qué valores debe tomar c de forma que
   a) La ecuación tenga dos soluciones reales.
   b) La ecuación tenga una solución real.
   c) La ecuación no tenga soluciones reales.

2. Una persona asegura que su casa tiene forma rectangular y que el perímetro de la misma es de 18 m y que además, su área es de 21 m^2. Demuestra que la persona estaba mintiendo.

3. Don José tiene un terreno rectangular de 700 m^2 de área, ¿puede cercar el terreno utilizando 100 m de alambre?

2.3 Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas

Don Juan construirá su casa en un terreno rectangular de 72 m^2 de área y 36 m de perímetro. Para solicitar los permisos de construcción le piden las dimensiones del terreno, ¿cómo se podría determinar las dimensiones del terreno con esta información?

Si se representa el largo del terreno por x, ¿cómo se representa el ancho usando x?

Como la suma del largo y el ancho es igual a la mitad del perímetro $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$, entonces el ancho es "$18 - x$".

Planteando la ecuación y utilizando el valor de área $x\,(18 - x) = 72$.

Desarrollando: $-x^2 + 18x = 72 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 18x + 72$.

Utilizando factorización: $x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 12)(x - 6) = 0$.

Entonces: $x - 12 = 0$ o $x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$ o $x = 6$.

Como x representa el lado más largo: $x = 12$.

Entonces, el ancho del terreno de don Juan es 6.

Por lo tanto, las dimensiones del terreno de don Juan son: **12 m de largo** y **6 m de ancho.**

Para resolver una situación problemática, en general, se pueden seguir los pasos:

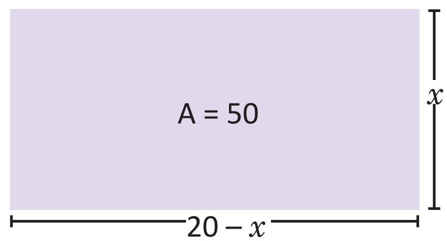
1. Si es posible, realizar un esquema de la situación del problema.
2. Se identifica la información que brinda el problema y se define qué cantidad representa la incógnita.
3. Se representan todas las cantidades con la misma incógnita.
4. Se plantea la ecuación cuadrática que hay que resolver (establecer la igualdad).
5. Se resuelve la ecuación cuadrática.
6. Se analizan si las soluciones son adecuadas al problema.

1. Se construirá una casa en un terreno de 28 m de perímetro y 48 m^2 de área, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

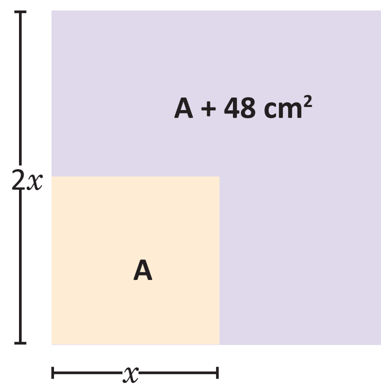
2. La distancia en km recorrida por un avión está dada por la ecuación $x = 140t + 3t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en horas después del despegue. Determina cuánto dura un viaje en este avión desde El Salvador hasta Costa Rica si la distancia entre estos países es aproximadamente de 775 km.

2.4 Practica lo aprendido

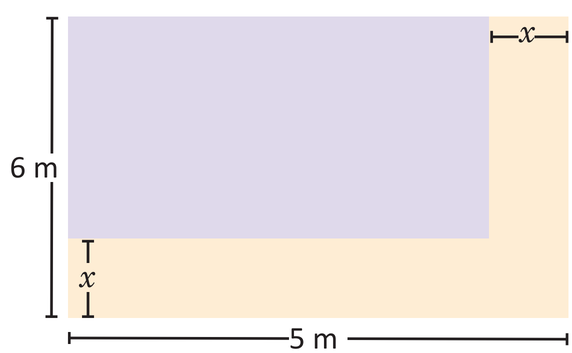
1. Encuentra las dimensiones del siguiente rectángulo.



2. Si se duplica el lado de un cuadrado su área aumenta en 48 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



3. En la figura, el área del rectángulo sombreado de morado es de 12 cm^2, encuentra el valor de x.

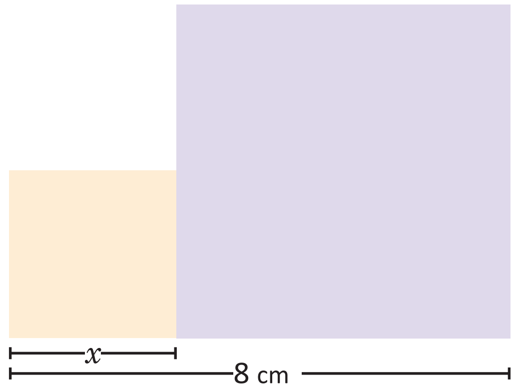


4. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 25.

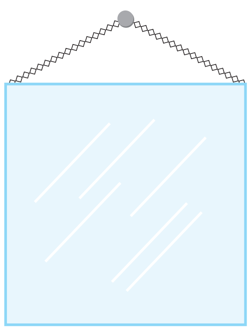
5. Se construirá una casa en un terreno de 30 m de perímetro y 54 m^2 de área. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

2.5 Practica lo aprendido

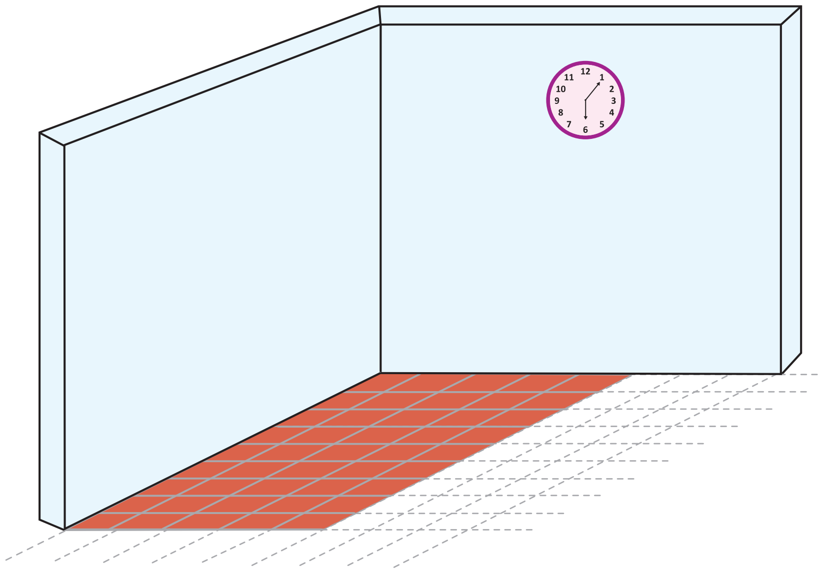
1. La siguiente figura está compuesta por dos cuadrados. ¿Cuánto valen los lados de ambos cuadrados si las dos áreas suman 34 cm^2?



2. Ana hará un marco de madera para un espejo cuadrado de 400 cm^2 de área. ¿Qué dimensiones tienen los lados del espejo?



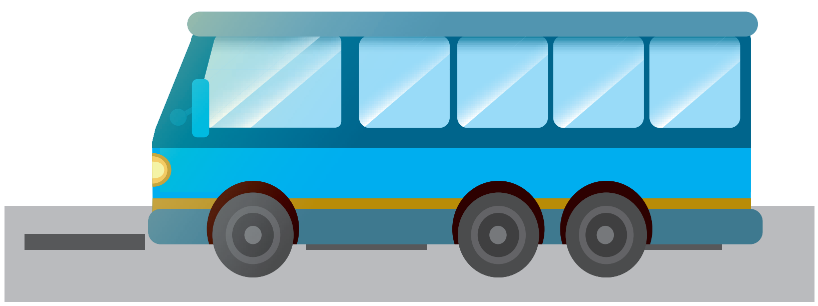
3. Se utilizaron 240 ladrillos cuadrados para poner el piso de una casa de 60 m^2 de área. Determina el tamaño de los ladrillos que se usaron.



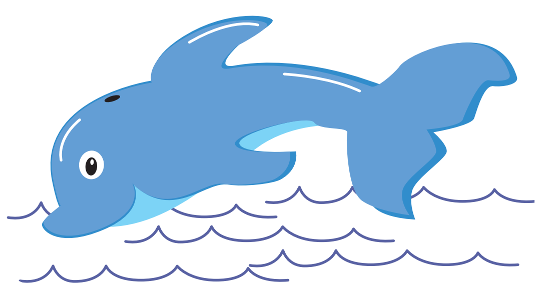
Unidad 3

4. Ana compra 5 bolsitas con 5 chibolas cada una, y la señora de la tienda donde las compra le dijo que por cada bolsita extra que le comprara le aumentaría una chibola a cada bolsita, ¿cuántas bolsitas tiene que comprar Ana para obtener 64 chibolas?

5. Mario es conductor de un bus y sabe que si cobra \$0.40 de pasaje se sube un promedio de 90 personas por viaje, si por cada centavo de pasaje que aumente se subirá una persona menos, ¿cuánto debe aumentar Mario al pasaje para obtener \$42 al finalizar el viaje?



6. La altura sobre el nivel del mar que lleva un delfín al salir del agua está dada por la ecuación $h = 7t - 5t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en segundos después que sale del agua. ¿Cuánto tiempo estará fuera del agua el delfín?

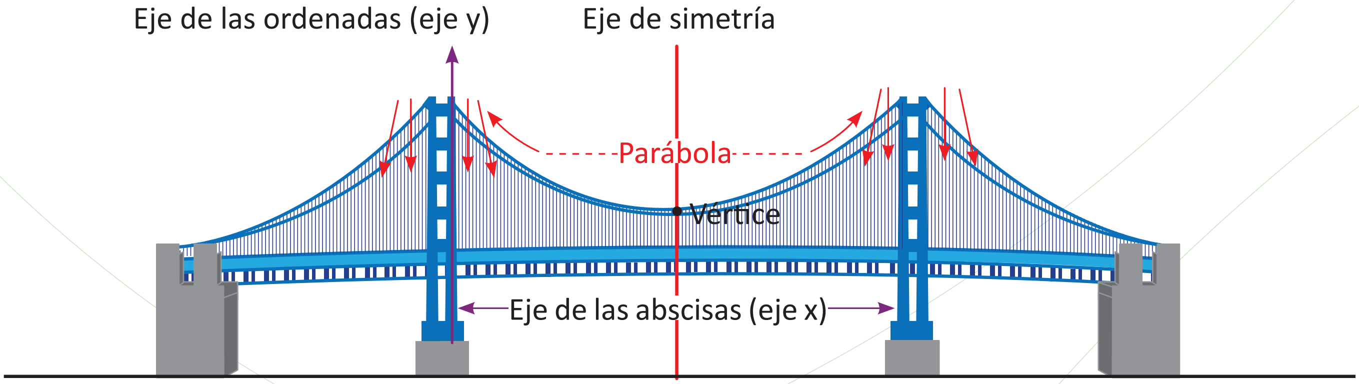


Unidad 4

Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$

En el siglo XVI, comenzaron a introducirse los símbolos que hoy se utilizan en el planteamiento de ecuaciones. Uno de los matemáticos que mayor influencia tuvo en este cambio favorable para el desarrollo del Álgebra, fue el francés François Viète (1540-1603), con el uso de símbolos para expresar la incógnita y los coeficientes de una ecuación, facilitando el estudio de ecuaciones de grado 2, 3 y 4, que a partir de la edad moderna se les comenzó a llamar "funciones".

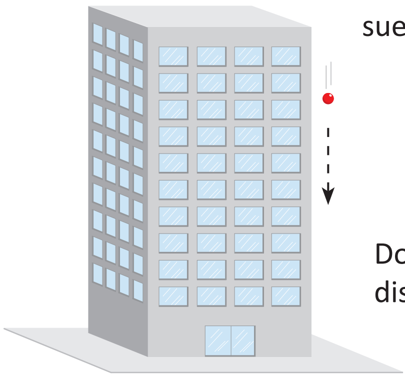
Dados los hallazgos de los matemáticos, se conoce en la actualidad la utilización de las funciones cuadráticas en las diferentes ramas de las ciencias naturales (Biología, Física y Química), así como en la economía y construcciones en la arquitectura, realizando aportes significativos para la humanidad.



En esta unidad relacionarás magnitudes utilizando la proporcionalidad al cuadrado, ubicar pares ordenados en el plano cartesiano para graficar la función $y = x^2$ así como describir la variación de los valores de la función $y = ax^2$.

1.1 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 1

P



Al dejar caer una pelota desde un edificio, la distancia que recorre hasta llegar al suelo varía como lo muestra la siguiente tabla:

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

Donde x es el tiempo transcurrido (desde que se deja caer la pelota) y y es la distancia recorrida por la pelota después de x segundos.

y es directamente proporcional a x, si cuando x cambia en una cantidad de veces entonces y cambia en la misma cantidad.

a) Cuando x toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4, ¿qué valores toma y? ¿Es y directamente proporcional a x?

b) En tu cuaderno, completa la siguiente tabla y responde, ¿qué relación hay entre x^2 y y?

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1			
y	0	5	20	45	80

c) ¿Cuál será la distancia recorrida después de 5 segundos?

d) Escribe y en términos de x.

S

a) Cuando x toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4, entonces y toma los valores 0, 5, 20, 45 y 80, respectivamente (ver tabla).

Si y fuese directamente proporcional a x, entonces al cambiar x dos o tres veces, y también cambiaría dos o tres veces. Pero esto no ocurre.

Al cambiar x = 1 dos veces (x = 2) el valor de y = 5 cambia cuatro veces (y = 20).
Al cambiar x = 1 tres veces (x = 3) el valor de y = 5 cambia nueve veces (y = 45).

x 3
x 2

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

x 4
x 9

Por tanto, y no es directamente proporcional a x.

b) La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

Al multiplicar por 5 cada una de las cantidades en x^2, el resultado son sus respectivas cantidades en y:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

Luego, y es igual a multiplicar 5 por x^2.

c) La distancia recorrida después de 5 segundos será:

$$5(5^2) = 5(25)$$
$$= 125 \text{ metros}$$

d) $y = 5x^2$

Una magnitud y **es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud** x si $y = ax^2$. El número a es una **constante**, es decir, un número real fijo.

Por ejemplo, la distancia que recorre una pelota al caer, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido desde que se deja caer.

En el Problema inicial, la constante a es igual a 5. Este es un valor aproximado de la cantidad real, la cual se verá más detenidamente en ciencias naturales.

1. El área del cuadrado es directamente proporcional al cuadrado de su diagonal, donde $a = \frac{1}{2}$.

   a) Completa los valores para el área en la siguiente tabla, donde x representa la diagonal del cuadrado (en cm) y y es el área (en cm^2) del mismo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	0.5	2	4.5					

   b) Escribe y (el área) en términos de x (su diagonal).

2. El área del círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio.

   a) ¿Cuál es el valor de la constante?
   b) Si x representa el radio del círculo y y su área, escribe y en términos de x.
   c) Completa los valores para el área en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0								

1.2 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 2

P

La variable y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x. Además, si $x = 3$, entonces $y = 18$. Plantea $y = ax^2$ encontrando el valor de la constante a.

S

De acuerdo al enunciado del problema, $y = ax^2$.

Para encontrar el valor de la constante a se sustituyen $x = 3$ y $y = 18$ y se resuelve la ecuación:

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

Por lo tanto, $y = 2x^2$.

C

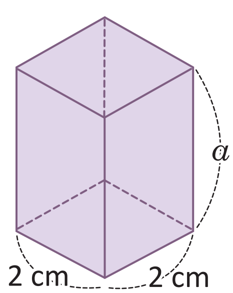
Si $y = ax^2$, entonces el valor de la constante a puede encontrarse sustituyendo un par de valores particulares de x y y, luego se resuelve la ecuación.

Si y es directamente proporcional al cuadrado de x, entonces se dice que ***y* es función de *x***, pues cada valor de x determina un único valor de y.

En general, la función $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales ($a \neq 0$) se llama **función cuadrática**. Las funciones $y = ax^2$ y $y = ax^2 + c$ son casos especiales que se estudiarán en esta unidad, la forma completa de la función cuadrática se estudiará hasta bachillerato.

1. En cada literal, y es directamente proporcional a x^2. Calcula el valor de la constante en los siguientes casos:
   a) Cuando $x = 2$ entonces $y = 12$.
   b) Cuando $x = 3$ entonces $y = 18$.
   c) Cuando $x = 6$ entonces $y = 18$.

2. El volumen de un prisma de base cuadrada y altura constante varía proporcionalmente al cuadrado del lado de su base. Si el lado de la base mide 2 cm el volumen es igual a 12 cm³, ¿cuánto mide su altura?



El volumen de un prisma es igual al producto de su altura por el área de su base.

1.3 La función $y = x^2$

P

Dada la función $y = x^2$, donde $a = 1$:

a) En tu cuaderno completa la siguiente tabla:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16								

b) Ubica en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y) encontrados en el literal anterior y responde: ¿están todos en una línea recta?

c) Completa las siguientes tablas y ubica los pares ordenados en el plano cartesiano. ¿Cómo es la línea que se forma?

x	–1	–0.9	–0.8	–0.7	–0.6	–0.5	–0.4	–0.3	–0.2	–0.1	0
y	1	0.81									0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01									

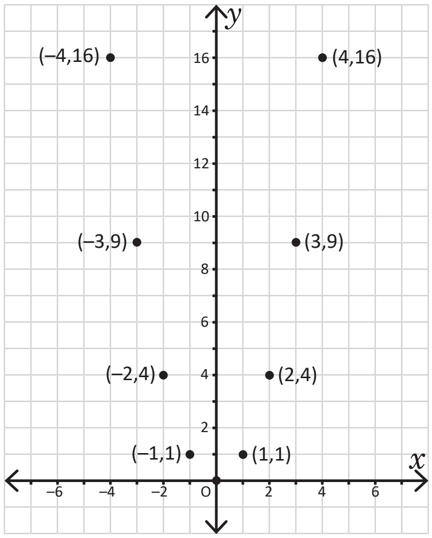
S

a) Cada valor de y es igual a elevar al cuadrado su correspondiente valor de x. Debe tenerse cuidado con el signo, por ejemplo: $(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$. De acuerdo a esto, la tabla queda de la siguiente manera:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b) Para ubicar los puntos en el plano cartesiano se hace lo siguiente: se sitúa la primera coordenada sobre el eje x; a partir de esta, se cuentan las unidades correspondientes a la segunda coordenada, hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa (en ambos casos en forma vertical).

De acuerdo a lo anterior, los puntos del literal a) quedan situados como se muestra en la figura. Claramente, no están sobre una línea recta:

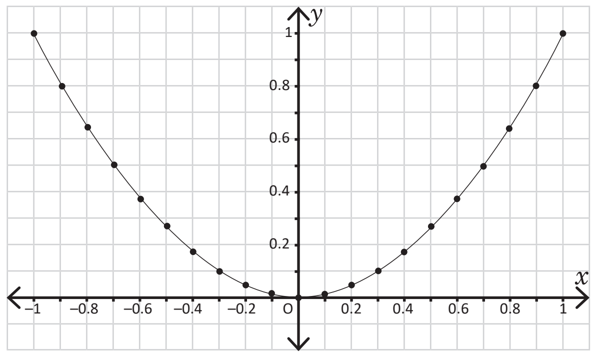


c) Los resultados en la tabla son los siguientes:

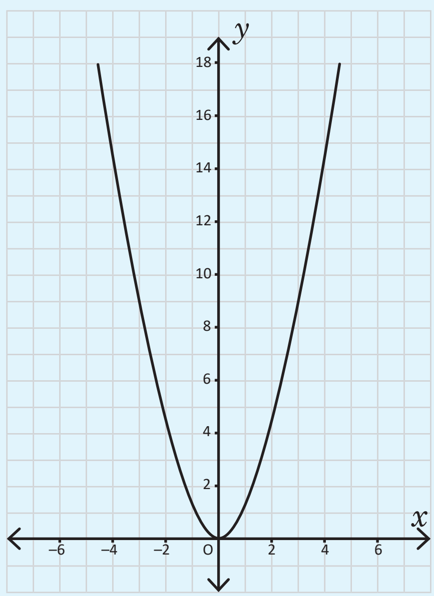
x	–1	–0.9	–0.8	–0.7	–0.6	–0.5	–0.4	–0.3	–0.2	–0.1	0
y	1	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01	0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

La línea que se forma se muestra en la figura:



La gráfica de la función $y = x^2$ se llama **parábola** y pasa por el origen (0, 0).



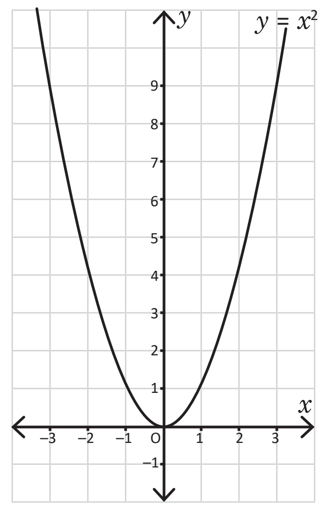
Todas las funciones cuadráticas tienen una parábola como gráfica, y su forma es similar a la de $y = x^2$.

1. Con base a los resultados encontrados en el Problema inicial, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = –1$ y $x = 1$?, ¿ocurre lo mismo cuando $x = –2$ y $x = 2$?
2. En general, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = –m$ y $x = m$?
3. Si "doblas" la gráfica de $y = x^2$ justo por el eje y, ¿qué ocurre con las partes de la gráfica que quedan a ambos lados?

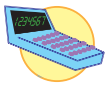
1.4 La función $y = ax^2$; $a > 1$

P

A partir de la gráfica de $y = x^2$, realiza lo siguiente:



a) Completa la tabla y grafica la función $y = 2x^2$ en el mismo plano que $y = x^2$.



x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8								

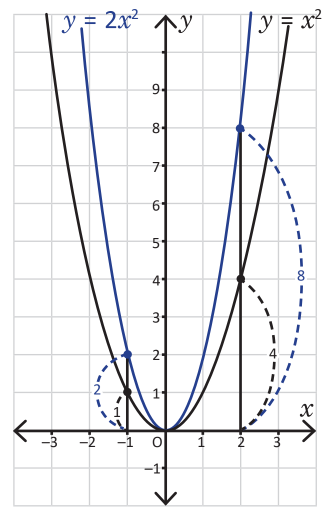
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x^2$?

c) Compara el valor de y para ambas funciones cuando $x = –1$ y $x = 2$, ¿qué ocurre?

S

a) Los valores de $y = 2x^2$ son el resultado de multiplicar por 2 los de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



b) Similitudes en ambas gráficas: pasan por el origen (0, 0), son parábolas y al doblar por el eje y la parte de la gráfica que queda del lado derecho coincide con la del lado izquierdo.

Diferencias en ambas gráficas: los demás puntos, diferentes del origen, no coinciden. Además, $y = 2x^2$ "está arriba" de $y = x^2$.

c) Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = 2x^2$ es el doble del valor de $y = x^2$ cuando $x = –1$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, el valor de la función $y = 2x^2$ es el doble del valor de la función $y = x^2$.

La gráfica de $y = 2x^2$ resulta de alargar verticalmente en un factor 2 la gráfica de $y = x^2$. A esto se le llama **dilatación vertical**.

C

Si a es un número mayor que 1 ($a > 1$), entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$. El **eje de simetría** de una parábola es la recta vertical que divide a la parábola en dos partes congruentes, en el caso de $y = ax^2$ el eje de simetría es el eje y.

Grafica las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = x^2$:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^2$

c) $y = \frac{3}{2}x^2$

1.5 Función $y = ax^2$; $0 < a < 1$

P

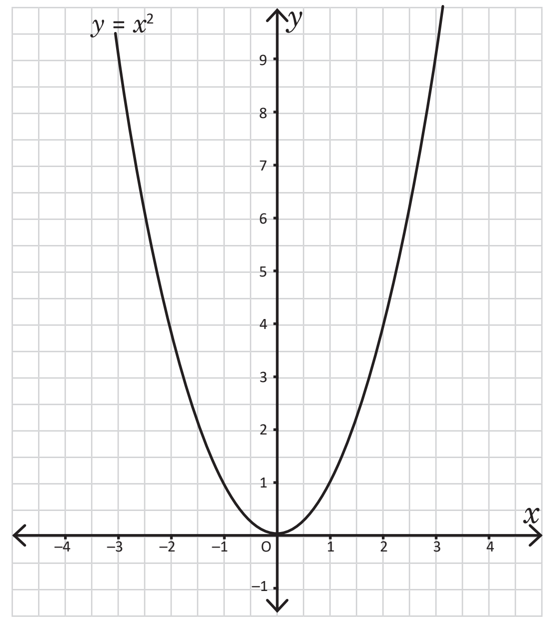
A partir de la gráfica de $y = x^2$, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = \frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano que $y = x^2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$							

b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$?

c) Compara el valor de y para ambas funciones, cuando $x = –3$ y $x = 2$, ¿qué ocurre?



S

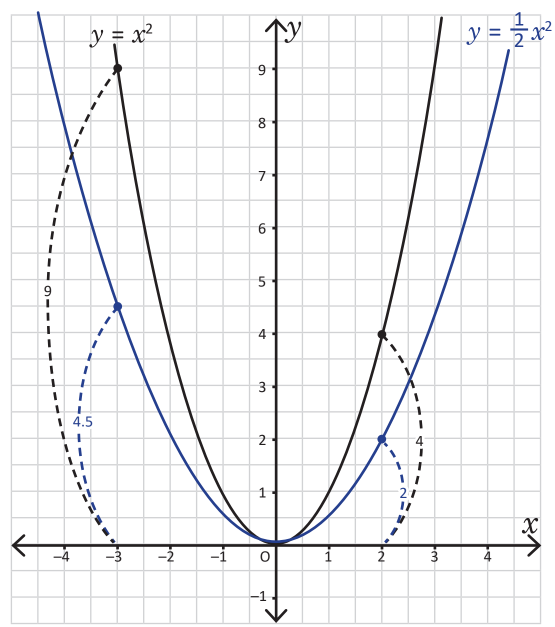
a) Los valores de $y = \frac{1}{2}x^2$ son el resultado de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

b) Similitudes en ambas gráficas: pasan por el origen (0, 0), son parábolas y el eje y es eje de simetría.

Diferencias en ambas gráficas: los demás puntos diferentes del origen no coinciden. Además, $y = \frac{1}{2}x^2$ "está debajo" de $y = x^2$.

c) Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$ cuando $x = –3$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, el valor de la función $y = \frac{1}{2}x^2$ es $\frac{1}{2}$ del valor de la función $y = x^2$.



La gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ resulta de reducir verticalmente en un factor 2 la gráfica de $y = x^2$. A esto se le llama **compresión vertical**.

C

Si a es un número mayor que cero y menor que 1 ($0 < a < 1$), entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$.

Grafica las siguientes funciones:

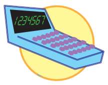
a) $y = \frac{1}{3}x^2$ b) $y = \frac{1}{4}x^2$ c) $y = \frac{2}{3}x^2$

1.6 Función $y = -ax^2$; $a > 0$

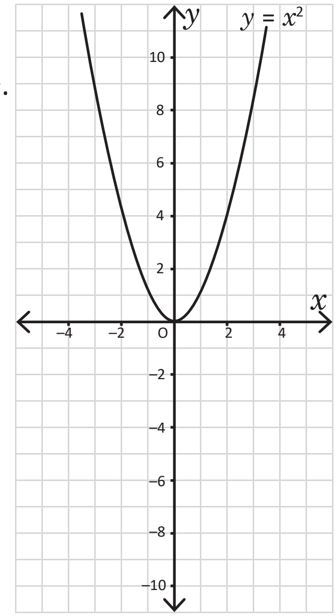
P

A partir de la gráfica de $y = x^2$, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = -x^2$ en el mismo plano que $y = x^2$.



x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	−9						



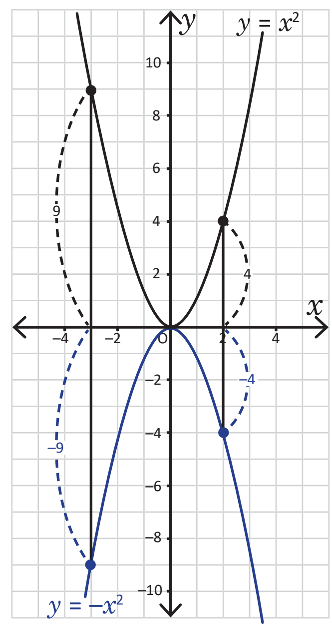
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$?

c) Compara el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$ y $x = 2$, ¿qué ocurre?

S

a) Los valores de $y = -x^2$ son el resultado de multiplicar por −1 los de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9



b) Similitudes en ambas gráficas: pasan por el origen (0, 0), son parábolas y el eje y es eje de simetría.

Diferencias en ambas gráficas: los demás puntos diferentes del origen no coinciden. Además, $y = -x^2$ está debajo del eje x.

c) Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -x^2$ es el opuesto negativo del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, el valor de la función $y = -x^2$ es el negativo del valor de la función $y = x^2$.

C

Si a es un número mayor que cero ($a > 0$), entonces para elaborar la gráfica de $y = -ax^2$ se multiplica por −1 todos los valores de $y = ax^2$. La función $y = -ax^2$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la función $y = ax^2$; en este caso se dice que la parábola de $y = -ax^2$ se abre hacia abajo.

Grafica las funciones: $y = -2x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$ y compáralas con las gráficas de $y = 2x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$.

1.7 Características de $y = ax^2$

P

Utilizando las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$:

a) Grafica en el mismo plano las funciones: $y = 3x^2$, $y = -3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$ (utiliza las que ya graficaste en clases anteriores).

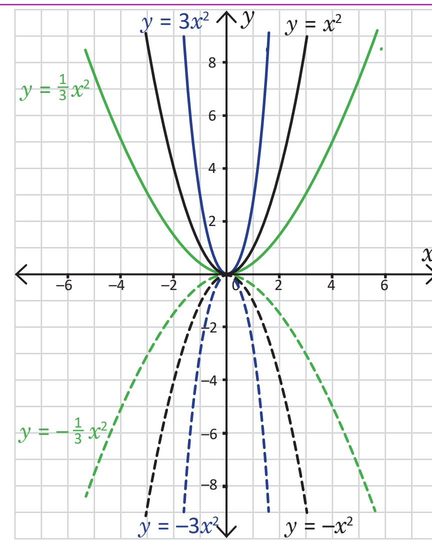
b) Si a es cualquier número real, excepto 0 (es decir, puede ser positivo o negativo), escribe las características de la gráfica de la función $y = ax^2$.

S

a) La gráfica de la función $y = -3x^2$ es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica $y = 3x^2$. De forma similar, la gráfica de $y = -\frac{1}{3}x^2$ es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^2$.

b) Características de la función $y = ax^2$:

- Sin importar el valor de a, la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola que pasa por el origen (0, 0) y el eje y es eje de simetría.
- Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y; mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y.
- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

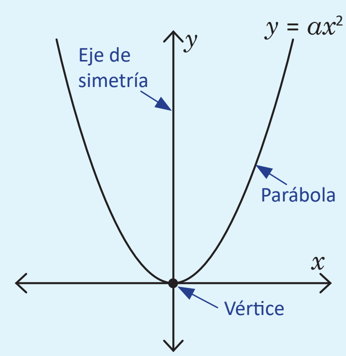


C

A la gráfica de la función $y = ax^2$ se le llama parábola, y tiene al eje y como eje de simetría. El punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría se llama **vértice**; en el caso de $y = ax^2$, el vértice coincide con el origen (0, 0).

Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y; mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y.

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.



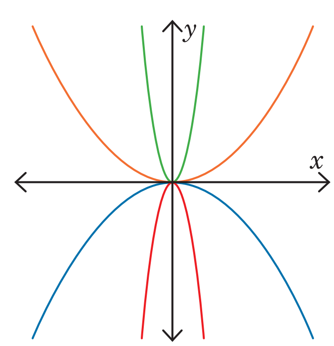
A cada función de la izquierda asígnale su respectiva gráfica en la derecha. Justifica tu respuesta.

a) $y = -\frac{1}{7}x^2$

b) $y = -8x^2$

c) $y = 7x^2$

d) $y = \frac{1}{8}x^2$



1.8 Variación de $y = ax^2$, parte 1

P

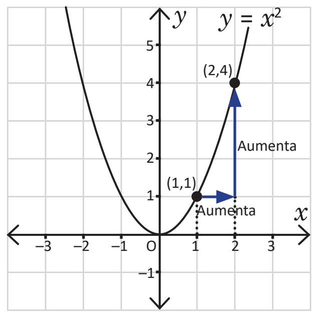
A partir de las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$ responde lo siguiente:

a) Si el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y en $y = x^2$ y en $y = -x^2$?
b) Si el valor de x aumenta de -2 a -1, ¿cómo cambia el valor de y en $y = x^2$ y en $y = -x^2$?

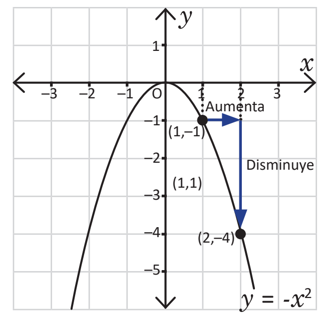
S

a) Al observar las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$ se puede concluir lo siguiente:

Si el valor de x aumenta de 1 a 2, entonces el valor de y aumenta de 1 a 4.

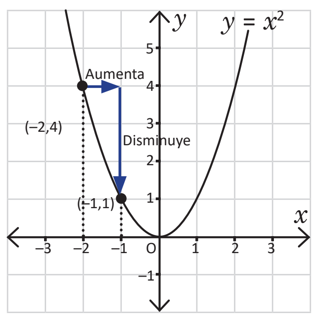


Si el valor de x aumenta de 1 a 2, entonces el valor de y disminuye de -1 a -4.

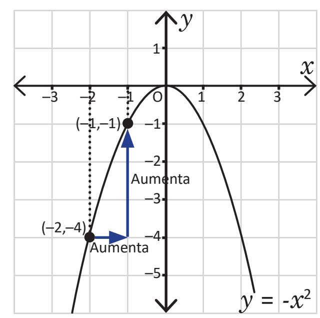


b) De forma similar al literal anterior se puede concluir lo siguiente:

Si el valor de x aumenta de -2 a -1, entonces el valor de y disminuye de 4 a 1.

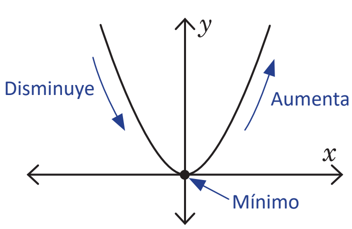
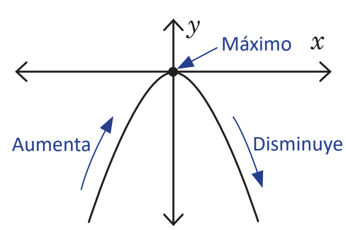


Si el valor de x aumenta de -2 a -1, entonces el valor de y aumenta de -4 a -1.



C

Dada la función $y = ax^2$ y a un número real excepto 0 (positivo o negativo). Al ir aumentando el valor de x, ocurre lo siguiente:

$a > 0$	$a < 0$
a) Si $x < 0$ entonces el valor de y disminuye. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y aumenta. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **mínimo** de la función $y = ax^2$.	a) Si $x < 0$ entonces el valor de y aumenta. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y disminuye. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **máximo** de la función $y = ax^2$.
	

1. A partir de las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$, si el valor de x aumenta de 2 a 3, ¿cómo cambia el valor de y en ambos casos?, ¿y si aumenta de -3 a -2?
2. En la función $y = x^2$, ¿existen valores de x que cumplan $y = -4$? Justifica tu respuesta.

1.9 Variación de $y = ax^2$, parte 2

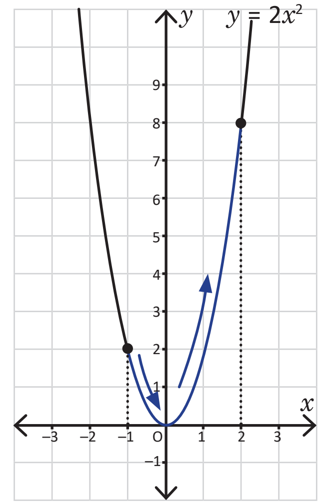
P

En la función $y = 2x^2$, si el valor de x se encuentra entre –1 y 2, ¿entre cuáles números se encuentra y?

Utiliza la gráfica de $y = 2x^2$.

S

Para determinar los valores de y se trazan segmentos verticales que van, el primero desde $x = -1$ hasta la parábola, y el segundo desde $x = 2$ hasta la parábola.



Se observa lo siguiente:

- El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).
- El valor máximo que toma y es 8 (cuando $x = 2$).

Por lo tanto, el valor de y se encuentra entre 0 y 8.

C

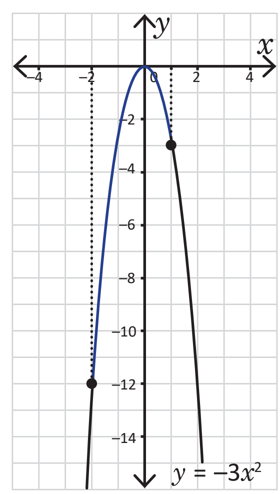
A los valores que toma la variable x se les llama **dominio**, y a los valores que toma y se les llama **rango**. Estos dos conceptos se verán con mayor profundidad en bachillerato.

E

En la función $y = -3x^2$, si el valor de x se encuentra entre –2 y 1, ¿entre cuáles números se encuentra y?

- El valor mínimo de y es –12 (cuando $x = -2$).
- El valor máximo de y es 0 (cuando $x = 0$).

Por lo tanto, el valor de y se encuentra entre –12 y 0.



1. Si $y = 3x^2$, ¿entre cuáles valores se encuentra y si x está entre –2 y 3?

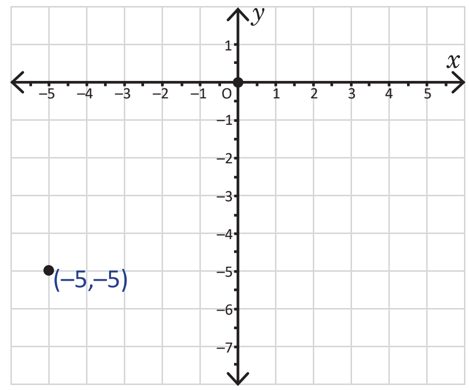
2. Si $y = -2x^2$, ¿entre cuáles valores se encuentra y si x está entre 2 y 4?

3. Si $y = \frac{1}{2}x^2$, ¿entre cuáles valores se encuentra y si x está entre –1 y 2?

1.10 Practica lo aprendido

1. Completa la tabla y gráfica la función $y = -\frac{1}{5}x^2$.

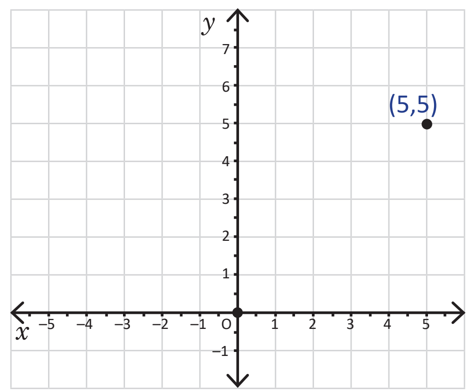
x	–5	–3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$-\frac{1}{5}x^2$		–1.8			–5



Los valores $x = -5$ y $x = 5$ tienen el mismo valor $y = -5$. En general, los valores $x = -m$ y $x = m$ tienen el mismo valor en y.

2. Completa la tabla y gráfica la función $y = \frac{1}{5}x^2$. Compara con la gráfica anterior.

x	–5	–3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$\frac{1}{5}x^2$					



3. En cada literal, y es directamente proporcional a x^2. Calcula el valor de la constante en los siguientes casos:

   a) Cuando $x = 2$ entonces $y = 24$.
   b) Cuando $x = 8$ entonces $y = 16$.
   c) Cuando $x = 2$ entonces $y = -6$.

4. En el mismo plano, grafica las siguientes funciones:

   a) $y = \frac{3}{2}x^2$ b) $y = \frac{2}{3}x^2$ c) $y = -\frac{3}{2}x^2$ d) $y = -\frac{2}{3}x^2$

5. A partir de las gráficas de $y = \frac{1}{6}x^2$ y $y = -\frac{1}{6}x^2$:

   a) Si el valor de x aumenta de 1 a 6, ¿cómo cambia el valor de y en ambos casos?
   b) Si el valor de x aumenta de –12 a –6, ¿cómo cambia el valor de y en ambos casos?

6. Sea $y = 2x^2$:

   a) Si el valor de x está entre –1 y 3, ¿entre cuáles valores se encuentra y?
   b) Si el valor de x está entre –2 y 4, ¿entre cuáles valores se encuentra y?

1.11 Practica lo aprendido

1. Sea $y = -6x^2$:

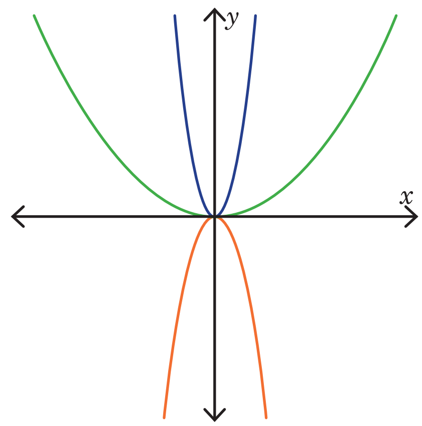
   a) Si el valor de x está entre -3 y 2, ¿entre cuáles valores se encuentra y?
   b) Si el valor de x está entre -1 y 1, ¿entre cuáles valores se encuentra y?

2. A cada función de la izquierda asígnale su respectiva gráfica en la derecha:

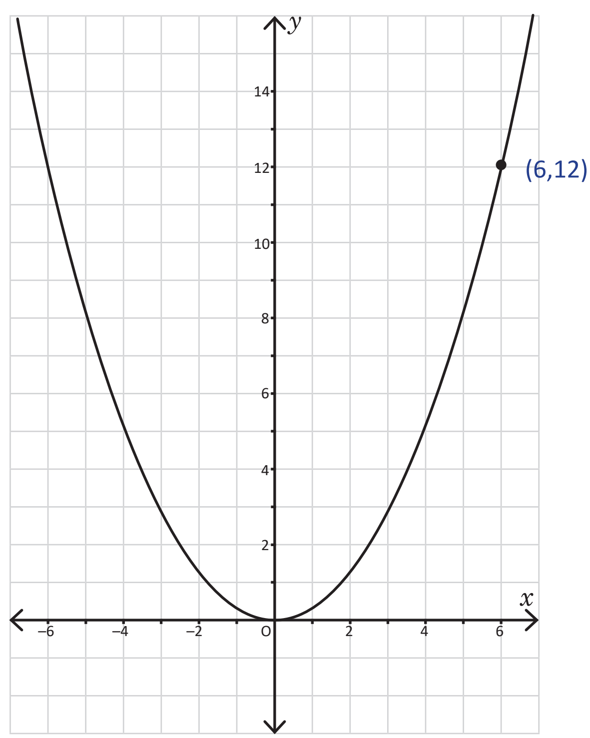
   a) $y = \frac{2}{5}x^2$

   b) $y = -\frac{5}{2}x^2$

   c) $y = 9x^2$



3. La siguiente gráfica es de una función $y = ax^2$, ¿cuál es el valor de a?



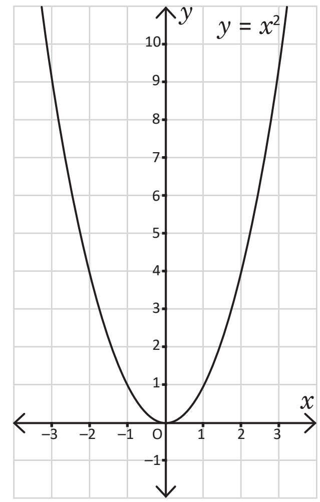
2.1 Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$

A partir de la gráfica de $y = x^2$:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = x^2 + 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6				

La gráfica de $y = x^2 + 2$ es una parábola.

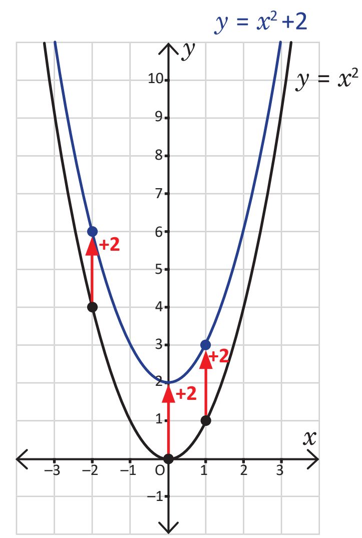


b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 2$?

c) Describe con tus palabras qué le ocurre a la gráfica de $y = x^2$ para obtener $y = x^2 + 2$.

a) Los valores de $y = x^2 + 2$ son el resultado de sumar 2 a los valores de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6



b) Similitudes en ambas gráficas: son parábolas y el eje y sigue siendo eje de simetría.

Diferencias en ambas gráficas: no hay puntos coincidentes. Incluso, el vértice en $y = x^2$ es $(0, 0)$; mientras que en $y = x^2 + 2$ es $(0, 2)$, se encuentra dos unidades arriba.

c) La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$.

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número positivo ($c > 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia arriba) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 + 3$

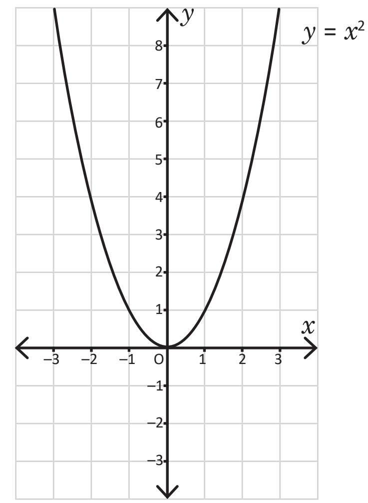
b) $y = -x^2 + 3$

c) $y = -2x^2 + 2$

2.2 Función $y = ax^2 + c$; $c < 0$

P

A partir de la gráfica de $y = x^2$:



a) Completa la tabla y grafica la función $y = x^2 - 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2				

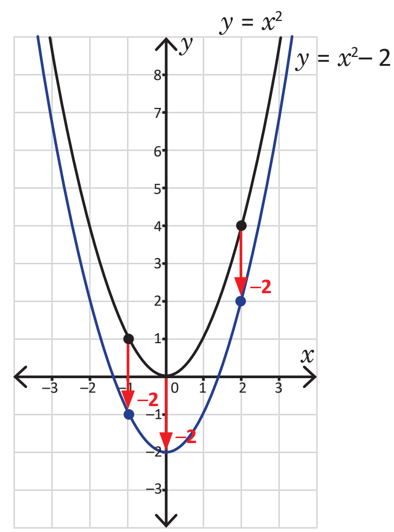
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 - 2$?

c) Describe con tus palabras qué le ocurre a la gráfica de $y = x^2$ para obtener $y = x^2 - 2$.

S

a) Los valores de $y = x^2 - 2$ son el resultado de restar 2 a los valores de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4 -2	1 -2	0 -2	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2



b) Similitudes en ambas gráficas: son parábolas y el eje y sigue siendo eje de simetría.
Diferencias en ambas gráficas: no hay puntos coincidentes. Incluso, el vértice en $y = x^2$ es $(0, 0)$; mientras que en $y = x^2 - 2$ es $(0, -2)$, se encuentra dos unidades abajo.

c) La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.

C

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número negativo ($c < 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia abajo) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 - 3$

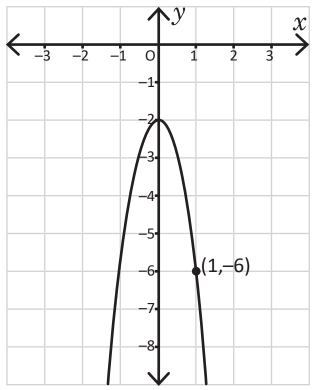
b) $y = -x^2 - 3$

c) $y = 2x^2 - 2$

2.3 Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función

P

En una función $y = ax^2 + c$, ¿cuáles deben ser los valores de a y c para que la gráfica de la función sea la mostrada en la figura?

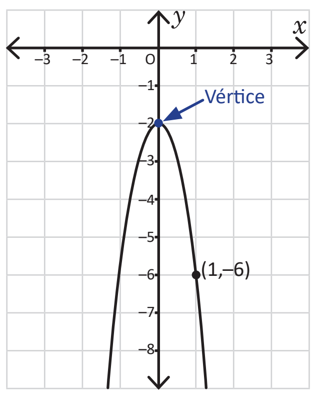


El problema NO indica si a y c son positivos, por lo que podrían ser negativos también. Usa la gráfica para encontrar el vértice.

S

El problema indica que la función es de forma $y = ax^2 + c$. Al observar la gráfica se concluye lo siguiente:

1. El número a es negativo, ya que la parábola se abre hacia abajo.
2. El vértice se encuentra en $(0, c)$, esto lo indica el enunciado.
3. El número c es negativo, ya que el vértice está "debajo" de $(0, 0)$.



Al observar la gráfica se verifica que el vértice está en $(0, -2)$, y por lo tanto $c = -2$. El punto $(1, -6)$ se encuentra sobre la parábola, es decir, si $x = 1$, entonces $y = -6$. Se sustituyen estos valores y c en $y = ax^2 + c$ y se despeja a:

$$\begin{aligned} -6 &= a(1)^2 + (-2) \\ a - 2 &= -6 \\ a &= -6 + 2 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de a y c son -4 y -2 respectivamente, y $y = -4x^2 - 2$.

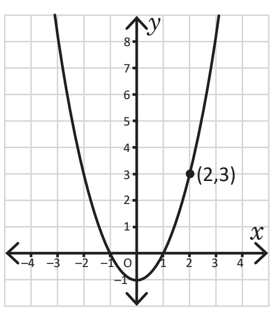
C

Dada la gráfica de una función $y = ax^2 + c$ y un punto (m, n) sobre esta, entonces para encontrar los valores de a y c (que pueden ser positivos o negativos) se hace lo siguiente:

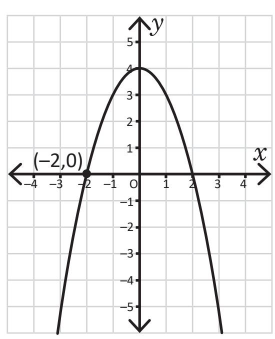
1. En la gráfica, ubicar el vértice de la parábola $(0, c)$: si está arriba de $(0, 0)$ entonces c es positivo, y si está debajo de $(0, 0)$ entonces c es negativo.
2. Encontrar el valor de a sustituyendo n, m y c, quedando así: $n = am^2 + c$.

1. Las siguientes gráficas corresponden a funciones de la forma $y = ax^2 + c$. Encuentra los valores de a y c en cada una de ellas:

a)



b)



2. Encuentra los valores a y c de una función $y = ax^2 + c$ cuya gráfica pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(2, 10)$.

Unidad 4

2.4 Practica lo aprendido

1. Grafica las siguientes funciones y escribe el vértice de cada una:

   a) $y = -3x^2 + 1$ b) $y = 3x^2 - 1$ c) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2$

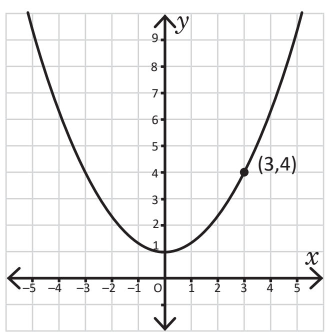
2. Escribe el vértice de las siguientes funciones:

   a) $y = 2x^2 - \frac{1}{2}$ b) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}$ c) $y = -2x^2 - \frac{1}{2}$

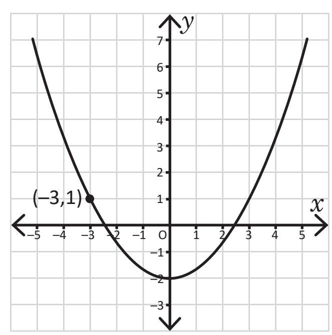
   d) $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ f) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

3. Las siguientes gráficas corresponden a funciones de la forma $y = ax^2 + c$. Encuentra los valores de a y c en cada una de ellas.

a)



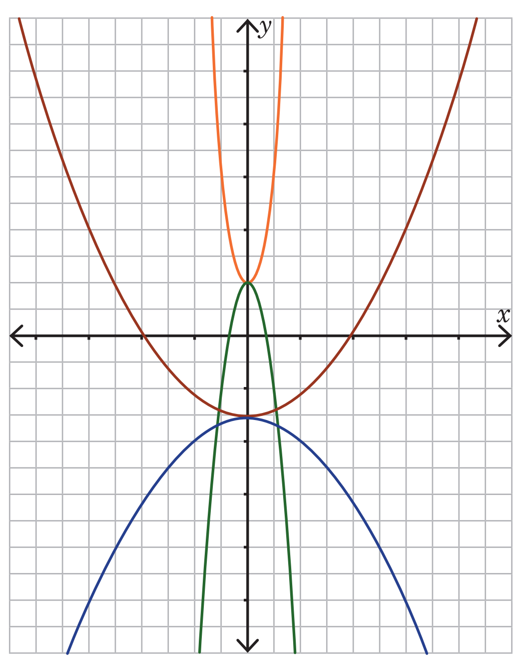
b)



4. A cada función, asígnale su respectiva gráfica:

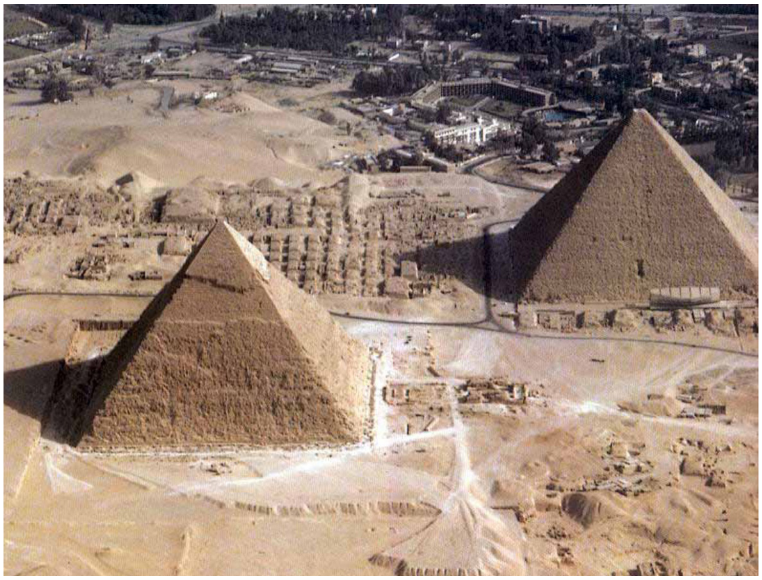
   a) $y = -5x^2 + 2$ b) $y = 5x^2 + 2$

   c) $y = \frac{1}{5}x^2 - 3$ d) $y = -\frac{1}{5}x^2 - 3$



5 Unidad

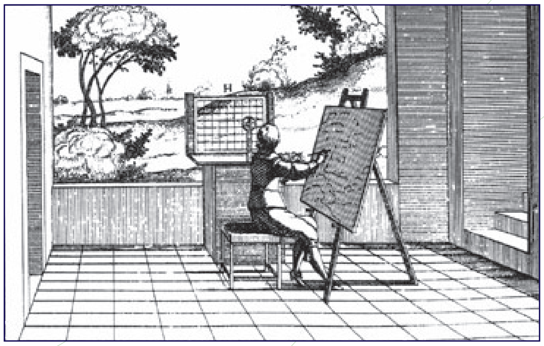
Figuras semejantes



Pirámides de Kefrén y Keops, Egipto.

El matemático griego Tales de Mileto (siglo IV a.C.) calculó la altura de la gran pirámide de Keops, en Egipto, observando las longitudes de un bastón clavado en la arena, la sombra proyectada por el bastón y la sombra de la pirámide. Tales aplicó la semejanza de triángulos para obtener la altura, asumiendo que los rayos del sol son paralelos.

Dentro de las aplicaciones de las figuras semejantes se utiliza una técnica de dibujo que permite ampliar o reducir una imagen o fotografía, así como dibujar paisajes. La técnica consiste en cuadricular la figura de referencia y el lienzo o papel en el que se dibujará o pintará, de tal manera que los rectángulos de la figura y el lienzo sean semejantes.



Un artista dibuja un paisaje con la técnica de la cuadrícula.

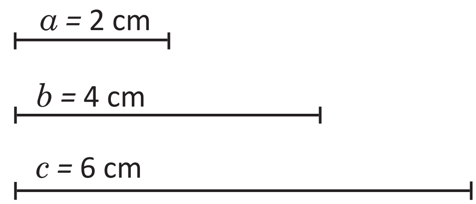
Los temas que estudiarás son los segmentos proporcionales, las figuras semejantes, sus características y cómo construirlas. Abordarás los criterios de semejanza de triángulos, propiedades como la base media, la relación entre rectas paralelas y segmentos proporcionales. Además, aplicarás la semejanza para utilizar la escala en los mapas, la relación entre las áreas de dos triángulos semejantes y el volumen de sólidos semejantes, entre otros.

1.1 Razón entre segmentos

P

a) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento b?

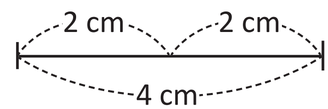
b) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento c? ¿Y la de b con respecto a c?



S

a) Al comparar las longitudes del segmento a con respecto a la del segmento b se tiene que a es $\frac{1}{2}$ de b.

b) Se calcula el cociente $\frac{a}{c}$ y se tiene que la longitud de a es $\frac{1}{3}$ de la longitud de c. De igual forma, la longitud de b es $\frac{2}{3}$ de la longitud de c.

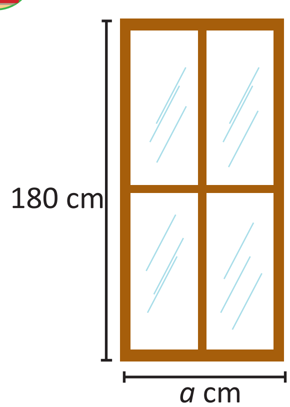


C

Al cociente de los números que expresan las longitudes de dos segmentos se le llama **razón entre segmentos**. Esta razón no queda expresada en ningún sistema de unidades, es decir, no lleva centímetros, metros u otra unidad de longitud.

En el Problema inicial, la razón entre los segmentos a y b es $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; esto también se expresa como 1:2 y se lee "1 es a 2". Hay que prestar atención al orden de a y b. Por lo general, una razón entre segmentos siempre se escribe en su forma simplificada.

E



¿Cuál es la medida del ancho de una ventana de alto 180 cm cuyas dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$? (ver figura)

Iguala el ancho y alto de la ventana con la razón entre ambas. Debes cuidar el orden, es decir, colocar la longitud menor entre la mayor o viceversa, según sea el caso.

Se denota por a la medida del ancho de la ventana en centímetros. Si las dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$, entonces:

$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Alto}} = \frac{4}{9}$$

Se sustituyen los valores en la ecuación anterior y se despeja a:

$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$

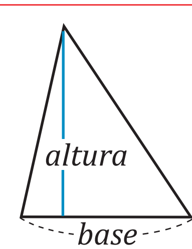
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$a = 80$$

Por lo tanto, la medida del ancho de la ventana es 80 cm.

1. Calcula la razón entre el segmento a = 4 cm y el segmento b = 20 cm.

2. La base y la altura de un triángulo están a razón $\frac{5}{7}$. Si la base mide 10 cm, ¿cuánto mide la altura del triángulo? (ver figura)

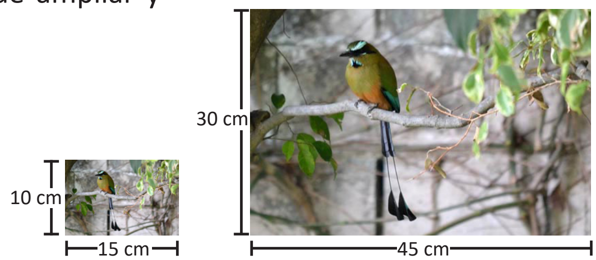


1.2 Segmentos proporcionales

P

Carlos tomó una fotografía a un torogoz, la cual decide ampliar y colocar en un cuadro.

a) ¿Cuál es la razón entre las alturas de la fotografía pequeña y la ampliada? ¿Y entre las bases?
b) ¿Qué relación hay entre ambas razones?



S

a) La altura de la fotografía pequeña es 10 cm y la de la fotografía ampliada es 30 cm. Entonces, la razón de ambas alturas (de la pequeña entre la ampliada) es $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, que también puede escribirse como 1:3. De igual forma se procede para las bases, la razón entre ambas es $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ o 1:3

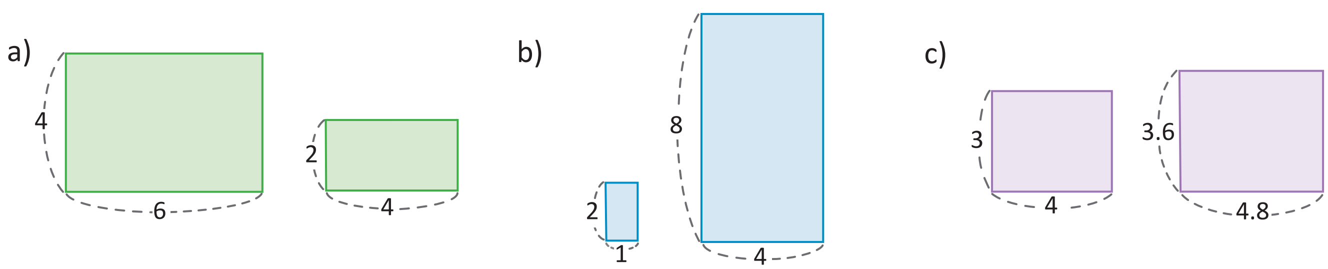
b) Al simplificar ambas razones, el resultado es $\frac{1}{3}$, es decir, son equivalentes. Cuando esto ocurre, se dice que las alturas y las bases de la fotografía son "proporcionales".

También se puede haber calculado la razón entre la altura de la grande y la de la pequeña como $\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, que se escribe 3:1. De igual manera para las bases, solo se debe asegurar de tomar el mismo orden.

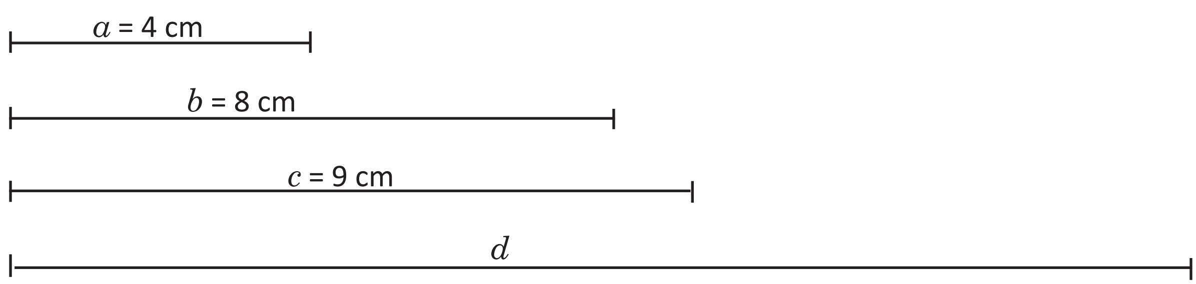
C

La equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se llama **proporción**. Por ejemplo, $\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$, y al simplificar ambas pueden expresarse como $\frac{1}{3}$ o 1:3.

1. Dadas las siguientes parejas de rectángulos, ¿son proporcionales las bases y las alturas de cada pareja? Justifica tu respuesta.



2. En la siguiente figura, ¿qué longitud debe tener el segmento d para que a y b sean proporcionales a c y d?

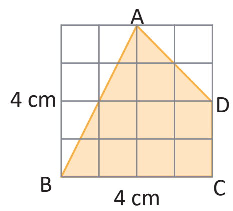


Unidad 5

1.3 Figuras semejantes

P

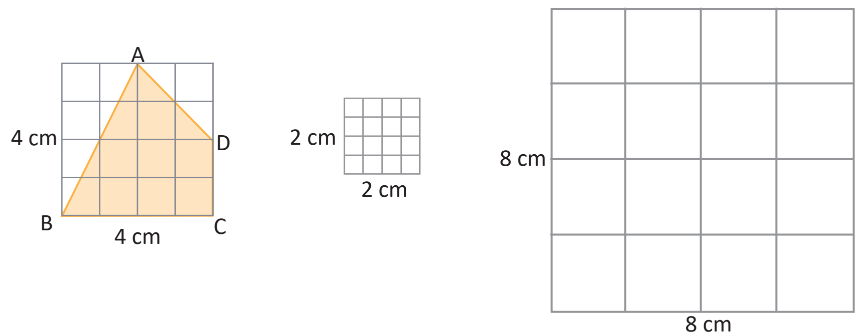
Reduce a la mitad y amplía al doble el cuadrilátero ABCD sin cambiar su forma.



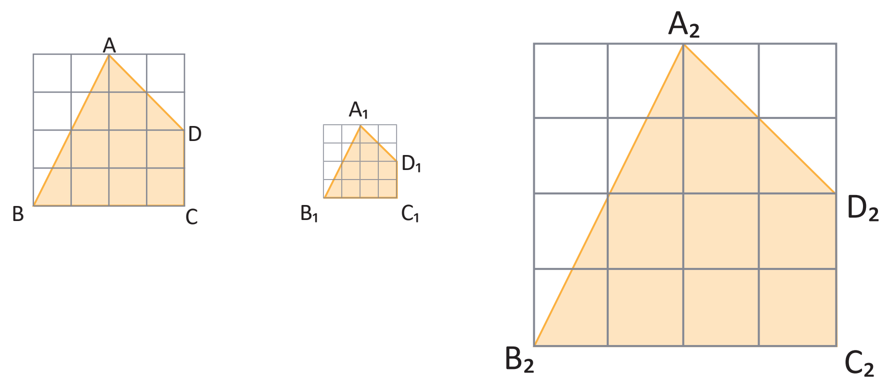
Reduce a la mitad y amplía al doble las longitudes de los lados de la cuadrícula.

S

Se dibujan dos cuadrados, uno de lado 2 cm y otro de lado 8 cm. La cuadrícula original tiene 16 cuadrados; de la misma forma se cuadriculan los cuadrados de 2 y 8 cm de tal manera que cada uno tenga en su interior 16 cuadrados:



Luego, se traza el cuadrilátero en ambas cuadrículas, respetando la forma del mismo.



Los cuadrados de la cuadrícula pequeña tienen 5 mm de lado, y los de la cuadrícula grande 2 cm de lado.

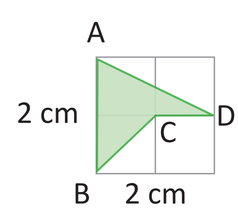
C

Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente, el mismo tamaño (como las del ejemplo anterior). Al reducir o ampliar una figura, el resultado es otra figura semejante a la primera.

Para indicar semejanza se utiliza el símbolo $\sim$: el cuadrilátero ABCD $\sim$ el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ se lee "el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$" (las figuras se nombran en orden de vértices correspondientes) y el cuadrilátero ABCD $\sim$ el cuadrilátero $A_2B_2C_2D_2$.

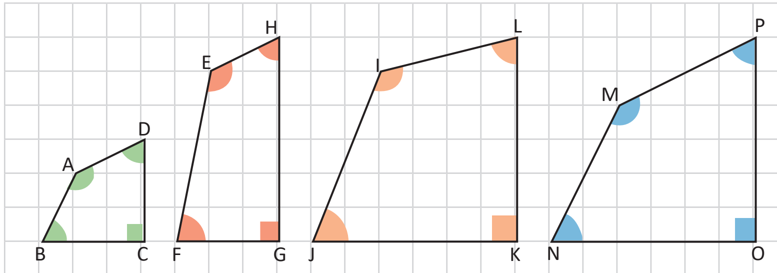
1. Amplía al doble el cuadrilátero ABCD de la derecha, dibujando la figura resultante.

2. ¿Cuáles serán las dimensiones de la cuadrícula si el cuadrilátero ABCD se amplía al triple? Dibuja la figura resultante.

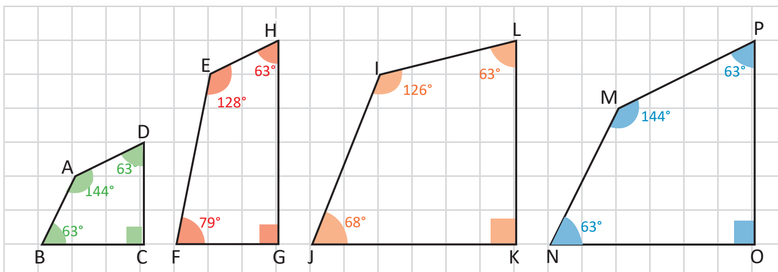


1.4 Características de figuras semejantes, parte 1

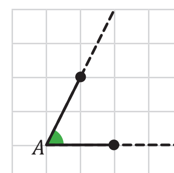
¿Cuál cuadrilátero es semejante al cuadrilátero ABCD?



Al ampliar el cuadrilátero ABCD, el resultado es otro semejante al primero y solamente cambiarán las longitudes de sus lados pero no la medida de sus ángulos. Con un transportador, se miden los ángulos de los cuadriláteros y se comparan:



Cuando se alargan los lados de un ángulo, la medida del ángulo se mantiene.



Para denotar la medida del ángulo cuyo vértice es A se escribe ∢A.

En los cuadriláteros ABCD y EFGH: ∢B no es congruente a ∢F y por lo tanto EFGH no es semejante a ABCD, por no tener la misma forma.

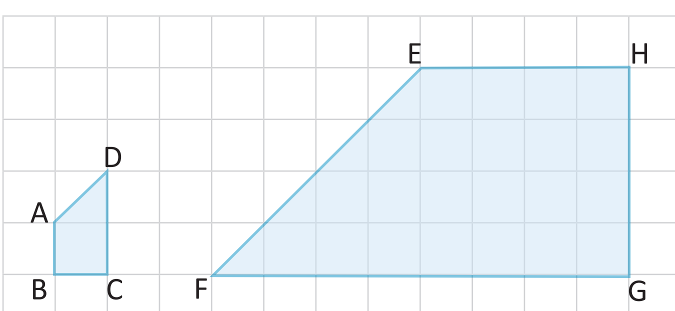
Algo similar ocurre si se comparan los ángulos de ABCD con los de IJKL: ∢J no es congruente al ∢B.

Finalmente, en los cuadriláteros ABCD y MNOP: los ángulos del primero son congruentes a los ángulos del segundo y se amplía ABCD al doble, el resultado es igual a MNOP. Por lo tanto, MNOP es semejante a ABCD.

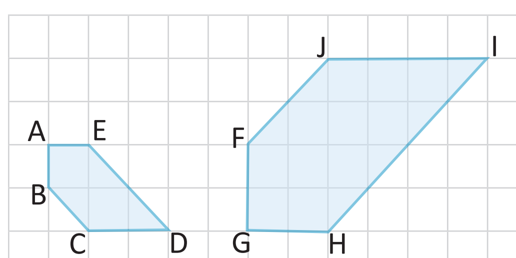
En dos o más polígonos semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir, las medidas de sus ángulos son iguales. Son **ángulos correspondientes** los que se encuentran en la misma posición respecto al polígono.

En cada pareja de polígonos semejantes identifica los ángulos correspondientes.

a)



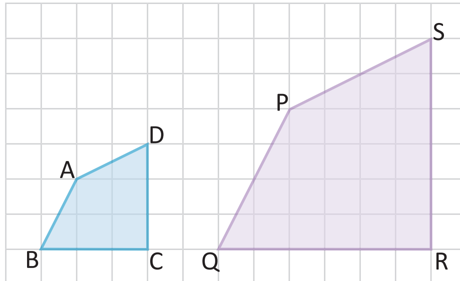
b)



1.5 Características de figuras semejantes, parte 2

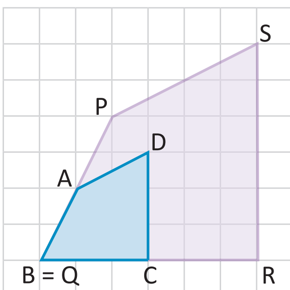
P

Los cuadriláteros ABCD y PQRS son semejantes. ¿Cuál es la relación entre las razones de los lados correspondientes a ambos cuadriláteros?



Lados correspondientes son los que se encuentran en la misma posición. Puedes sobreponer ambos cuadriláteros y comparar sus lados o utilizar regla para medir las longitudes y calcular las razones.

S



Se sobreponen los cuadriláteros, haciendo coincidir los vértices B y Q. De la figura se deduce lo siguiente:

$PQ = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $QR = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS = 2CD \Rightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $SP = 2DA \Rightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

Las razones son iguales, por lo tanto, los lados correspondientes son proporcionales.

C

En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. En el Problema inicial:

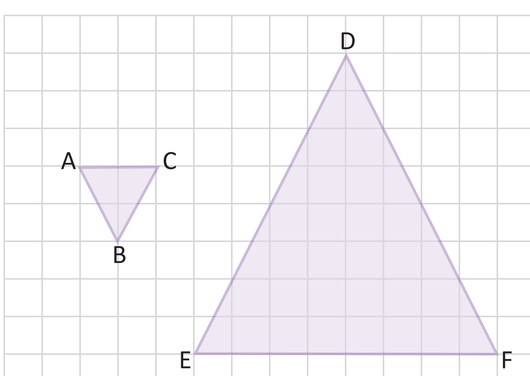
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

A los lados correspondientes también se les llama **lados homólogos** y la razón entre ellos se denomina **razón de semejanza**.

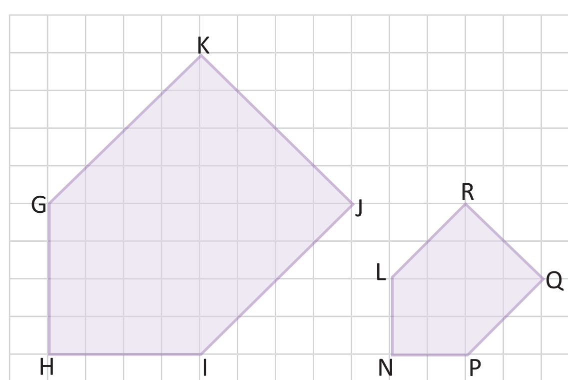
En general, **dos polígonos son semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

En las figuras, el triángulo ABC es semejante al triángulo FDE, y el pentágono GHIJK es semejante a LNPQR. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza en cada pareja.

a)



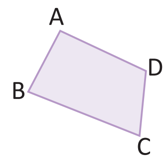
b)



1.6 Construcción de figuras semejantes

P

Dibuja sobre una página de papel bond el siguiente cuadrilátero:

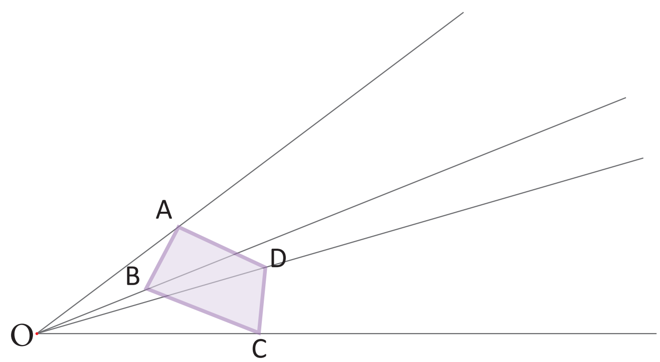


¿Cómo puedes dibujar otro cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3?

S

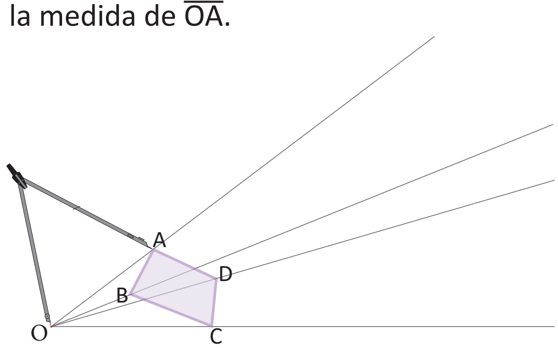
Para poder dibujar un cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3 se hace lo siguiente:

1. Coloca un punto que se denotará por O. Traza semirrectas que pasen por el punto O y cada uno de los vértices del cuadrilátero.

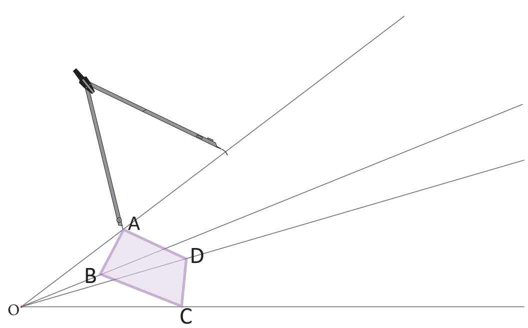


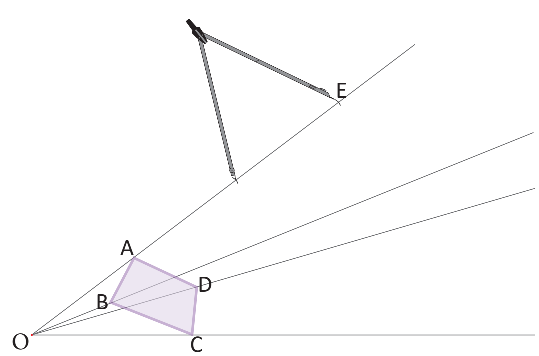
Una **semirrecta** está formada por todos los puntos sobre una línea recta que se encuentran a uno de los lados de un determinado punto fijo. También se le conoce como **rayo**.

2. Con un compás, toma la medida de $\overline{OA}$.

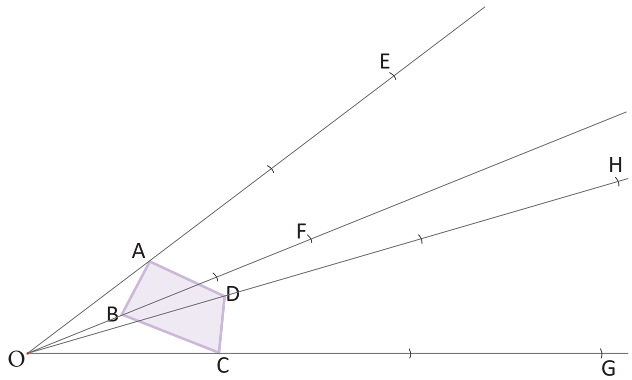


3. A partir del vértice A y sobre la semirrecta, marca un punto E que satisfaga OE = 3 OA. Esto se hace colocando la punta del compás en A y trazando un arco que corte a la semirrecta; luego se coloca la punta del compás en ese punto de intersección y se traza un segundo arco que corte a la semirrecta, ese punto será E:

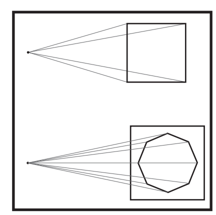


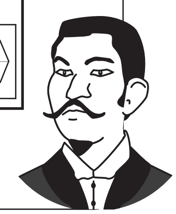


4. Haz lo mismo con los otros tres vértices del cuadrilátero, tomando las medidas OB, OC, OD, encontrando los puntos F, G, y H que satisfagan OF = 3OB, OG = 3OC y OH = 3OD:



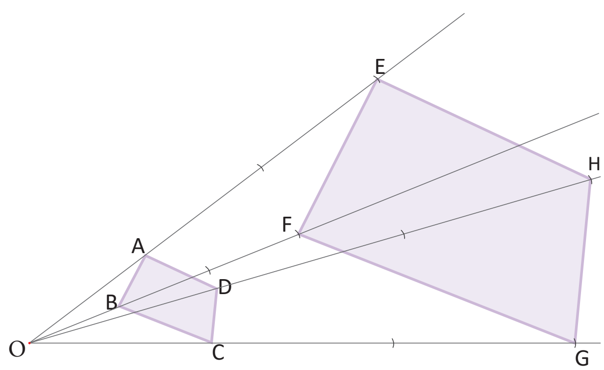
El italiano **Leon Battista Alberti** fue además de arquitecto, el primer teórico del arte del Renacimiento, desarrolló esta técnica en su obra *Della pintura*, en la que describe las leyes de la perspectiva. Un objeto disminuye su tamaño cuando se mira desde una larga distancia hasta que casi queda reducido a un punto.





Batista, A. (1782). *Della Architettura*.

5. Une los puntos para formar el cuadrilátero EFGH:



El método anterior para generar figuras semejantes se conoce como **homotecia**. Al punto O se le llama **centro de homotecia**, los cuadriláteros ABCD y EFGH se dice que son **homotéticos** y la razón:

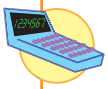
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

se llama **razón de semejanza**.

1. Verifica que los cuadriláteros dibujados anteriormente son semejantes a razón 1:3.

2. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 1:2.

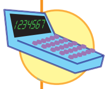
1.7 Practica lo aprendido



1. Las dimensiones ancho y largo del piso de un salón que tiene forma rectangular están a razón 3:4.

   a) Si el salón mide 8 m de largo, ¿cuánto mide el ancho?

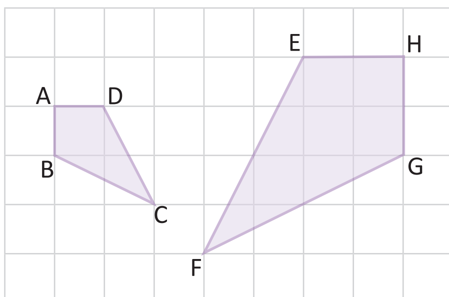
   b) Se colocará piso de cerámica en el salón. Si cada baldosa de cerámica tiene un área de 0.25 m^2 y un costo de $2.00, ¿cuánto costará colocar cerámica en todo el piso?



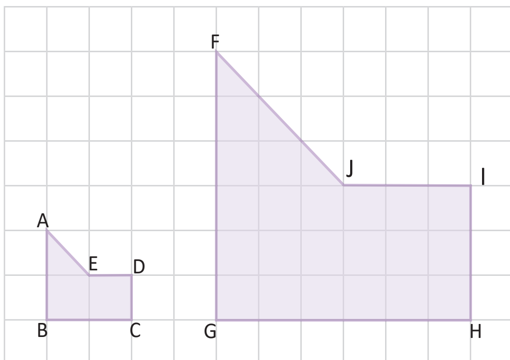
2. La Asamblea Legislativa de El Salvador decretó en la Ley de Símbolos Patrios, que las dimensiones de la bandera magna nacional son 3.35 m de largo por 1.89 m de ancho. Julia elabora versiones reducidas de la bandera, con un ancho de 20 cm. ¿Cuál es la medida del largo de la bandera elaborada por Julia, si tanto su versión como la original son semejantes? Encuentra la respuesta en cm hasta las décimas.

Las dimensiones de las banderas deben estar ambas en cm o en m.

3. Verifica que los cuadriláteros ABCD y HGFE son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



4. Verifica que los polígonos ABCDE y FGHIJ son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?

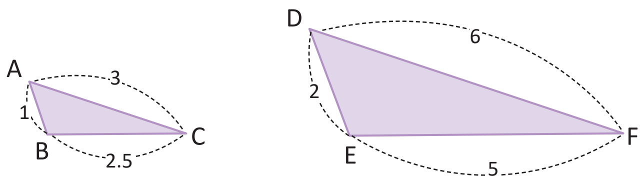


5. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 2:3.

2.1 Primer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF de la figura tienen sus lados proporcionales, a razón 1:2. ¿Son semejantes?



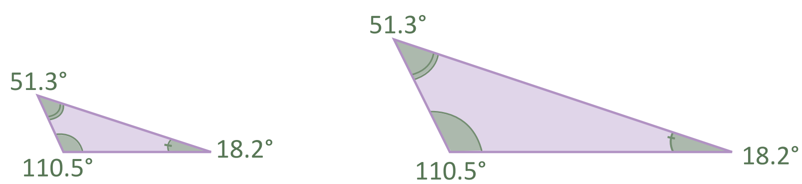
Para medir los ángulos del triángulo utiliza la figura que se encuentra en las páginas adicionales del libro.

S

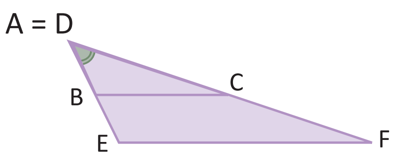
Los lados de ambos triángulos son proporcionales. Debe verificarse si sus ángulos correspondientes son congruentes; esto puede hacerse de las siguientes maneras:

1. Con un transportador, mide los ángulos de cada triángulo:

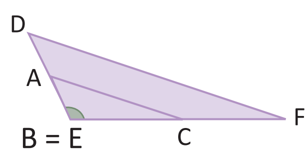
∢A = ∢D
∢B = ∢E
∢C = ∢F



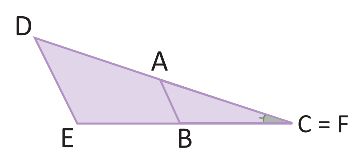
2. Sobrepone los triángulos y compara cada vértice:



∢A = ∢D



∢B = ∢E



∢C = ∢F

En los dos casos se verifica que los ángulos correspondientes de ambos triángulos son congruentes. Por lo tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

C

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

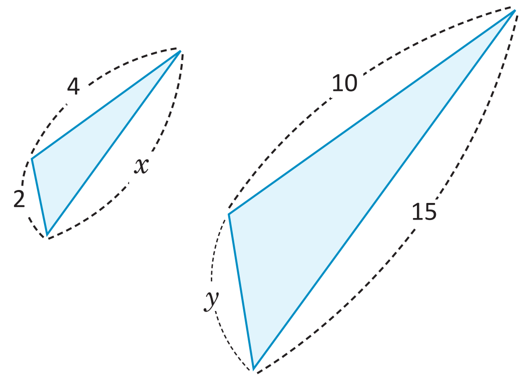
Criterio LLL:
Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces también son semejantes.
Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF del Problema inicial tienen sus lados correspondientes proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, ΔABC y ΔDEF son semejantes.

E

¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos sean semejantes?



Según el resultado descrito en la conclusión, para que los triángulos sean semejantes bastaría con que sus lados sean proporcionales, es decir: $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$.

Se calcula el valor de x:

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = 15\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$x = 6$$

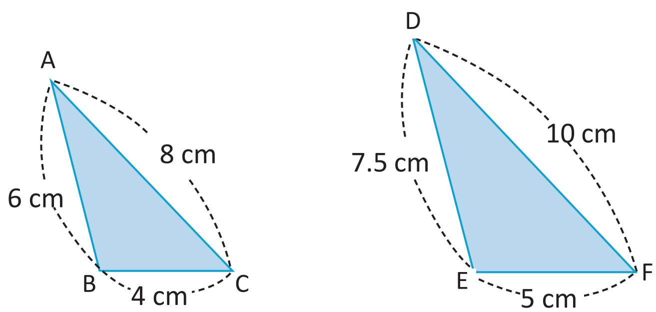
Se calcula el valor de y:

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{2(10)}{4} = y$$
$$y = 5$$

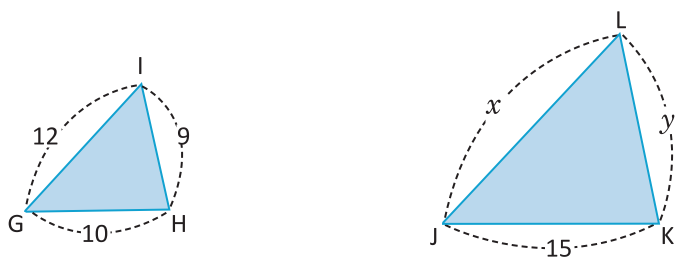
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Por lo tanto, los valores de x y y deben ser 6 y 5 respectivamente.

1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina si los triángulos ABC y DEF son semejantes. En caso de que lo sean calcula la razón de semejanza.

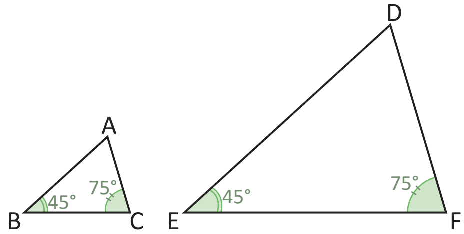


2. ¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos GHI y JKL sean semejantes?



2.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos

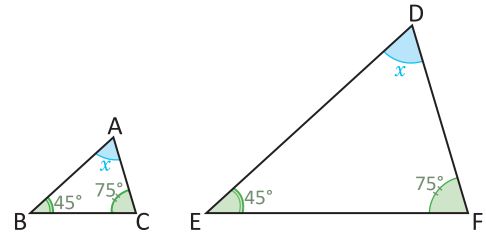
En los triángulos ABC y DEF: ∢B = ∢E y ∢C = ∢F. ¿Cuál es la medida de ∢A y ∢D? ¿Son ambos triángulos semejantes?



Los ángulos internos de todo triángulo suman 180°, y para que dos triángulos sean semejantes deben tener sus lados correspondientes proporcionales, y sus ángulos correspondientes congruentes.

Se denota por x la medida del tercer ángulo, que es igual en ambos triángulos. Utilizando la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$



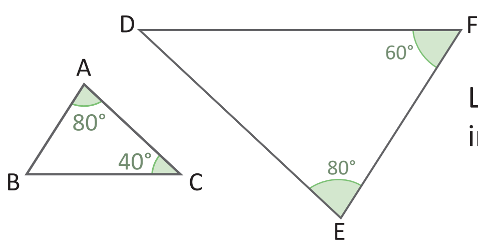
Por lo tanto, la medida del tercer ángulo en ambos triángulos es 60°.

Ahora mide con una regla las longitudes de los lados de cada triángulo que dibujaste en tu cuaderno y comprueba que los lados correspondientes son proporcionales.

Criterio AA:
Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

¿Son semejantes los triángulos mostrados en la figura? Justifica tu respuesta.

Calcula el valor del tercer ángulo en alguno de ellos.



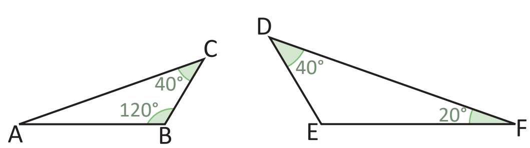
Los ángulos ∢A y ∢E son congruentes. Por propiedad de los ángulos internos de un triángulo:

$$∢A + ∢B + ∢C = 180°$$
$$∢B = 180° - 120°$$
$$∢B = 60°$$

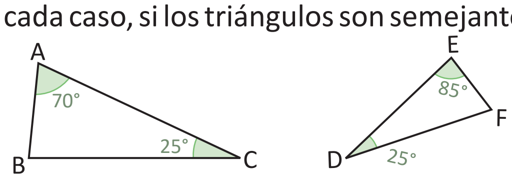
Entonces, ∢B y ∢F son congruentes. Por el segundo criterio de semejanza de triángulos, ΔABC ~ ΔEFD.

1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina, en cada caso, si los triángulos son semejantes.

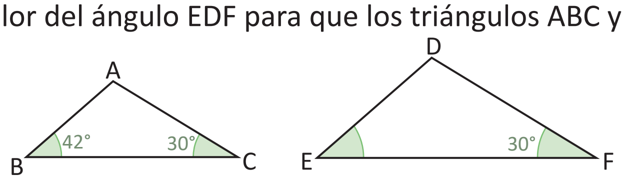
a)



b)



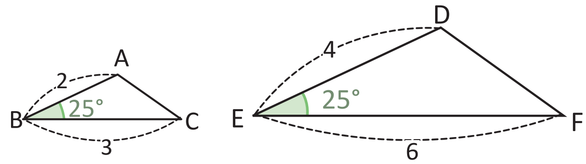
2. ¿Cuál debe ser el valor del ángulo EDF para que los triángulos ABC y DEF sean semejantes?



2.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este ángulo son proporcionales a razón 1:2. ¿Son semejantes?



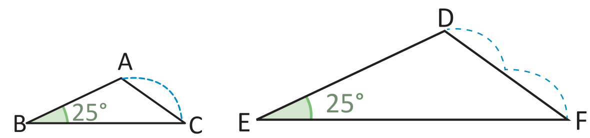
Utiliza regla (o compás) para calcular la razón entre $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$.

S

Con un compás se toma la medida del lado CA y se verifica (comparando con FD) que $\overline{CA}$ es la mitad de $\overline{FD}$.

Luego:

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$



Es decir, los triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales. Por el primer criterio de semejanza, ΔABC ~ ΔDEF.

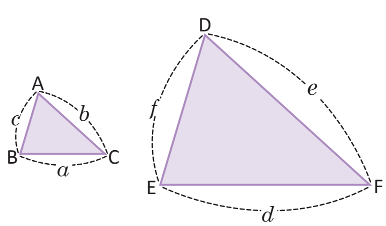
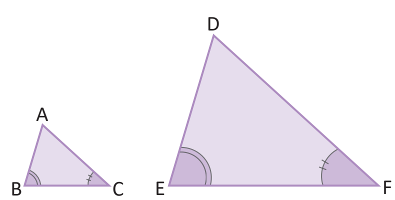
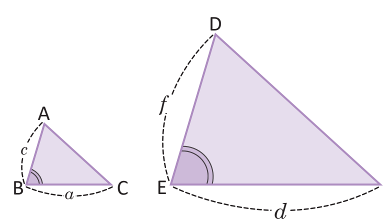
C

Criterio LAL:

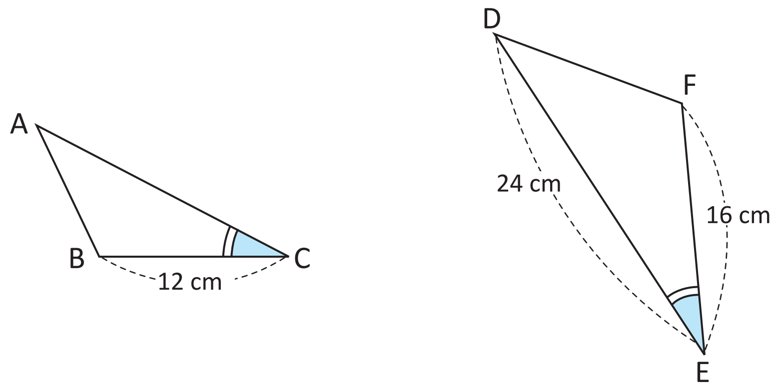
Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

A continuación, se resumen los tres criterios de semejanza de triángulos:

Criterios de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si cumplen al menos una de las siguientes condiciones:

1. Sus lados correspondientes son proporcionales (criterio LLL).	2. Dos pares de ángulos correspondientes son congruentes (criterio AA).	3. Un par de ángulos correspondientes es congruente y los lados adyacentes son proporcionales (criterio LAL).
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$	 ∢B = ∢E ∢C = ∢F	 ∢B = ∢E $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$

En los siguientes triángulos, los ángulos C y E son congruentes, ¿cuál debe ser la longitud del lado CA para que el ΔABC sea semejante al ΔDFE?



Como ya tienen un par de ángulos correspondientes congruentes (∢C y ∢E) entonces, para que sean semejantes, los lados adyacentes a estos ángulos deben ser proporcionales, es decir:

Se sustituyen los valores para encontrar CA:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$

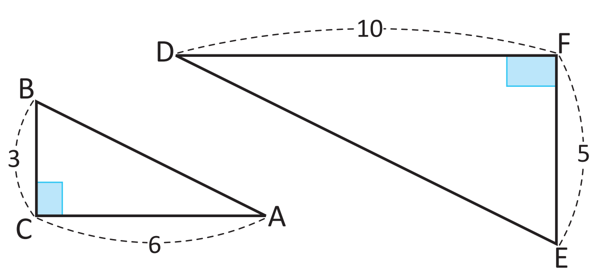
$$24\left(\frac{3}{4}\right) = CA$$

$$CA = 18$$

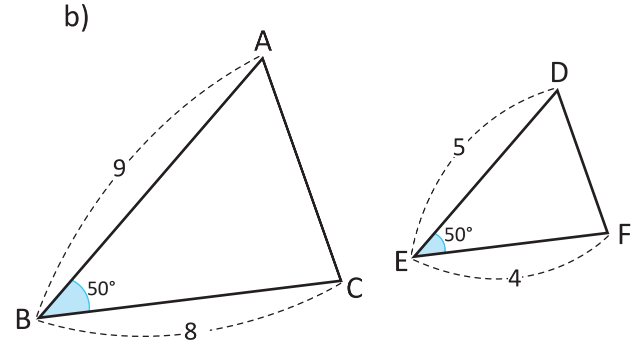
Por lo tanto, la longitud del lado CA debe ser 18 cm para que los triángulos ABC y DFE sean semejantes.

1. Usando el criterio LAL, determina si los siguientes triángulos son semejantes:

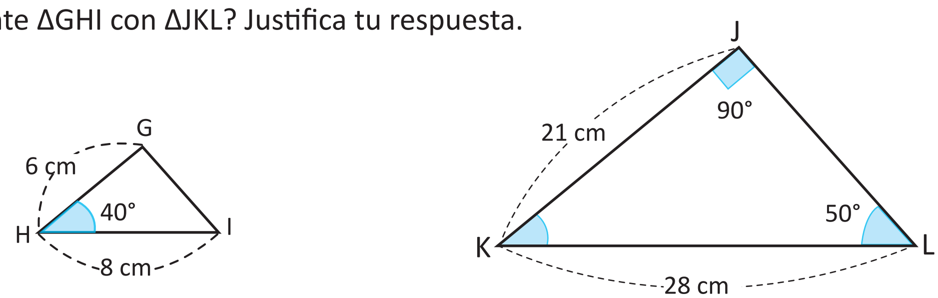
a)



b)

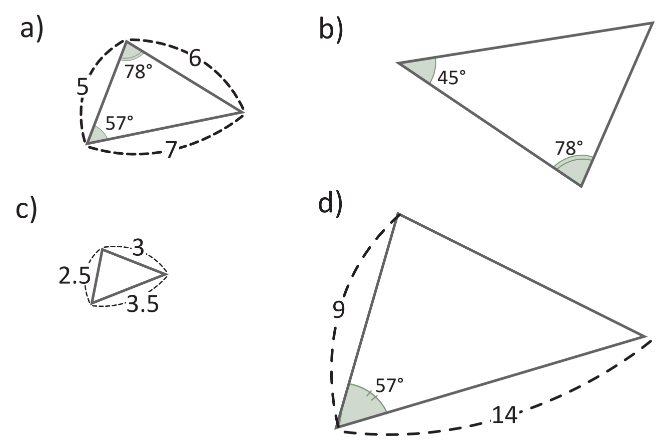


2. ¿Es semejante ΔGHI con ΔJKL? Justifica tu respuesta.

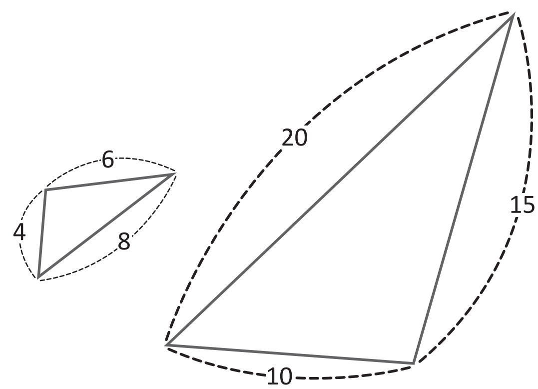


2.4 Practica lo aprendido

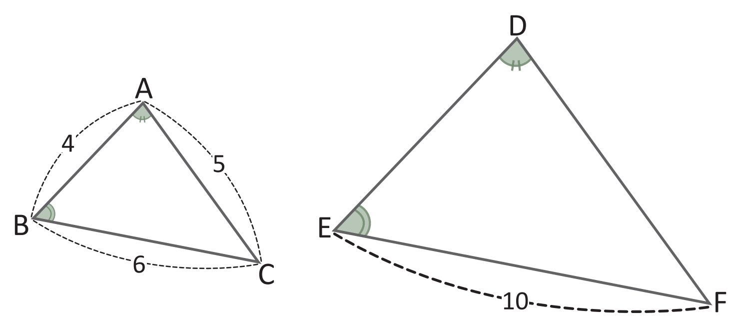
1. Determina cuáles de los siguientes triángulos son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste.



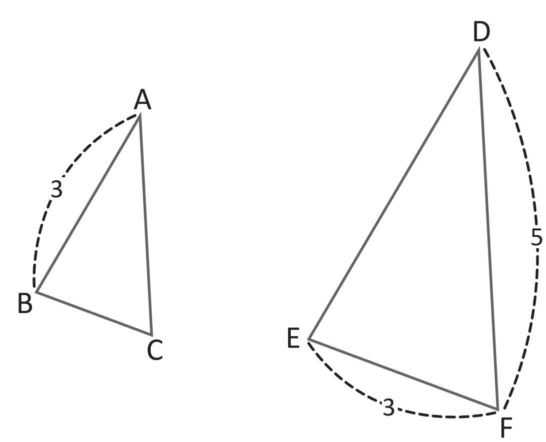
2. Verifica que los triángulos de la figura son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste y la razón de semejanza.



3. En la figura $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle E$
   a) ¿Cuál criterio puedes utilizar para justificar que los triángulos son semejantes?
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?

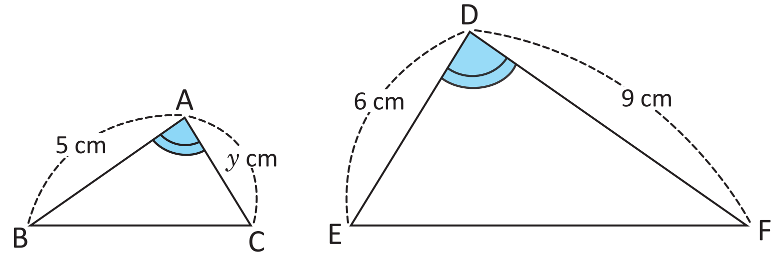


4. Los triángulos ABC y DEF son semejantes, a razón 2:3 ¿Cuáles son las medidas de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{DE}$?

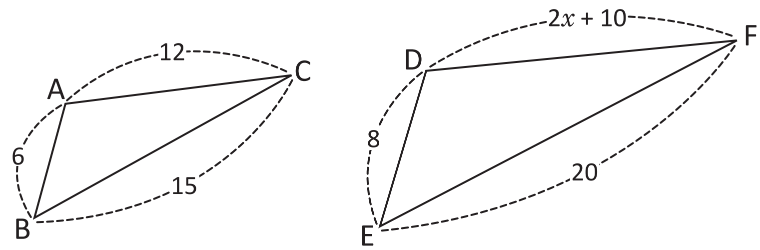


2.5 Practica lo aprendido

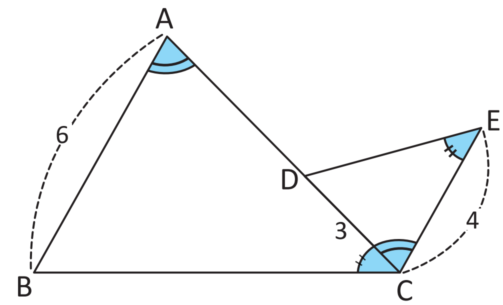
1. Los triángulos ABC y DFE cumplen ∢A = ∢D. Determina el valor de y de modo que los dos triángulos sean semejantes.



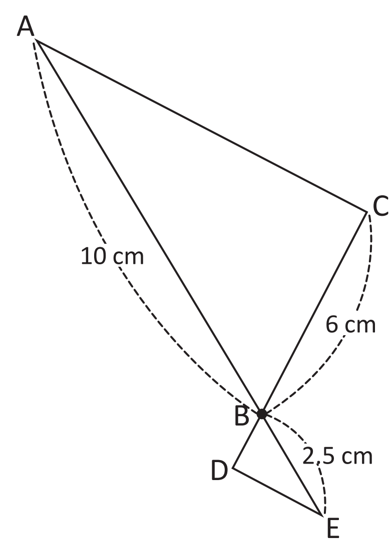
2. ¿Cuál debe ser el valor de x para que se cumpla $\Delta ABC \sim \Delta DEF$?



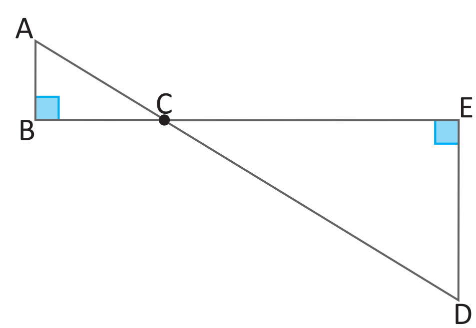
3. Calcula la longitud de $\overline{AD}$ si ∢BAC = ∢ECD y ∢ACB = ∢DEC.



4. En la figura, los segmentos AC y DE son paralelos.
   a) Utiliza criterios de semejanza para comprobar que los triángulos ABC y EBD son semejantes.
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{BD}$?



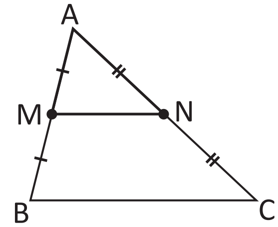
5. ¿Son semejantes los triángulos ABC y DEC? Justifica tu respuesta.



3.1 Teorema de la base media, parte 1

P

En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CA respectivamente. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces AM = $\frac{1}{2}$ AB y NA = $\frac{1}{2}$ CA.

S

En los triángulos AMN y ABC:

$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ (M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente).

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ (criterio LAL).

$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ (por la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos NMA y CBA son ángulos correspondientes entre paralelas).

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

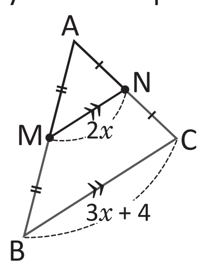
Por lo tanto, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.

C

Teorema de la base media: El segmento que une los puntos medios de dos lados en un triángulo cualquiera es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

E

¿Cuál es el valor de la incógnita x, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente?



Cuando dos segmentos son paralelos se coloca el símbolo » sobre los segmentos.

Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Se sustituyen los valores de los segmentos y se despeja la incógnita x:

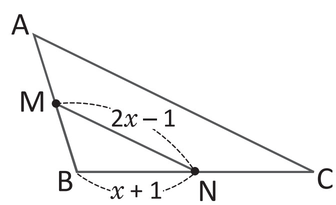
$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$4x - 3x = 4$$
$$x = 4$$

Por lo tanto, el valor de x es 4.

En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

a) Calcula el valor de x si BC = 8 cm.

b) ¿Cuál es la longitud del lado CA?

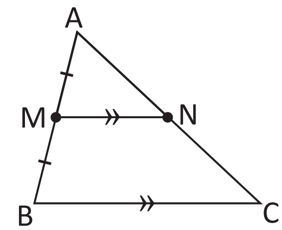


Unidad 5

3.2 Teorema de la base media, parte 2

P

En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$. A partir de M se traza un segmento paralelo a $\overline{BC}$ que corta al lado $\overline{CA}$ en el punto N. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que N es el punto medio de $\overline{CA}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



S

En los triángulos AMN y ABC:

$\measuredangle$MAN = $\measuredangle$BAC (es compartido por ambos triángulos).
$\measuredangle$NMA = $\measuredangle$CBA (ángulos correspondientes entre paralelas).

ΔAMN $\sim\Delta$ABC (Criterio AA)

$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ (M es el punto medio de $\overline{AB}$)

$\frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

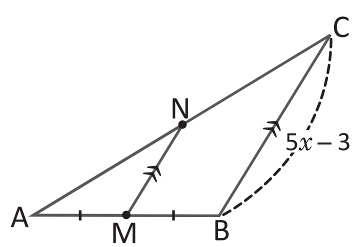
Por lo tanto, N es el punto medio de $\overline{CA}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.

C

Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo cualquiera, se traza una paralela a un segundo lado, entonces esta paralela corta al tercer lado en su punto medio y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralela.

E

Calcula el valor de x, si M es punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = 3.5.



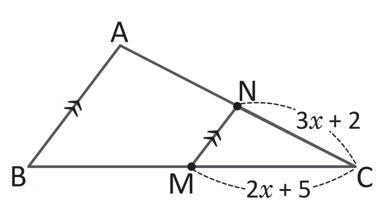
Si M es punto medio $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores correspondientes en lo anterior y despejando x:

$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$

Por lo tanto, el valor de x es 2.

En el triángulo ABC, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$.

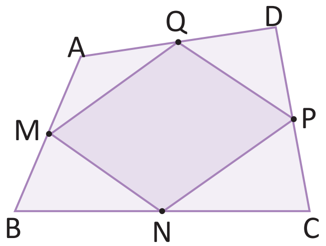
a) Calcula el valor de x si CA = 10 cm.
b) ¿Cuál es la longitud del lado BC?



3.3 Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero

P

ABCD es un cuadrilátero y M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Utilizando el teorema de la base media justifica que MNPQ es paralelogramo.



Traza las diagonales del cuadrilátero.

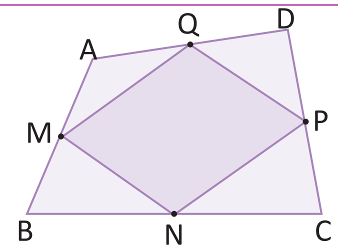
S

Se traza la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero:

$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media).

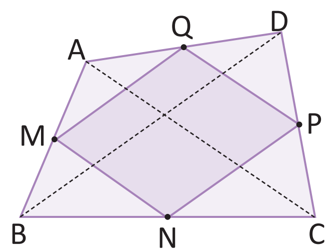
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ (por el teorema de la base media).

Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.



De forma similar se llega a $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, al trazar la diagonal $\overline{AC}$ del trapecio.

Por lo tanto, como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, MNPQ es paralelogramo.

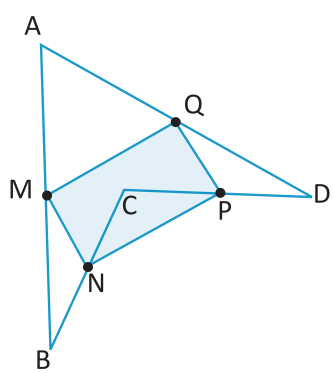


C

Al unir los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero, el resultado es un paralelogramo.

Este resultado se conoce como **Teorema de Varignon**.

En el cuadrilátero ABCD, M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Demuestra que MNPQ es un paralelogramo.



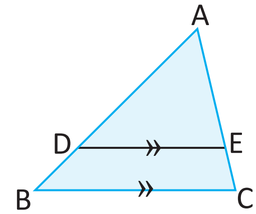
El cuadrilátero ABCD del ejercicio se llama **cuadrilátero cóncavo**, ya que posee un ángulo mayor a 180° ($\measuredangle$DCB).

3.4 Semejanza utilizando segmentos paralalelos, parte 1

P

En el triángulo ABC se traza el segmento DE paralelo al lado BC ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$).
¿Son semejantes los triángulos ADE y ABC? Justifica tu respuesta.

¿Cuál criterio de semejanza de triángulos puedes utilizar?



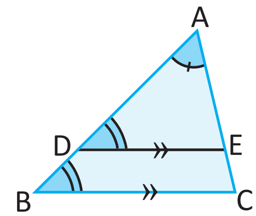
S

En los triángulos ADE y ABC:

$\measuredangle$DAE = $\measuredangle$BAC (es compartido por ambos triángulos).

$\measuredangle$EDA = $\measuredangle$CBA (ángulos correspondientes entre paralelas).

Por lo tanto, ΔADE~ ΔABC (criterio AA).

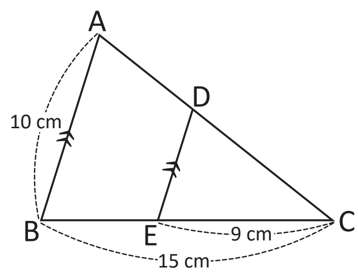


C

En un triángulo cualquiera, todo segmento paralelo a uno de sus lados forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante al original y se tiene que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

E

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado AB, ¿cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



Si el segmento DE es paralelo al lado AB, entonces, por el resultado anterior los triángulos DEC y ABC son semejantes. Luego:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

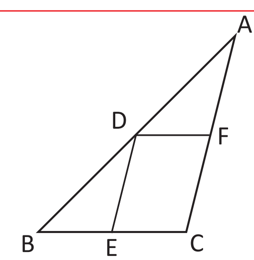
Se sustituyen los valores de AB, EC y BC en lo anterior: $\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

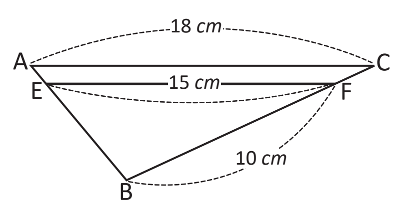
Por lo tanto, la longitud de $\overline{DE}$ es 6 cm.

$$DE = 6$$

1. En el triángulo ABC: $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.
   a) ¿Qué triángulos de los que se forman son semejantes entre sí?
   b) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?



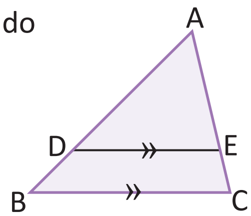
2. En el triángulo ABC, FE es paralelo al lado CA, ¿cuál es la longitud del lado BC?



3.5 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2

P

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado BC. Comprueba que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



Sustituye AB por AD + DB y AC por AE + EC.

S

Por el resultado de la clase anterior se tiene que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ Sustituir AB por AD + DB y AC por AE + EC,

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ restando 1 de ambos lados,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ tomando el recíproco de ambos lados.

Las siguientes proposiciones son equivalentes (una implica las otras):

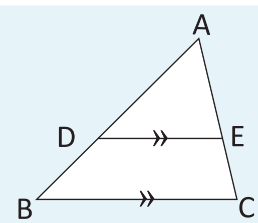
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

C

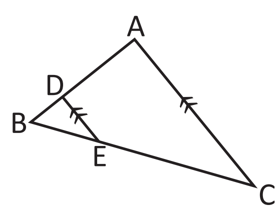
Teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

En el ΔABC, si $DE \parallel BC$ entonces se tiene que

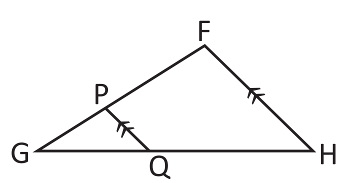
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}\ ,\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. Calcula la longitud de $\overline{EC}$ en el triángulo ABC, si BD = 4 cm, DA = 10 cm y BE = 6 cm.



2. En el triángulo FGH $\overline{PQ} \parallel \overline{FH}$. Calcula la longitud del lado FG, si PG = 6 cm, GQ = 8 cm y QH = 12 cm.

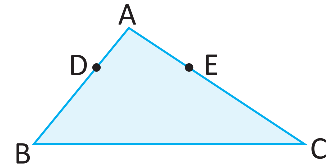


Unidad 5

3.6 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1

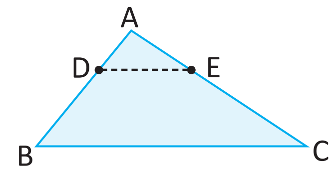
P

En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



S

Se traza $\overline{DE}$ para formar el triángulo ADE.



En los triángulos ADE y ABC:

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (lo indica el enunciado del problema).

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (criterio LAL).

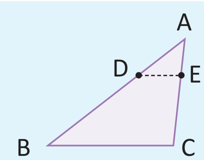
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (por la semejanza de los triángulos ADE y ABC).

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos EDA y CBA son ángulos correspondientes).

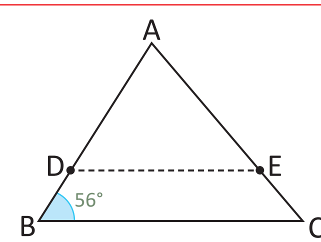
Por lo tanto, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

C

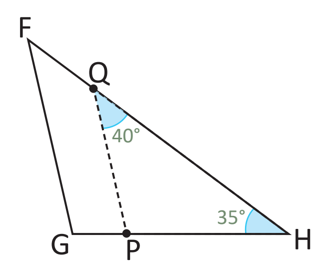
Dado un triángulo ABC, si D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tales que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



1. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre los lados AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. ¿Cuál es la medida del $\sphericalangle EDA$? Justifica tu respuesta.

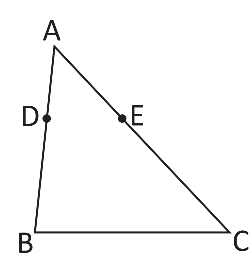


2. En el triángulo FGH, los puntos P y Q están sobre los lados HG y HF respectivamente, y satisfacen $\frac{HP}{HG} = \frac{HQ}{HF}$, ¿cuál es la medida del $\sphericalangle HGF$? Justifica tu respuesta.



3. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Comprueba que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

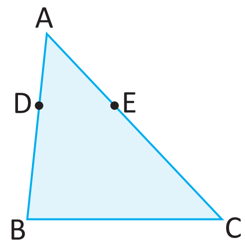
Sustituye DB por AB – AD y EC por AC – AE



3.7 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2

P

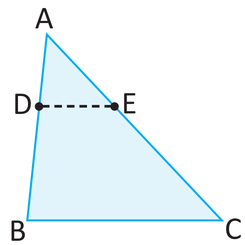
En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



S

Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces también se cumple $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

De lo visto en la clase anterior, DE||BC



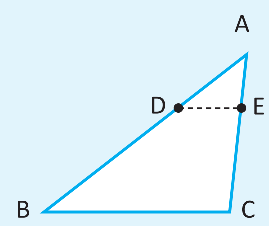
C

Teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo

En un triángulo ABC, D y E son puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

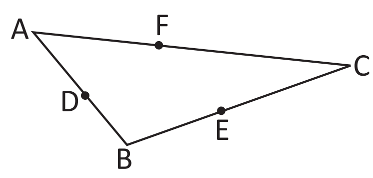
a) Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b) Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

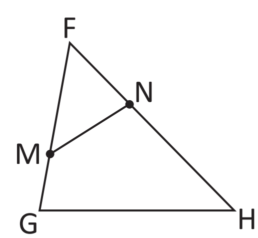


1. En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ y $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$.

   a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AC? Justifica tu respuesta.
   b) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AB? Justifica tu respuesta.
   c) ¿Es $\overline{DF}$ paralelo a $\overline{BC}$?



2. En el triángulo FGH se cumple lo siguiente: $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$. ¿Es el triángulo FNM semejante al triángulo FGH? Justifica tu respuesta.

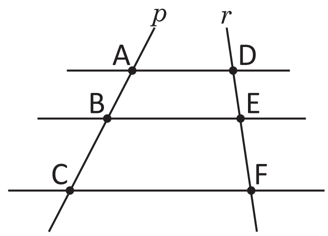


3.8 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

P

Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.

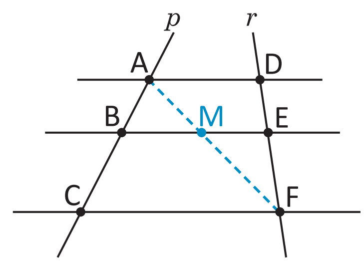
Demuestra que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Traza el segmento AF y utiliza el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

S

Se traza el segmento AF y se denota por M al punto de intersección entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.



En el triángulo ACF por el teorema sobre segmentos paralelos, se tiene que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$$

En el triángulo AFD por el teorema sobre segmentos paralelos se tiene que

$$\frac{FM}{MA} = \frac{FE}{ED}$$

Tomando el recíproco de ambos lados, $\frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE}$.

Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$.

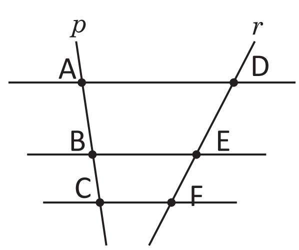
C

Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo

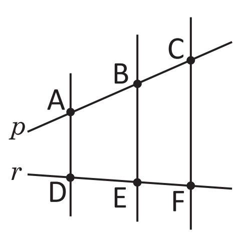
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, entonces los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Este resultado es conocido como el Teorema de Thales.

1. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.
   a) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?
   b) Demuestra que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

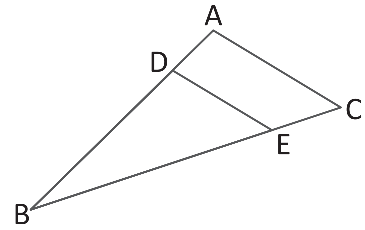


2. Las rectas p y r son cortadas por tres paralelas como se muestra en la figura. Si AB = 3, DE = 2 y EF = 1, ¿cuál es el valor de BC?

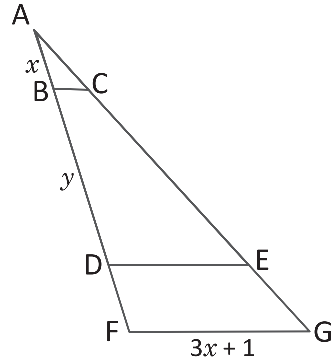


3.9 Practica lo aprendido

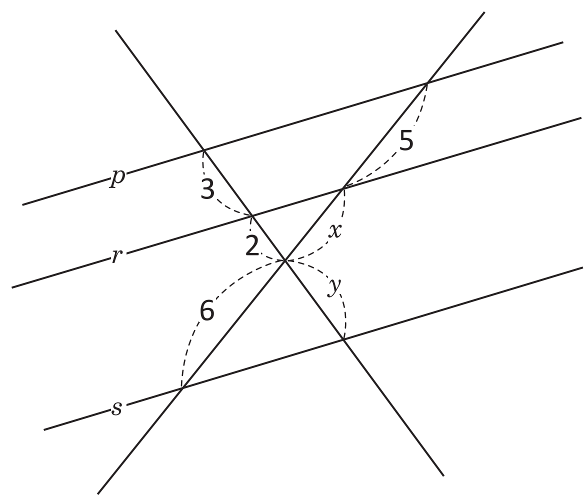
1. Calcula la longitud de $\overline{DE}$ si $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, AC = 2, BD = 3 y DA = 1.



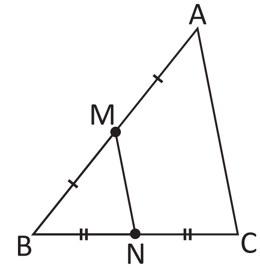
2. En el ΔAFG se cumple: $\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$. Calcula los valores de x y y si BC = 0.8 cm, DE = 3 cm y AF = 5 cm.



3. Las rectas p, r y s son paralelas. Calcula los valores de x y y.



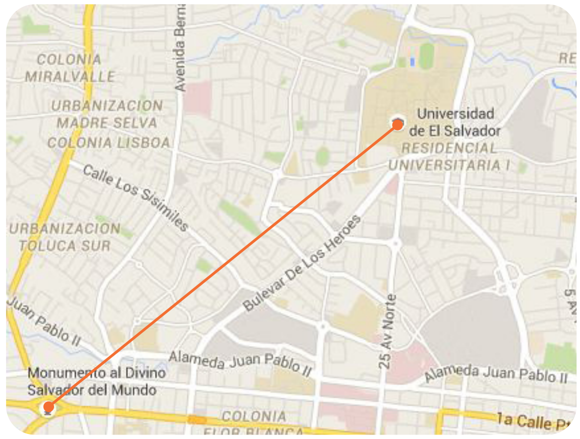
4. En el triángulo ABC de la figura, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si el perímetro del triángulo MBN es 8, ¿cuál es el perímetro de ΔABC?



4.1 Distancia entre puntos sobre un mapa

P

Ana señala dos puntos sobre un mapa de San Salvador y mide con una regla la distancia entre ellos. Obteniendo como resultado 6 cm. Si el mapa se encuentra a una escala numérica de 1:50 000, ¿cuál es la distancia real entre los dos lugares señalados?



La escala numérica indica que un centímetro en el mapa equivale a 50 000 centímetros en la realidad.

S

Se denota por x la distancia real entre los dos lugares. Entonces:

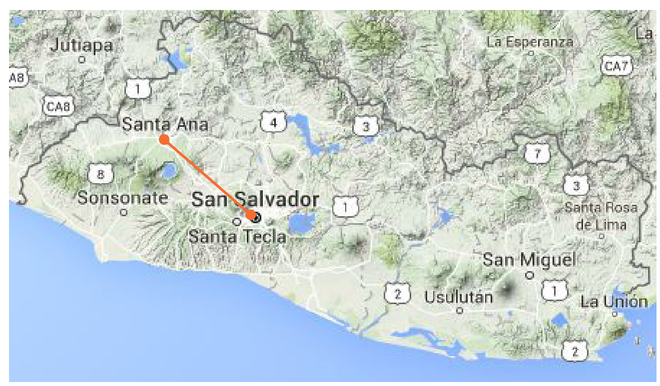
$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

Se despeja x de la ecuación anterior: $6(50\,000) = x$

$$x = 300\,000$$

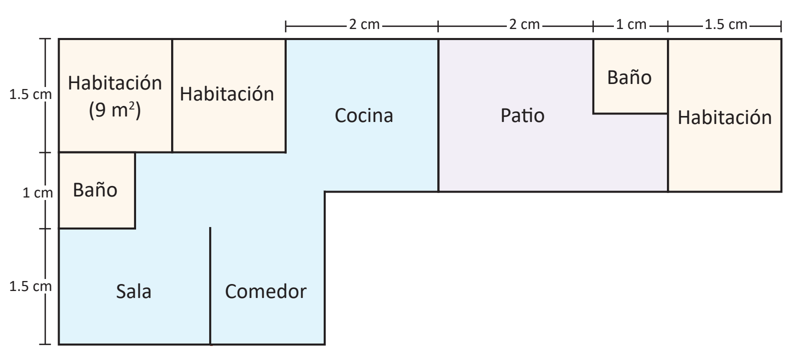
La distancia entre el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador es 300 000 cm o 3 km.

1. ¿A qué escala se encuentra elaborado el siguiente mapa de El Salvador, si la distancia real entre Santa Ana y San Salvador es 48 km y el segmento trazado sobre el mapa mide 1.5 cm?



Ambas medidas deben estar en el mismo sistema de unidades.

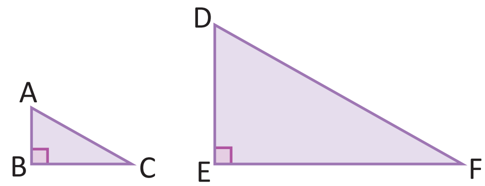
2. En el siguiente plano:
   a) ¿Cuál es la escala?
   b) ¿Cuál es el área (en m^2) del patio?
   c) ¿Cuál es el área total?



Para conocer la escala mide con una regla las longitudes del dibujo.

4.2 Áreas de polígonos semejantes

Los triángulos ABC y DEF son semejantes a razón 1:3. ¿Cuál es la razón entre las áreas del ΔABC y ΔDEF?



El área de un triángulo es:

$$\frac{(base)(altura)}{2}$$

El área del triángulo ABC es $\frac{(BC)(AB)}{2}$, y la del triángulo DEF es $\frac{(EF)(DE)}{2}$. Entonces, la razón entre las áreas se calcula:

$$\begin{aligned}\frac{(ABC)}{(DEF)} &= \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}}\\ &= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}\\ &= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)\end{aligned}$$

(ABC) Indica el área del triángulo ABC. Entonces, $\frac{(ABC)}{(DEF)}$ es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DEF.

Por hipótesis, $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$. Se sustituyen en la razón entre áreas:

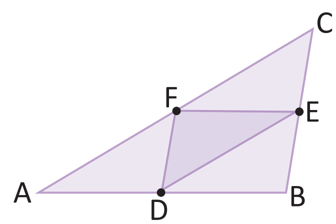
$$\begin{aligned}\frac{(ABC)}{(DEF)} &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón entre las áreas de ΔABC y ΔDEF es igual a $\frac{1}{9}$ (el cuadrado de la razón de semejanza).

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

1. La razón entre dos triángulos semejantes es 2:3, ¿cuál es la razón entre sus áreas?

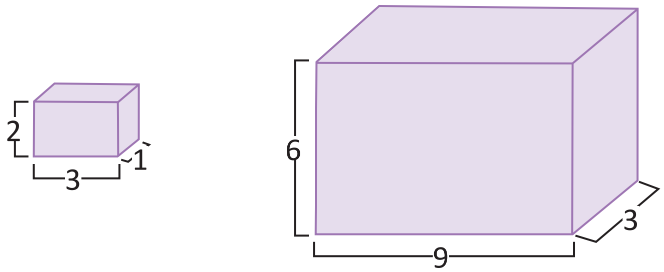
2. En el triángulo ABC, D, E y F son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, ¿cuál es la razón entre las áreas del triángulo ABC y el triángulo DEF?



Unidad 5

4.3 Volumen de sólidos semejantes

Los prismas rectangulares de la figura son semejantes. Encuentra la razón entre los volúmenes.



El volumen de un prisma rectangular se calcula: (altura)(largo)(ancho).

Se denota por V_1 el volumen del prisma pequeño y por V_2 el volumen del prisma grande. Entonces:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Al simplificar lo anterior se obtiene:

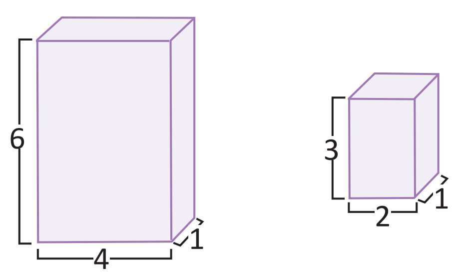
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Por lo tanto, la razón entre los volúmenes del prisma pequeño y del grande es $\frac{1}{27}$.

La razón entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

1. ¿Son semejantes los siguientes prismas rectangulares? Justifica tu respuesta.



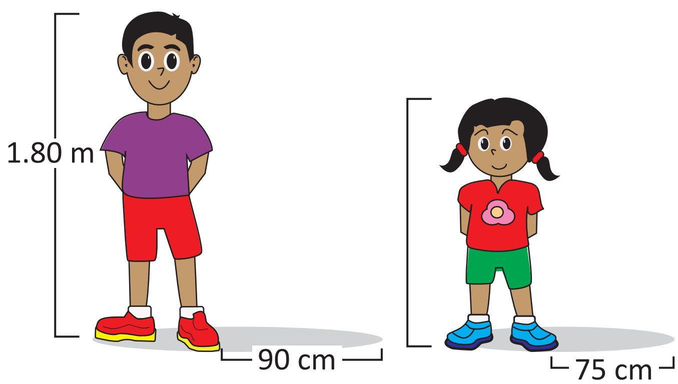
2. Dos cilindros circulares rectos son semejantes a razón 1:4, ¿cuál es la razón entre sus volúmenes?

4.4 Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos

P

A cierta hora del día, José y Marta se colocan de pie en el patio de su escuela. José proyecta una sombra de 90 cm de longitud, mientras que la sombra de Marta mide 75 cm de longitud. Si la estatura de José es 1.80 m, ¿cuál es la estatura de Marta?

> En una misma hora, las alturas de dos objetos son proporcionales a sus sombras.



S

Con las estaturas de ambos y las longitudes de las sombras pueden formarse dos triángulos rectángulos semejantes (por el criterio AA). Primero, se convierte a centímetros la estatura de José:

$$1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$

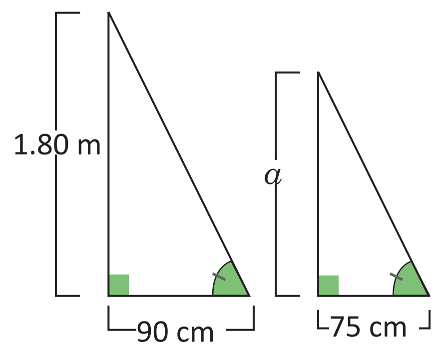
Se denota por a la estatura en cm de Marta. Por ser triángulos semejantes:

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}$$

Se despeja a de la ecuación anterior:

$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$

$$a = 150$$

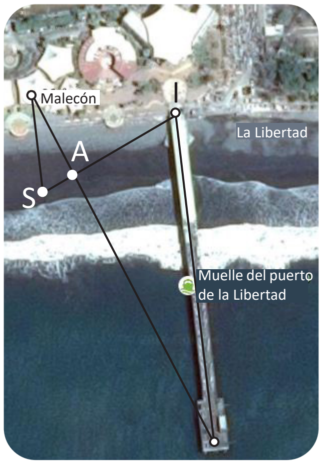


Por lo tanto, la estatura de Marta es 150 cm o 1.50 m.

1. ¿Cuál es la altura de la torre del Ministerio de Gobernación, si a determinada hora del día proyecta una sombra de 40 m mientras que un hombre de 1.82 m de estatura proyecta una sombra de 1.40 m a esa misma hora?

2. Antonio (A) se encuentra en la playa a 24 m de un salvavidas (S). Si la distancia entre el Malecón y el salvavidas es 60 m y la longitud del muelle es 200 m, ¿cuál es la distancia entre Antonio y el inicio del muelle (I)?

> En la figura, el segmento que une el Malecón con el punto S es paralelo al muelle.

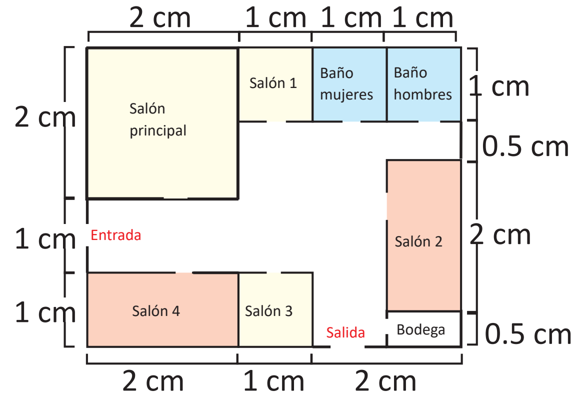


Unidad 5

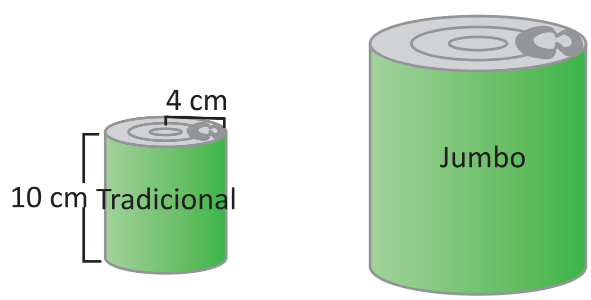
4.5 Practica lo aprendido

1. El siguiente plano de un museo se encuentra a una escala numérica de 1:200; los baños y los salones 1 y 3 tienen las mismas dimensiones, mientras que las dimensiones del salón 2 son iguales a las del salón 4.

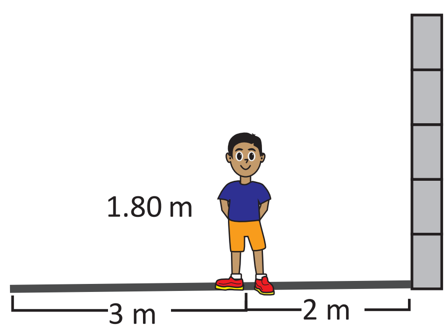
   a) ¿Cuál es el área real del salón principal?
   b) ¿Cuál es el área del salón 1?
   c) Si se planea enladrillar todo el suelo del museo con baldosas de 25 cm × 25 cm, ¿cuántas de estas se necesitarán?



2. Doña Carmen vende frutas y jugos enlatados. Para ello utiliza dos tipos de latas: la tradicional con 4 cm de radio por 10 cm de alto y la jumbo cuyo volumen es de 540π cm^3. Si ambas latas son semejantes, ¿cuáles son las dimensiones del radio y la altura de la lata jumbo?

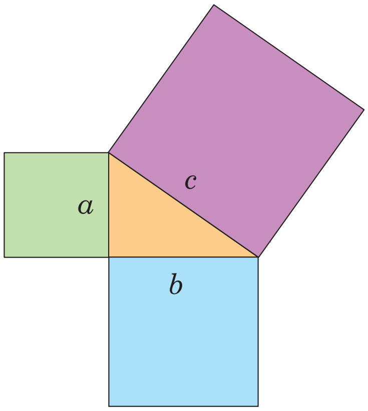


3. José se coloca a dos metros de un muro de tal forma que el extremo de su sombra coincide con el extremo de la sombra del muro. Si la estatura de José es 1.80 m y la longitud de su sombra es 3 m, ¿cuál es la altura del muro?



Teorema de Pitágoras

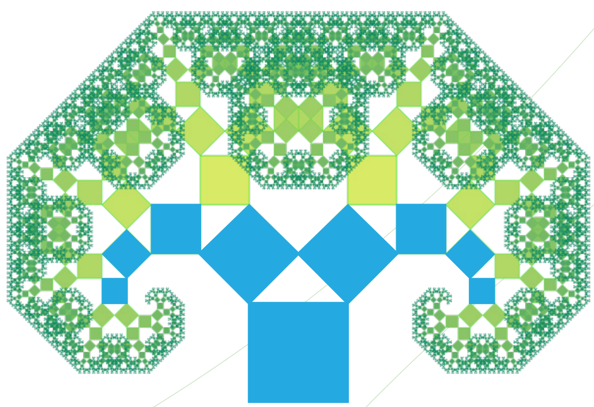
Unidad 6



Representación geométrica del Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es uno de los teoremas que más ha maravillado a todas las civilizaciones a lo largo de la historia. Algunos historiadores sugieren que en Babilonia por el año 1600 a.C., se calculaban las diagonales de ciertas figuras utilizando este teorema, sin embargo, la primera demostración formal conocida se le otorga usualmente al filósofo matemático griego Pitágoras de Samos, considerado el primer matemático puro. Este teorema cuenta con una gran cantidad de demostraciones realizadas por personajes importantes de la ciencia y la matemática a lo largo de toda la historia.

En la antigüedad se utilizaba el teorema de Pitágoras para medir terrenos en agricultura, la altura de ciertos objetos, obtener el volumen de sólidos como pirámides y conos. En la actualidad, el teorema sigue siendo indispensable en toda área donde es necesario el cálculo de longitudes, como en ingeniería, agricultura, física, astronomía y hasta en las artes. En la matemática, el teorema permitió el fortalecimiento de algunas áreas como la geometría y el cálculo, además del descubrimiento de los números irracionales.



Árbol pitagórico. Construido con una sucesión de triángulos rectángulos y cuadrados sobre los lados.

En esta unidad estudiarás el teorema de Pitágoras, algunas de sus demostraciones, la resolución de problemas matemáticos por medio de este teorema y su aplicación a situaciones de la vida cotidiana.

1.1 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1

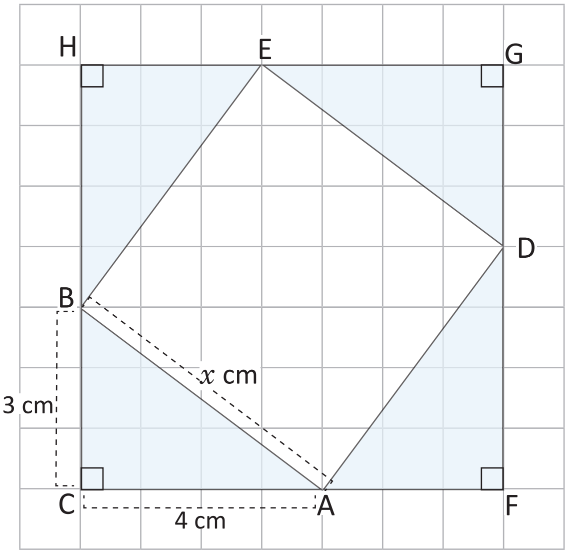
En la figura, el ΔABC, ΔDAF, ΔEDG y ΔBEH son triángulos rectángulos y congruentes.

a) Encuentra el área del cuadrado CFGH.

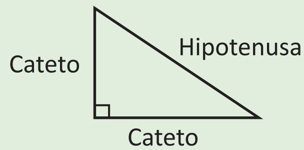
b) Encuentra el área del cuadrilátero ADEB.

c) Demuestra que el cuadrilátero ADEB es un cuadrado verificando $\measuredangle BAD = 90°$.

d) Encuentra la medida del lado AB.



En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo de 90°, se llaman **catetos**, mientras que el lado que es opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.



a) $CF = 4 + 3 = 7$(cm), por lo tanto, el área es: $7^2 = 49$(cm^2).

b) El área del cuadrilátero ADEB se puede calcular restando al área del cuadrado FGHC, las áreas de los cuatro triángulos que son congruentes.

$$\begin{aligned}(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4 \\ &= (4 + 3)^2 - \frac{3 \times 4}{2} \times 4 \\ &= 49 - 24 \\ &= 25\ (\text{cm})^2\end{aligned}$$

c) $\measuredangle BAD = 180° - (\measuredangle CAB + \measuredangle DAF)$

$= 180° - (\measuredangle CAB + \measuredangle ABC)$, dado que $\Delta ABC \cong \Delta DAF$

$= 180° - 90° = 90°$

De la misma manera se tiene que $\measuredangle ADE = \measuredangle DEB = \measuredangle EBA = 90°$.

En el cuadrilátero ADEB, los lados son congruentes y los ángulos son congruentes así que es un cuadrado.

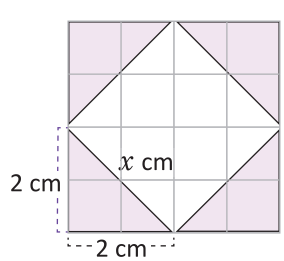
d) El área del cuadrado ADEB es AB^2, por otra parte el área es 25 cm^2. Luego $AB^2 = 25$, $AB = 5$(cm).

Formando cuadrados con 4 triángulos rectángulos congruentes y calculando el área se puede calcular la medida del la hipotenusa sabiendo los catetos.

Los registros arqueológicos indican que por el año 2000 a. C., los egipcios unían 12 segmentos de soga de la misma longitud. Estiraban cinco de estos segmentos consecutivos luego tirando del lazo formaban un triángulo rígido con un ángulo recto. Este triángulo de lados 3, 4 y 5 es conocido como el triángulo sagrado egipcio.

Dunham, W. (2002). *Viaje a través de los genios*.

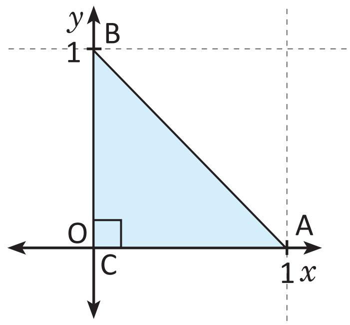
En la siguiente figura, encuentra el valor de x:



1.2 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2

P

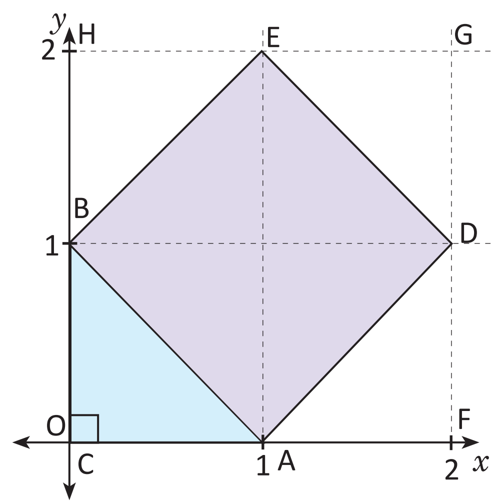
Encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0).



Un punto en el plano cartesiano se representa por (a, b), donde a es el valor en el eje x, y b en el eje y.

S

Se construye un cuadrado que contenga como uno de sus lados la hipotenusa del triángulo ABC, es decir que tenga como lado AB, este cuadrado tendrá como vértices los puntos A(1, 0), D(2, 1), E(1, 2) y B(0, 1).



Construyendo triángulos congruentes al triángulo ABC, se forma el cuadrado FGHC. El área del cuadrado ADEB se obtiene restando al área del cuadrado FGHC, las áreas de los cuatro triángulos.

$$\begin{aligned}(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4\\ &= (2)^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4\\ &= 4 - 2\\ &= 2\end{aligned}$$

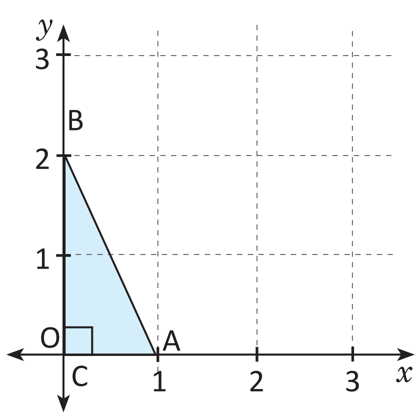
Entonces $AB^2 = 2$ (por el área de ADEB).
Por lo tanto $AB = \sqrt{2}$ (raíz cuadrada positiva).

C

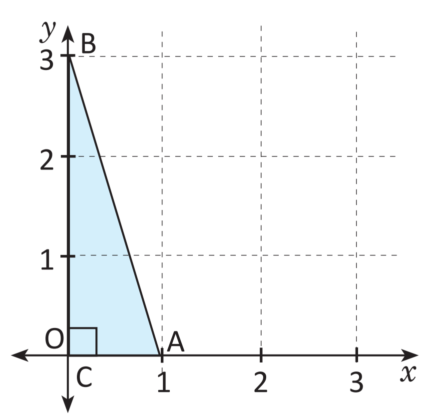
En el triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0),B(0, 1) y C(0, 0), la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

Encuentra la hipotenusa para los triángulos formados por los vértices de cada literal.

a) A(1, 0), B(0, 2) y C(0, 0)



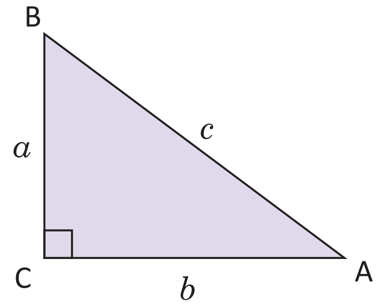
b) A(1, 0),B(0, 3) y C(0, 0)



1.3 Teorema de Pitágoras, parte 1

P

Dado el ΔABC, tal que CA = b, AB = c y BC = a; con ∢BCA = 90°. Demuestra que $a^2 + b^2 = c^2$, aplicando el procedimiento de la clase 1.

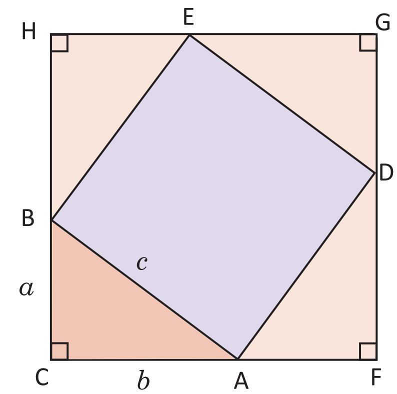


S

Construyendo un cuadrado que tenga como uno de sus lados la hipotenusa AB.

Al construir tres triángulos rectángulos congruentes al ΔABC, cuyas hipotenusas sean los tres lados restantes del cuadrado ADEB, se forma el cuadrado CFGH en el que cada uno de sus lados mide $a + b$.

Si se encuentra el área del cuadrado CFGH de dos formas distintas:

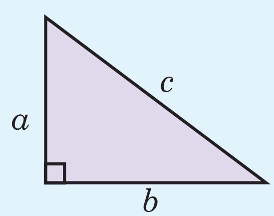


Forma 1.
$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

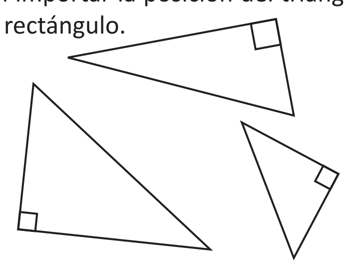
Forma 2.
$A_2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$.
Como el área es la misma se tiene que $A_1 = A_2$.
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

C

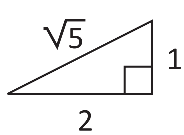
En todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa, es decir, si los lados del triángulo son a, b y c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Este resultado es conocido como el **teorema de Pitágoras**.

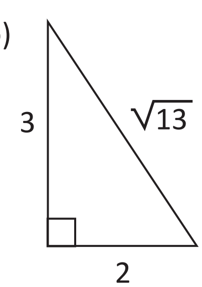


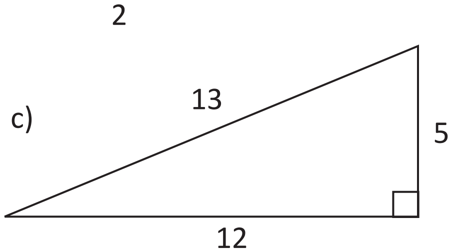
El teorema de Pitágoras se cumple sin importar la posición del triángulo rectángulo.



Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

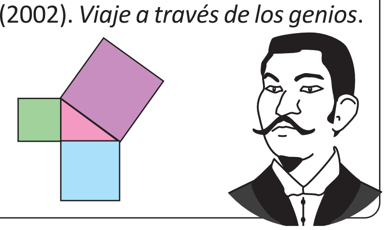
a)


b)


c)


Euclides (300 a. C.) enunció la siguiente proposición: "En los triángulos rectángulos, el área del cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros lados del triángulo".

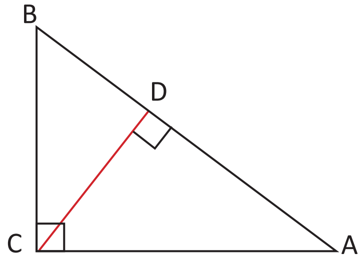
Dunham, W. (2002). *Viaje a través de los genios*.



1.4 Teorema de Pitágoras, parte 2

P

Utiliza semejanza de los triángulos ΔABC ~ ΔCBD y ΔABC ~ ΔACD para establecer que en el ΔABC, se cumple que $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



S

Trazando la altura del vértice C al lado AB, se forman los triángulos rectángulos ADC y CDB.

ΔABC ~ ΔCBD (tiene dos ángulos congruentes).

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (por la semejanza de los triángulos ABC y CBD).

Entonces, $BC^2 = AB \times DB$ (propiedad fundamental de las proporciones).

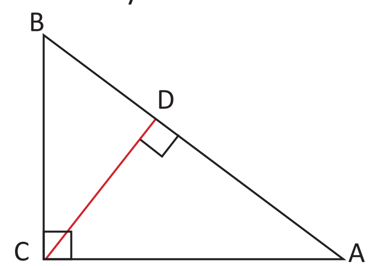
ΔABC ~ ΔACD (tiene dos ángulos congruentes).

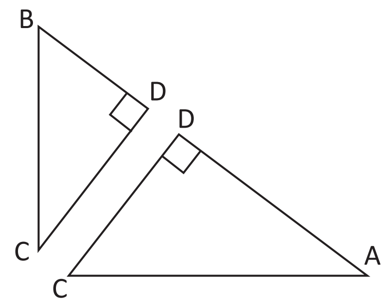
$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (por la semejanza de los triángulos ABC y ADC).

Entonces, $CA^2 = AB \times AD$ (propiedad fundamental de las proporciones).

Luego, $CA^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times DB = AB \times (AD + DB) = AB^2$.

Por lo tanto, $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



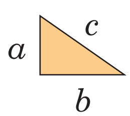


C

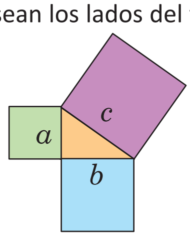
Se puede utilizar semejanza de triángulos para demostrar el teorema de Pitágoras.

Verificación del teorema de Pitágoras con recortes: Verifica que el área del cuadrado más grande (de área c^2) es igual a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados (cuyas áreas son b^2 y a^2).

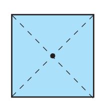
Dibuja un triángulo rectángulo.



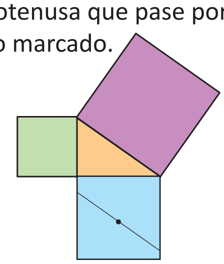
Recorta tres cuadrados con páginas de color, cuyos lados sean los lados del triángulo.



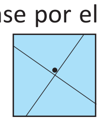
Dobla el cuadrado celeste por sus diagonales; desdobla y marca su punto de intersección.



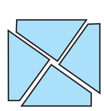
Traza un segmento paralelo a la hipotenusa que pase por el punto marcado.



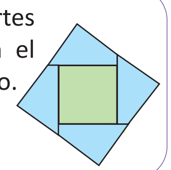
Traza un segmento perpendicular a este último y que pase por el mismo punto.



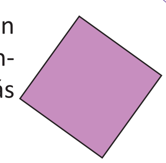
Corta las 4 partes en que ha quedado dividido el cuadrado celeste.



Une las 4 partes cortadas con el otro cuadrado.



Se forma un cuadrado congruente al más grande.

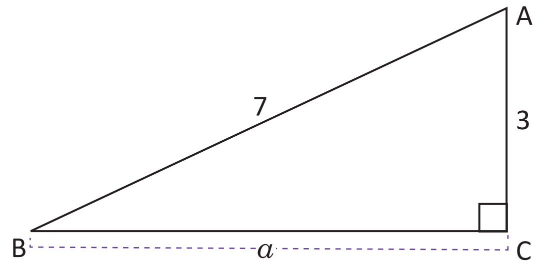


Unidad 6

1.5 Cálculo de la medida de un cateto

P

En el siguiente triángulo rectángulo ABC, encuentra la medida del cateto BC, es decir, el valor de a.



S

Como el triángulo es rectángulo se cumple que $3^2 + a^2 = 7^2$ (teorema de Pitágoras)

Despejando a^2, $\quad a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40.$

Por definición de raíz cuadrada, $\quad a^2 = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, como $a > 0$.

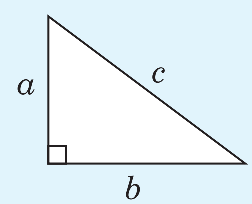
Por lo tanto: $\quad a = 2\sqrt{10}$.

En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa mide 7 y el cateto 3, el segundo cateto mide $2\sqrt{10}$.

C

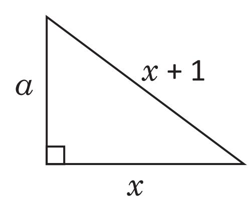
En general, en un triángulo rectángulo de lados a, b y c, debido a que se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, la hipotenusa y los catetos se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



E

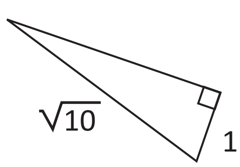
Determina el valor del cateto a en términos de x. Considera $x > 0$.

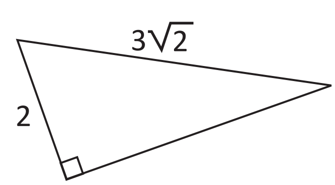


Entonces, $a^2 = (x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$.

Por lo tanto, $a = \sqrt{2x + 1}$.

Encuentra en los siguientes triángulos la longitud de los lados desconocidos:

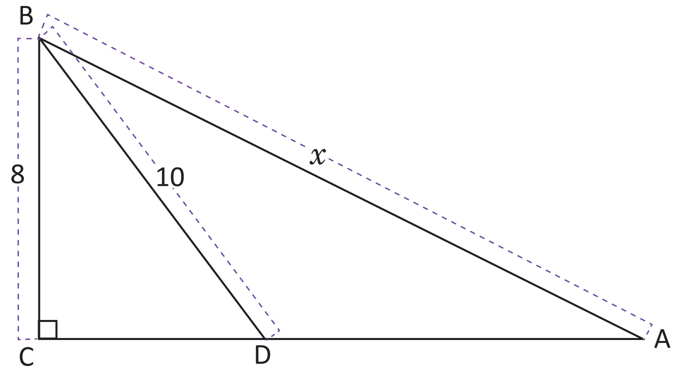




1.6 Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras

P

Encuentra la medida de la hipotenusa del triángulo ABC, sabiendo que el triángulo ABD es isósceles.



S

Para calcular el valor de x, se necesita saber la medida del cateto CA.

Debido a que el ΔABD es isósceles, el lado DA es 10.

Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔDBC.

$$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\Rightarrow CD^2 = 36, \text{ con } CD > 0$$
$$\Rightarrow CD = 6$$

Dado que CA = CD + DA, se tiene que CA = 10 + 6 = 16.

Finalmente se aplica el teorema de Pitágoras en el ΔABC:

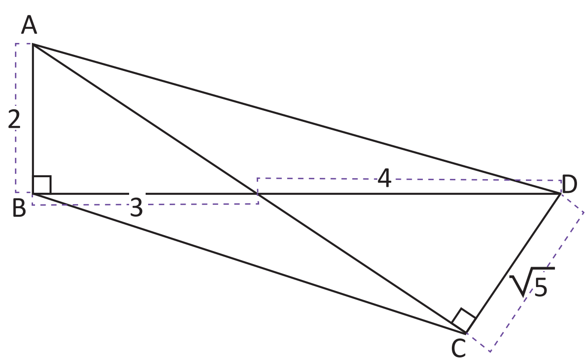
$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$

Por lo tanto $x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

C

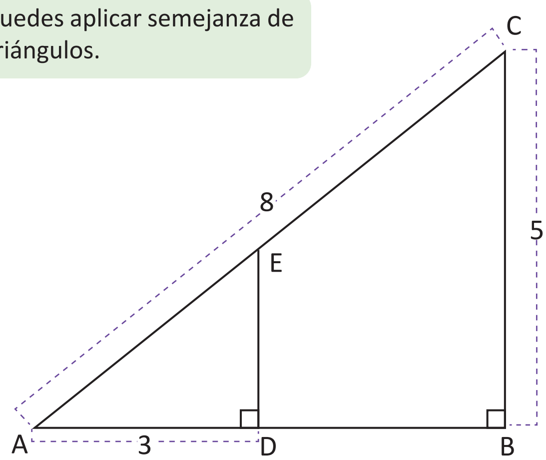
Para resolver problemas utilizando el teorema de Pitágoras, identifica los triángulos rectángulos en la figura y utiliza los valores que se proporcionan en ella, para determinar la medida de los lados desconocidos.

1. Determina la medida de la diagonal AC en el cuadrilátero ABCD.



2. Calcula la medida de la hipotenusa del ΔADE.

Puedes aplicar semejanza de triángulos.

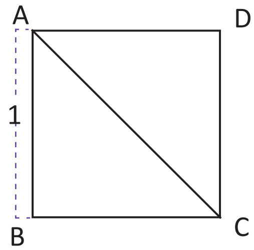


Unidad 6

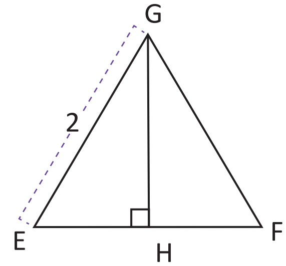
1.7 Triángulos notables

P

1. ¿Cuánto mide la diagonal CA del cuadrado ABCD, cuyos lados miden 1?, ¿cuánto miden los ángulos del ΔABC?



2. ¿Cuánto mide la altura del triángulo equilátero EFG cuyos lados miden 2?, ¿cuánto miden los ángulos del ΔEFG?



La altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que va desde el vértice opuesto a este (o a su prolongación).

S

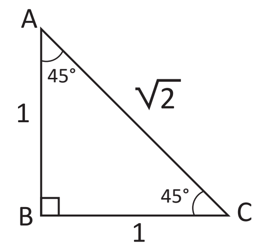
1. La diagonal CA es la hipotenusa de los triángulos rectángulos ABC y ACD. Solo se aplica el teorema de Pitágoras a cualquiera de estos triángulos para poder encontrar la medida de la hipotenusa CA.

En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, la diagonal de ABCD es $\sqrt{2}$.

Como la diagonal CA del cuadrado ABCD es bisectriz del ∢DAB y ∢BCD, entonces los ángulos ∢CAB y ∢BCA del ΔABC miden 45°.



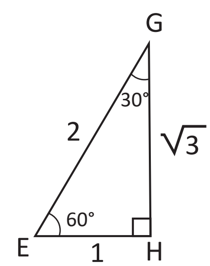
2. Como ΔEHG ≃ ΔFHG, EH = HF. Por lo tanto EH = 1.

En el ΔEHG: $EH^2 + HG^2 = GE^2 \Rightarrow HG^2 = GE^2 - EH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$$\Rightarrow HG = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, la altura de ΔEHG es $\sqrt{3}$.

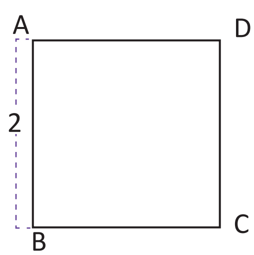
El ∢GEH = 60° debido a que el ΔEFG es equilátero, mientras que el ∢HGE = 30°, debido a que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



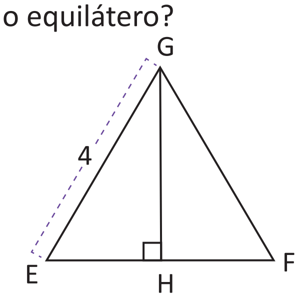
C

A los triángulos ABC y EHG se les denomina **triángulos notables** y serán de mucha utilidad en el estudio de la trigonometría en bachillerato.

1. ¿Cuál es la medida de la diagonal del siguiente cuadrado?



2. ¿Cuál es la medida de la altura del siguiente triángulo equilátero?

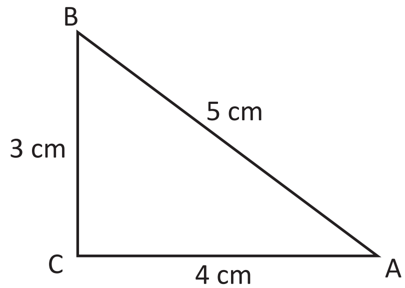


3. ¿Cuál es el área del triángulo EFG del ejercicio 2?

1.8 Recíproco del teorema de Pitágoras

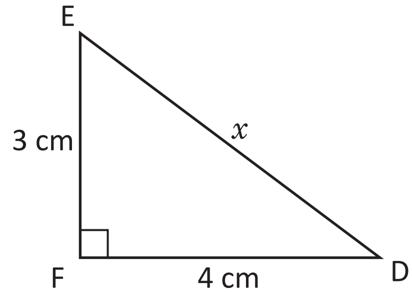
P

En el ΔABC, se cumple que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demuestra que la medida del $\sphericalangle ACB$ es 90°.



S

1. Considerando el triángulo rectángulo ΔDEF, con lados EF = 3 cm, FD = 4 cm.



2. Utilizando el teorema de Pitágoras, $DE^2 = EF^2 + FD^2$

$$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow x = 5$$

3. Como CA = FD, AB = DE y BC = EF se concluye que el $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (la medida de los tres lados son iguales).

4. Como $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ y $\sphericalangle DFE = 90°$, entonces el $\sphericalangle ACB = 90°$.

Por lo tanto, se concluye que el ΔABC es rectángulo.

C

Si en un triángulo, sus lados a, b y c, cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, cuya hipotenusa es c. Este resultado es llamado el **recíproco del teorema de Pitágoras**.

E

Si las medidas de los tres lados de un triángulo son 8, 15 y 17, verifica si es un triángulo rectángulo.

Se debe verificar si se cumple que, la suma de los cuadrados de dos de ellos, es igual al cuadrado del tercero: $15^2 + 8^2 = 289$, $17^2 = 289$, luego $15^2 + 8^2 = 17^2$.

Observa que en un triángulo rectángulo, la hipotenusa tiene mayor longitud que los catetos.

Por el recíproco del teorema de Pitágoras se puede concluir que, el triángulo tiene un ángulo recto, y por lo tanto, es un triángulo rectángulo.

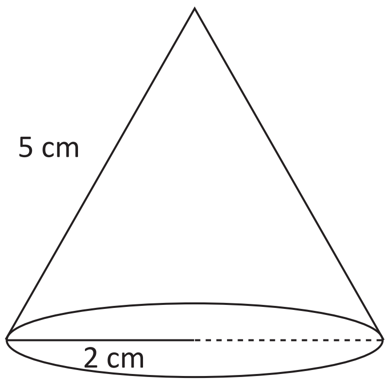
Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 2 cm, 2 cm y 3 cm b) 4 cm, 5 cm y $\sqrt{41}$ cm c) 7, 24, 25 d) 2, 3, 4

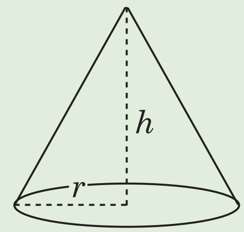
2.1 Cálculo de la altura y volumen de un cono

P

Calcula la altura y el volumen del cono.



El volumen de un cono de radio r y altura h es $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



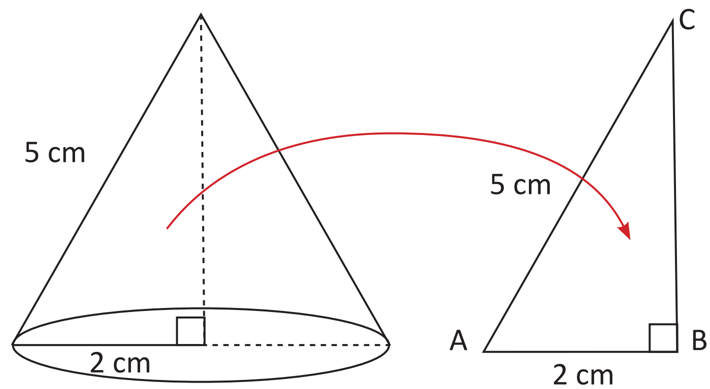
S

Se traza la altura en el cono y se forma un triángulo rectángulo el cual se denota como ΔABC, del cual ya se conoce la hipotenusa y un cateto, la altura del cono es el otro cateto de este triángulo, para calcularlo, se aplica el teorema de Pitágoras:

En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$

$$\Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$= 25 - 4$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

Por lo tanto, la altura del cono mide $\sqrt{21}$ cm.



El volumen del cono se obtiene con $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r = 2 cm y $h = \sqrt{21}$ cm, sustituyendo se tiene:

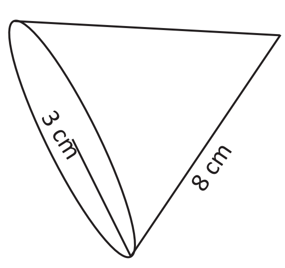
$$V_c = \frac{1}{3}\pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, el volumen del cono es $\frac{4\sqrt{21}\,\pi}{3}$ cm³.

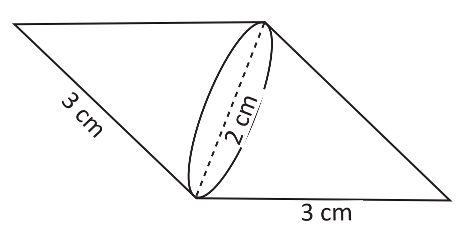
C

Para determinar el volumen o la altura desconocida de un cono, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

1. Determina la altura del siguiente cono.



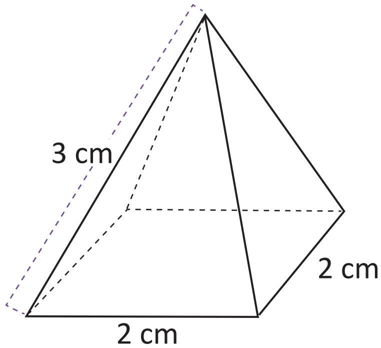
2. Encuentra el volumen del siguiente sólido geométrico.



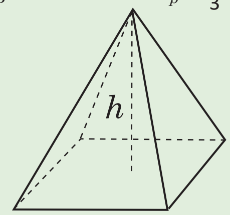
2.2 Cálculo de la medida de la altura y del volumen de la pirámide cuadrangular

P

Calcula la altura y el volumen de la pirámide cuadrangular.

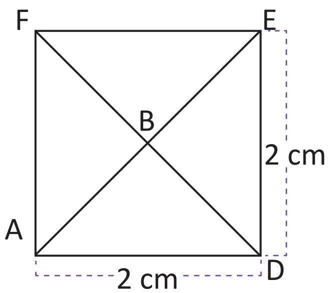


El volumen de una pirámide cuya área de la base es A_B y altura h es $V_p = \frac{1}{3} A_B\, h$.



S

Se traza la altura de la pirámide y se forma un triángulo rectángulo ABC, del cual solo se conoce la hipotenusa, pero no sus dos catetos. Se debe encontrar la medida del cateto BC, que es la altura de la pirámide, para ello se debe conocer el valor del cateto AB.

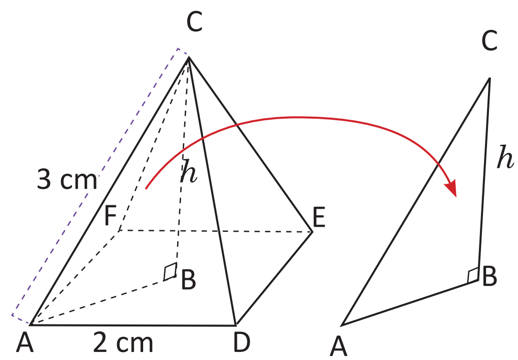


La base de la pirámide es un cuadrado donde $\overline{AB}$ es la semidiagonal. Como AD = 2 cm, entonces DE = 2 cm.

La medida de la diagonal EA se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras en el ΔADE:

$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$\Rightarrow EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



Luego como $\overline{AB}$ es la semidiagonal, se tiene que $AB = \sqrt{2}$ cm. Con esta información ya se puede calcular la medida del cateto BC en el ΔABC; nuevamente aplicando el teorema de Pitágoras:

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2 = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9 - 2 = 7$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{7}\text{, por lo tanto } h = \sqrt{7}\ \text{(cm)}.$$

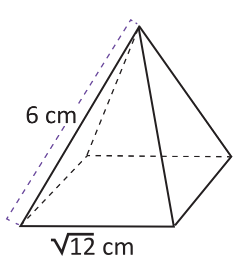
El volumen de la pirámide se obtiene con $V_p = \frac{1}{3} A_B\, h$; en este caso $A_B = 2 \times 2 = 4\ \text{cm}^2$ y $h = \sqrt{2}$ cm, sustituyendo se obtiene que

$$V_p = \frac{1}{3}(4)\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3.$$

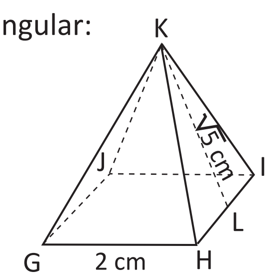
C

Para determinar el volumen o la altura desconocida de una pirámide, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

1. Determina la altura de la pirámide cuadrangular.

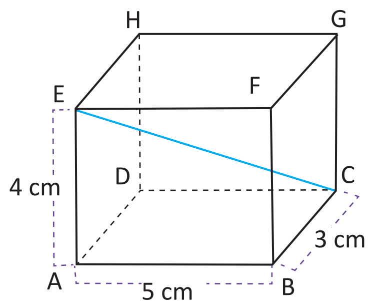


2. Si $KL = \sqrt{5}$ cm es la altura del triángulo isósceles KHI, determina el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular:

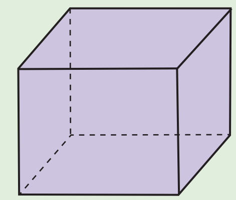


2.3 Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro

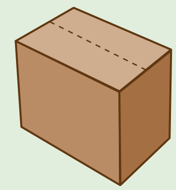
¿Cuál es la medida de la diagonal CE del siguiente ortoedro?



Un ortoedro es un prisma recto, y tiene la característica de que sus caras forman entre sí ángulos rectos.



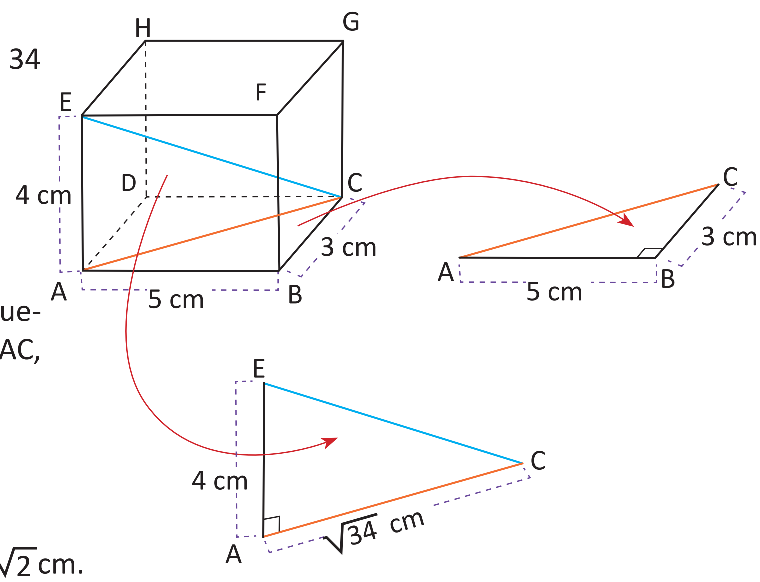
Las cajas que usualmente se utilizan son ortoedros.



La diagonal CE es la hipotenusa del ΔACE. Se debe encontrar la medida del cateto $\overline{AC}$, para luego calcular la medida de $\overline{CE}$. Como AC también es la hipotenusa del ΔACB, se puede encontrar su medida aplicando el teorema de Pitágoras:

En el ΔACB, $AC^2 = BA^2 + CB^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\Rightarrow AC = \sqrt{34}$



Como ya se conocen los catetos AC y EA, se puede aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔEAC, para encontrar el valor de la hipotenusa CE.

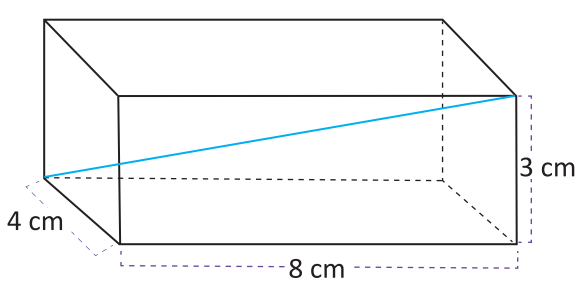
$CE^2 = AC^2 + EA^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2 = 34 + 16 = 50$

$\Rightarrow CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

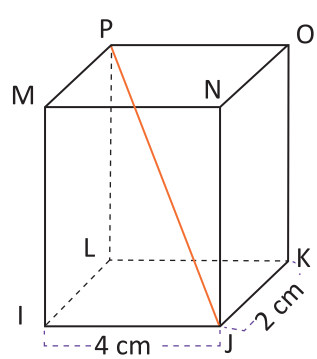
Por lo tanto, la diagonal del ortoedro mide $5\sqrt{2}$ cm.

Para determinar la longitud de la diagonal del ortoedro se utiliza el teorema de Pitágoras dos veces.

1. Calcula la medida de la diagonal del ortoedro.

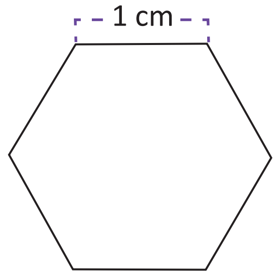


2. Si en el ortoedro, la diagonal $JP = 3\sqrt{5}$, ¿cuánto mide su altura?



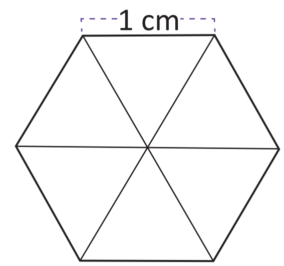
2.4 Cálculo del área de un hexágono

Calcula el área del hexágono regular, cuyos lados miden 1 cm.



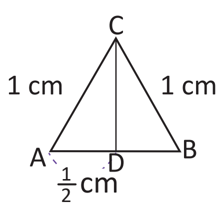
Un polígono regular cumple que todos sus lados tienen la misma longitud, y todos los ángulos interiores tienen la misma medida.

El hexágono regular está compuesto de 6 triángulos equiláteros congruentes. En este caso los 3 lados de cada triángulo miden 1 cm.



Se debe encontrar el área de un triángulo y luego multiplicarlo por 6, para encontrar el área del hexágono.

Se toma un triángulo cualquiera de los 6, y se denota por ΔABC. Se traza la altura desde el vértice C y utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra su longitud:



$$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área del ΔABC es: $(\Delta ABC) = \dfrac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\text{cm})^2$.

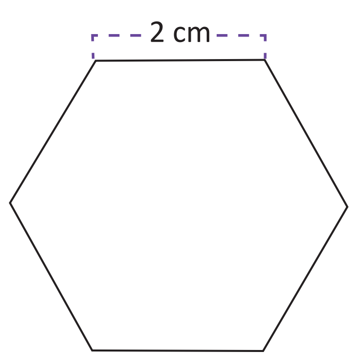
El área del hexágono es $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(\text{cm})^2$.

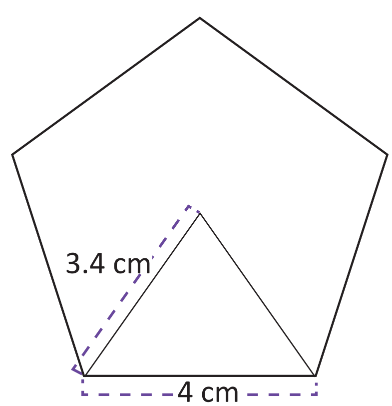
A la perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados se le llama **apotema**.

En el problema anterior la altura DC coincide con el apotema del hexágono.

Para determinar el área de un polígono regular se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar el apotema del polígono.

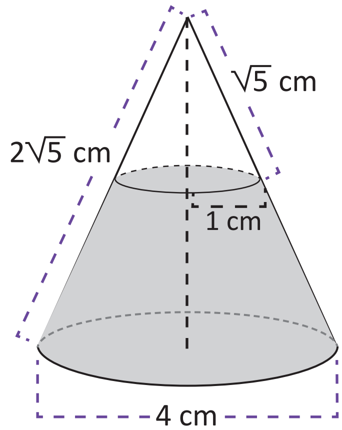
Encuentra la longitud del apotema y el área de los siguientes polígonos regulares.



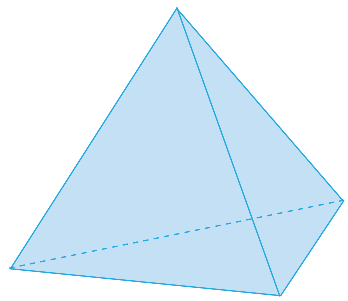


2.5 Practica lo aprendido

1. Encuentra el volumen del sólido que está sombreado de gris.

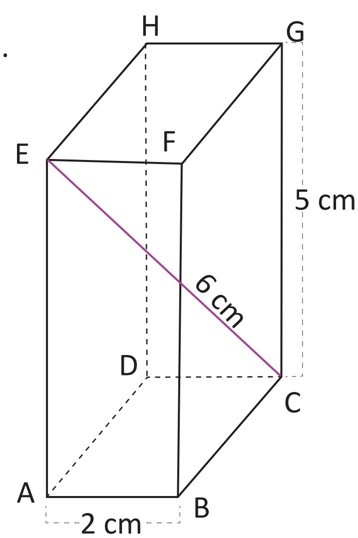


2. Determina el área total de la pirámide, si los triángulos son equiláteros y la medida de sus lados es 3.

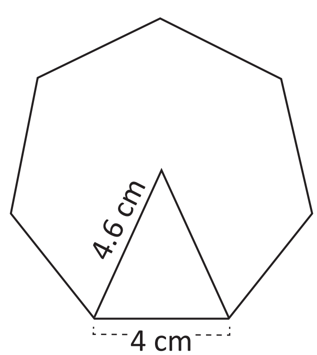


2.6 Practica lo aprendido

1. Calcula la medida del segmento BC del siguiente ortoedro.



2. Calcula el área del siguiente heptágono regular.



2.7 Aplicación del teorema de Pitágoras

P

La distancia desde la entrada principal de la Universidad de El Salvador en San Salvador (punto C) hasta la fuente luminosa (punto B) es de 554.8 m; mientras que desde la fuente luminosa hasta el punto de intersección, entre el bulevar de los Héroes y la 21 calle poniente (punto A) es 375.6 m. Encuentra la distancia entre los puntos A y C.

S

En la situación anterior, se forma el triángulo rectángulo ABC, del cual ya se conoce la longitud de los catetos AB y BC. Utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra la longitud de la hipotenusa CA:

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 \approx 141\,075.4 + 307\,803.0 = 448\,878.4$$

$$\Rightarrow CA \approx \sqrt{448878.4} \approx 670.$$

C

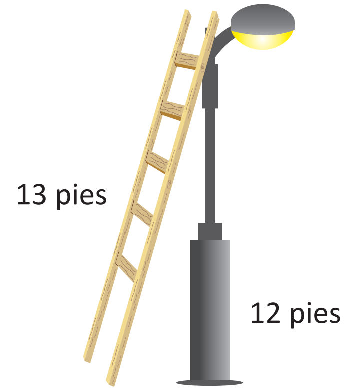
El teorema de Pitágoras es aplicable para medir distancias, así fue posible determinar que la distancia entre la entrada principal de la Universidad de El Salvador, la intersección entre el bulevar de los Héroes y la 21 calle poniente es 670 m.

Calcula la altura del monumento a los Próceres, ubicado en el centro de la plaza Libertad de San Salvador. Ese monumento fue inaugurado por el presidente Manuel Enrique Araujo el 5 de noviembre de 1911, tras cumplirse 100 años del Primer Grito de Independencia y está esculpido en bronce, mármol, granito y concreto.

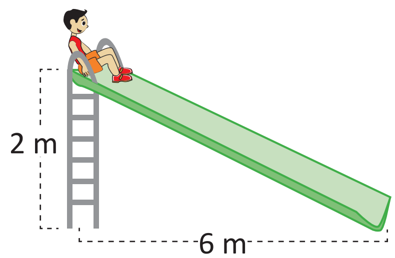
Unidad 6

2.8 Practica lo aprendido

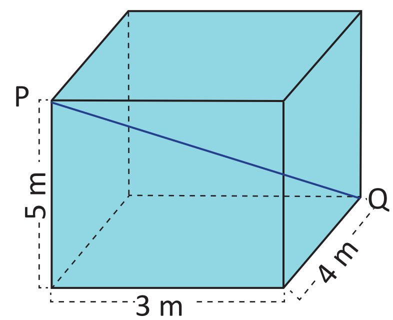
1. Mario tiene una escalera de 13 pies de longitud y quiere cambiar una lámpara que está a 12 pies de altura en un poste, ¿a qué distancia de la base del poste debe colocar la base de la escalera?



2. Miguel desea deslizarse por un tobogán, cuya altura máxima es 3.5 m. La distancia que hay entre el punto donde toca el suelo y la base del tobogán es de 6 m. ¿Qué distancia recorrerá en el tobogán?

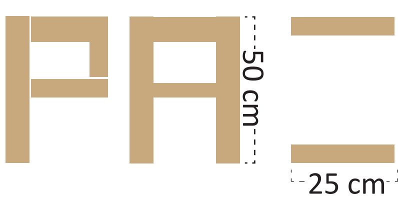


3. En una cisterna de concreto, don Juan necesita colocar un alambre entre los puntos P y Q, ¿cuál debe ser la medida de este?

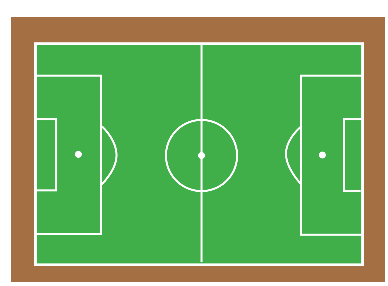


2.9 Practica lo aprendido

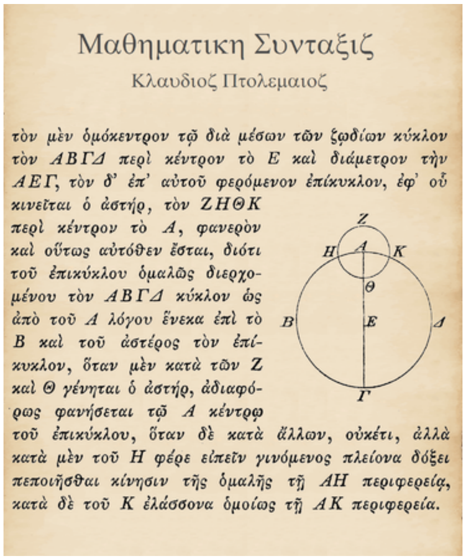
1. En la escuela El Zapote, se está preparando un evento alusivo a la paz, para ello, a José le han encomendado colocar en el muro de la escuela, las letras alusivas al evento, ¿cuántos centímetros de mecate le hacen falta para terminarlo?



2. El césped del estadio Cuscatlán en San Salvador, tiene 107 m de largo y la diagonal mide 127 m, ¿cuál es el área de la cancha?



Ángulo inscrito y central


Μαθηματικη Συνταξις

Κλαυδιος Πτολεμαιος

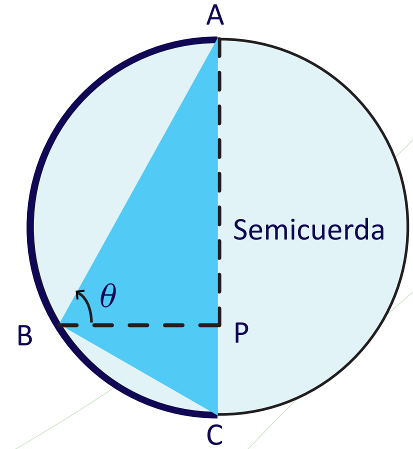
τὸν μὲν ὁμόκεντρον τῷ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλον τὸν ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρον τὴν ΑΕΓ, τὸν δ' ἐπ' αὐτοῦ φερόμενον ἐπίκυκλον, ἐφ' οὗ κινεῖται ὁ ἀστήρ, τὸν ΖΗΘΚ περὶ κέντρον τὸ Α, φανερὸν καὶ οὕτως αὐτόθεν ἔσται, διότι τοῦ ἐπικύκλου ὁμαλῶς διερχομένου τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ὡς ἀπὸ τοῦ Α λόγου ἕνεκα ἐπὶ τὸ Β καὶ τοῦ ἀστέρος τὸν ἐπίκυκλον, ὅταν μὲν κατὰ τῶν Ζ καὶ Θ γένηται ὁ ἀστήρ, ἀδιαφόρως φανήσεται τῷ Α κέντρῳ τοῦ ἐπικύκλου, ὅταν δὲ κατὰ ἄλλων, οὐκέτι, ἀλλὰ κατὰ μὲν τοῦ Η φέρε εἰπεῖν γινόμενος πλείονα δόξει πεποιῆσθαι κίνησιν τῆς ὁμαλῆς τῇ ΑΗ περιφερείᾳ, κατὰ δὲ τοῦ Κ ἐλάσσονα ὁμοίως τῇ ΑΚ περιφερείᾳ.

Una hoja del tratado astronómico Almagesto.

La astronomía fue utilizada por las civilizaciones antiguas para predecir los periodos de abundancia de la caza, la siembra o la llegada del invierno.

El matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo (siglo II) realizó, en el tratado astronómico *Almagesto*, una descripción matemática del sistema geocéntrico (en el cual los planetas giran alrededor de la Tierra). Uno de sus aportes a la matemática fue un teorema sobre cuadriláteros cíclicos, en el que se utilizan propiedades importantes de ángulo inscrito.

La trigonometría, que estudia la relación entre los lados y ángulos de un triángulo, se desarrolló por los estudios astronómicos. Los matemáticos hindúes Varahamihira (siglo VI) y Brahmagupta (siglo VII) formularon varias propiedades trigonométricas utilizando la semicuerda (un triángulo inscrito en el círculo con un lado como diámetro del círculo) y los cuadriláteros cíclicos que tienen como base el estudio de los ángulos inscritos.



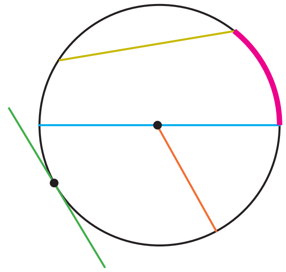
El ángulo inscrito ABC es recto. Por medio de esta construcción se obtuvieron relaciones importantes.

En los contenidos a desarrollar se abordará desde la definición hasta el teorema del ángulo inscrito, que establece una relación con el ángulo central. Estudiarás la construcción de rectas tangentes sobre la circunferencia, así como la definición del ángulo semiinscrito y la relación entre cuerdas y arcos de circunferencia.

1.1 Elementos de la circunferencia

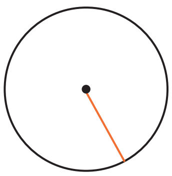
P

Escribe el nombre que reciben los elementos dibujados en la siguiente circunferencia:

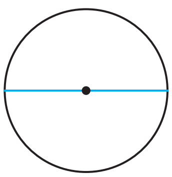


S

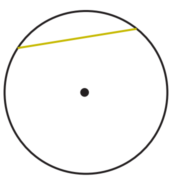
Segmentos.



El segmento que va del centro a un punto de la circunferencia se llama **radio.**

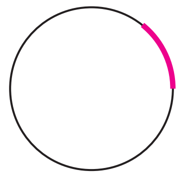


El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro y pasa por el centro se llama **diámetro.**



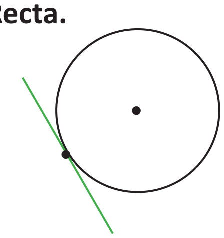
El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro se llama **cuerda.**

Arco.



La parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella se llama **arco**.

Recta.



La recta que toca la circunferencia en un punto se llama **tangente.**

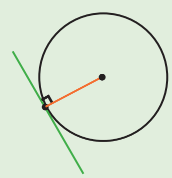
El punto donde la recta tangente toca la circunferencia se llama: **punto de tangencia.**

C

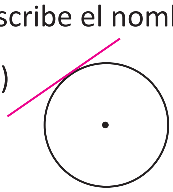
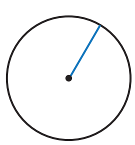
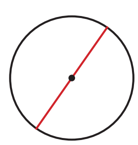
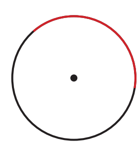
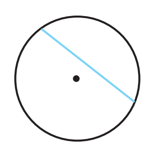
Los elementos de la circunferencia son:

- Los segmentos: radio, diámetro y cuerda
- Las rectas: tangente
- El arco de la circunferencia

El radio al punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto.



1. Escribe el nombre de los elementos señalados en cada circunferencia:

a)  b)  c)  d)  e) 

2. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el nombre del elemento que es $\frac{1}{2}$ del diámetro?

b) ¿Cuál es el nombre de la cuerda de mayor longitud de una circunferencia?

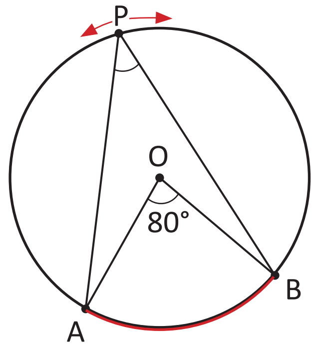
c) ¿Cómo es la recta tangente y el radio al punto de tangencia de una circunferencia?

d) Al colocar dos puntos sobre la circunferencia, ¿cuántos arcos se forman?

1.2 Definición y medida de ángulos inscritos

P

Realiza el dibujo en una hoja de papel y mide el ∢BPA desplazando el punto P a diferentes lugares de la circunferencia. Compara la medida de ∢BPA con la medida del ∢BOA.



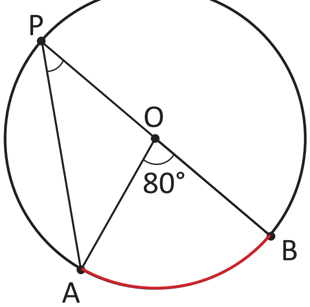
El ángulo BOA se llama **ángulo central**, porque su vértice es el centro de la circunferencia.

Observa que el ∢BPA y el ∢BOA comparten el mismo arco $\widehat{AB}$.

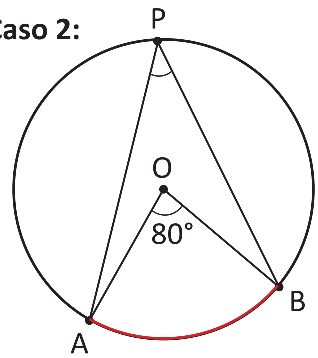
S

Utilizando regla y compás para hacer el dibujo y desplazar el punto P en la circunferencia, se tienen los siguientes casos:

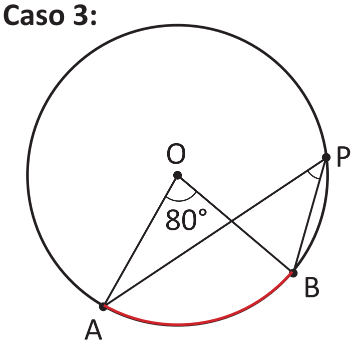
Caso 1:



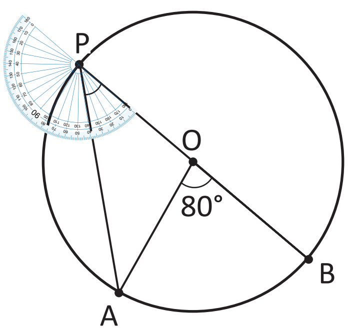
Caso 2:

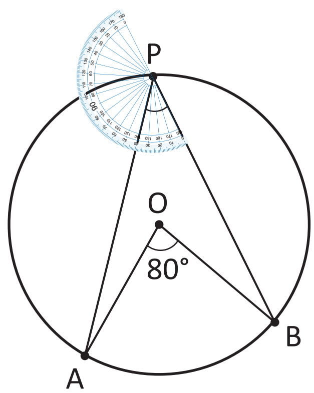


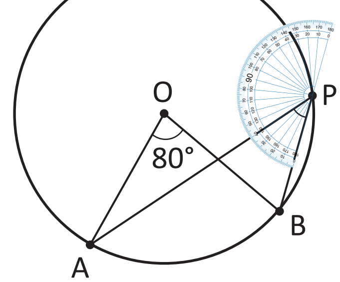
Caso 3:



Utilizando transportador se mide el∢BPA en los 3 casos.







En los tres casos la medida del ∢BPA = 40°.

Y el ∢BOA = 2∢BPA o bien el ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

C

Los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia se llaman: **ángulos inscritos**.

Subtender el mismo arco significa compartir el mismo arco.

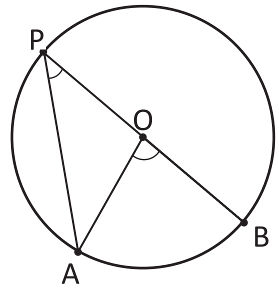
En una circunferencia se cumple que la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco que cualquier ángulo inscrito, es el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

Determina la medida de un ángulo inscrito a una circunferencia cuyo ángulo central correspondiente al mismo arco mide 160°. Utiliza un esquema como en el Problema inicial.

1.3 Ángulo inscrito, parte 1

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro queda en algún lado del ΔBPA.



El diámetro es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

S

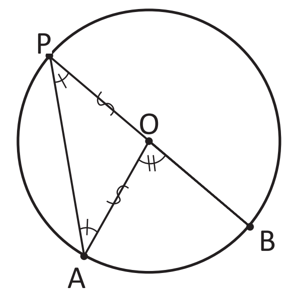
En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia).

Entonces, ∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales).

Por otra parte ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢OPA. Como ∢OPA = ∢BPA.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.



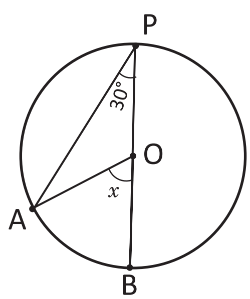
C

En los ángulos inscritos cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia se cumple que **la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.**

E

Determina el valor de x para cada caso.

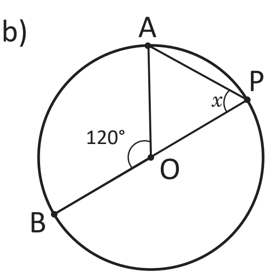
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, $x = 2(30°) = 60°$.

b)



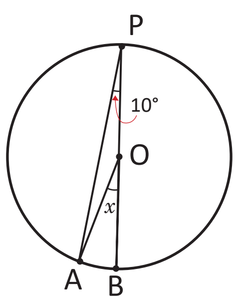
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

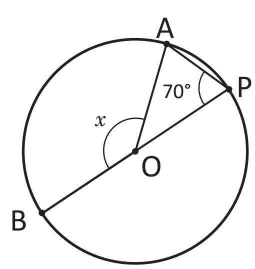
Por lo tanto, $x = \frac{120°}{2} = 60°$.

Determina el valor de x para cada caso.

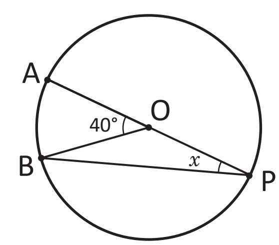
a)



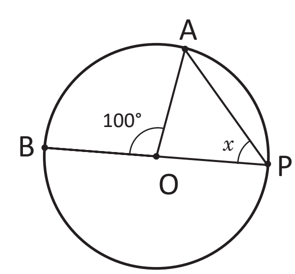
b)



c)



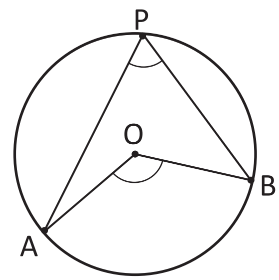
d)



1.4 Ángulo inscrito, parte 2

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está dentro del ∢BPA.



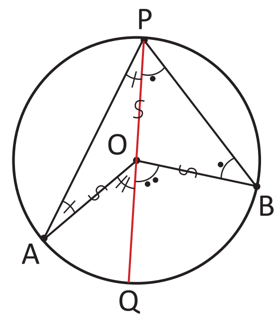
S

Se traza el diámetro QP.

∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO (por lo visto en la clase 3).

Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



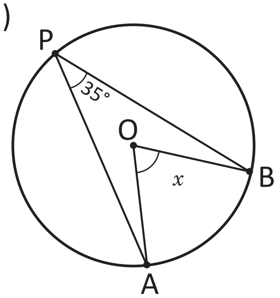
C

En los ángulos inscritos que tiene en el interior el ángulo central, que subtiende el mismo arco, también se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito**.

E

Determina el valor de x para cada caso.

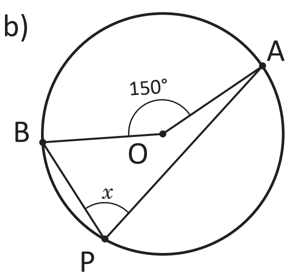
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(35°) = 70°.

b)



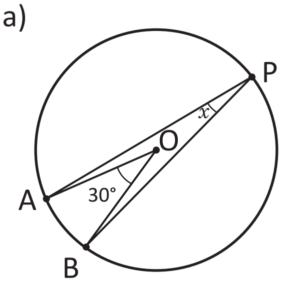
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

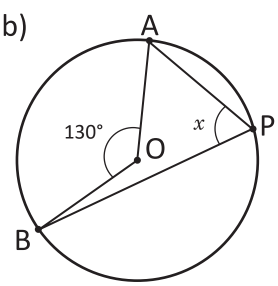
Por lo tanto $x = \frac{150°}{2} = 75°$.

Determina el valor de x para cada caso.

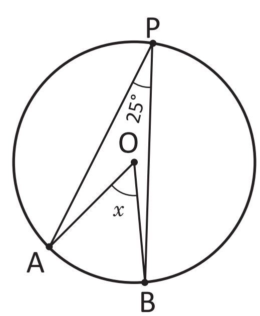
a)



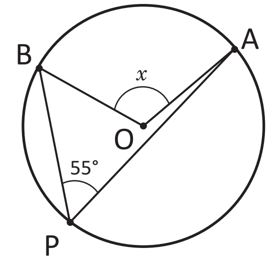
b)



c)



d)

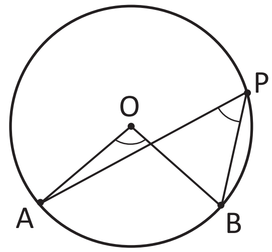


Unidad 7

1.5 Teorema del ángulo inscrito

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está fuera del ∢BPA.



S

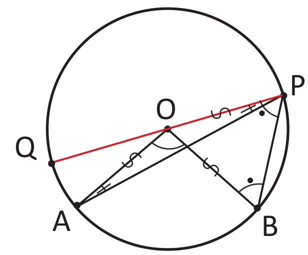
Se traza el diámetro QP.

∢AOQ = 2∢APQ y ∢BOQ = 2∢BPQ (por lo visto en la clase 3).

Como ∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ = 2(∢BPQ – ∢APQ) = 2∢BPA.

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



C

En una circunferencia, para cualquier ángulo inscrito se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco**.

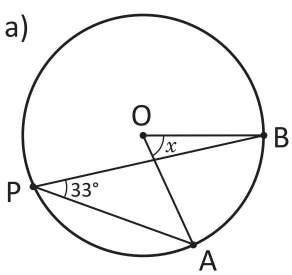
Además los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.

Este resultado se conoce como **El teorema del ángulo inscrito**.

E

Determina el valor de x para cada caso.

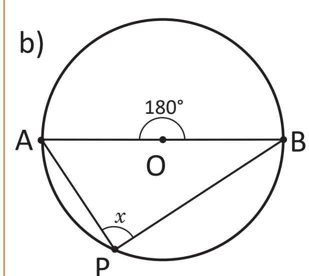
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(33°) = 66°.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

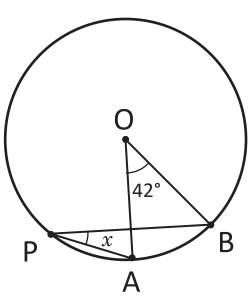
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$.

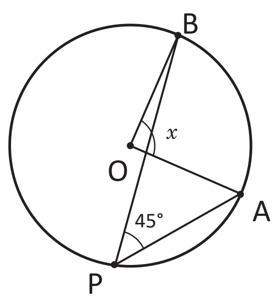
El ángulo inscrito a la semicircunferencia mide 90°.

Determina el valor de x, y y z para cada caso.

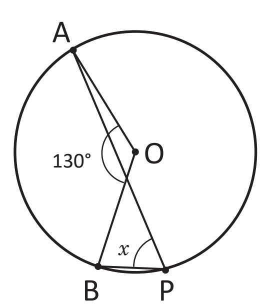
a)



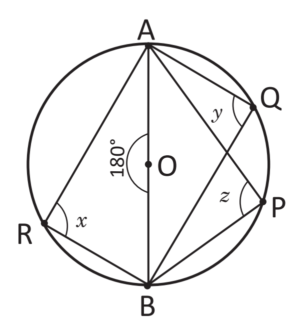
b)



c)



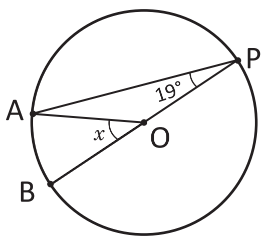
d)



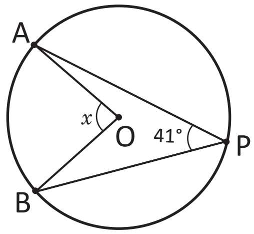
1.6 Practica lo aprendido

1. Determina el valor de x para cada caso.

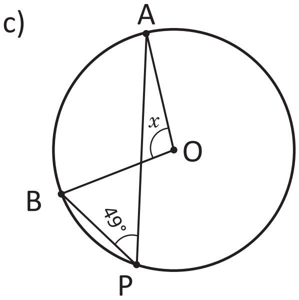
a)



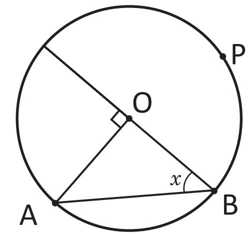
b)



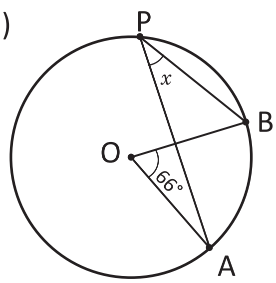
c)



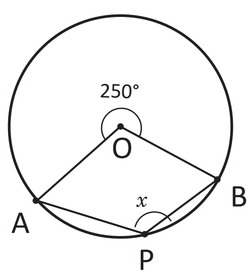
d)



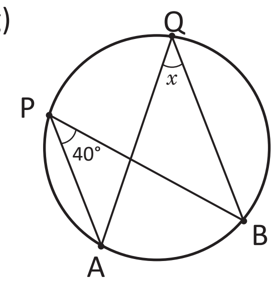
e)



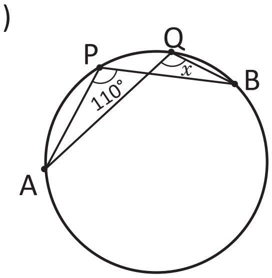
f)



g)

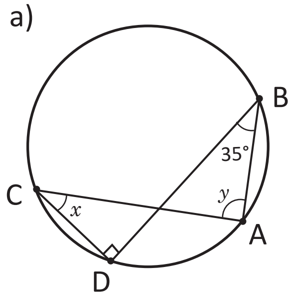


h)

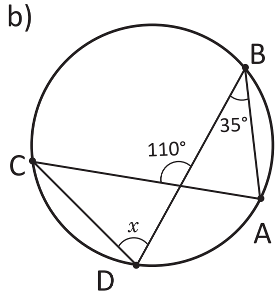


2. Determina el valor de x y de y según cada caso.

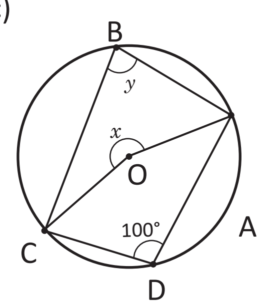
a)



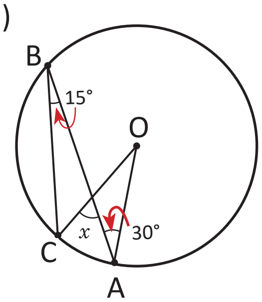
b)



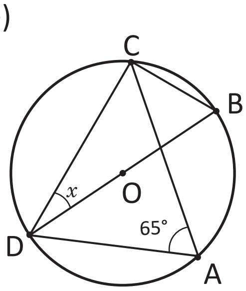
c)



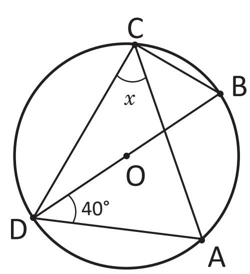
d)



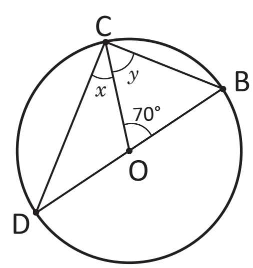
e)



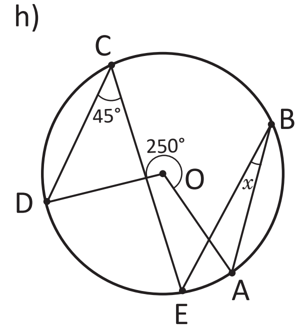
f)



g)



h)

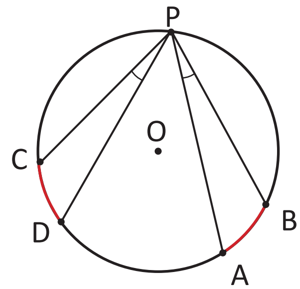


Unidad 7

1.7 Arcos congruentes

P

Compara la medida del ∢BPA con el ∢DPC en la siguiente figura si $\widehat{CD} = \widehat{AB}$.



La notación $\widehat{AB}$, significa la porción de arco comprendida entre el punto A y el punto B.

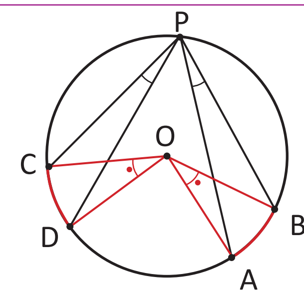
S

Se construyen los ángulos ∢BOA y ∢DOC.

∢BOA = ∢DOC ($\widehat{CD} = \widehat{AB}$ por hipótesis).

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC (por ángulo inscrito).

Por lo tanto, ∢BPA = ∢DPC.



C

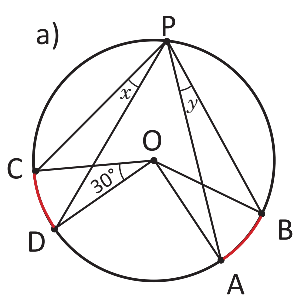
En una circunferencia los ángulos inscritos, que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida.

También se cumple que si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida.

E

Determina el valor de x y y para cada caso donde $\widehat{CD} = \widehat{AB}$.

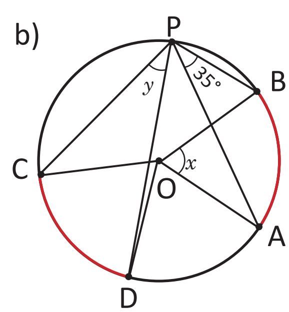
a)



Como ∢BOA = ∢DOC.

Por lo tanto,
$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

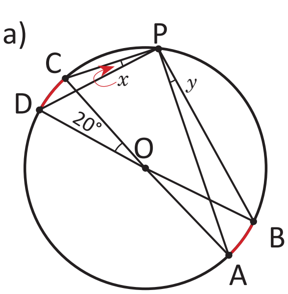
Por lo tanto, $x = 2(35°) = 70°$.

Por otra parte, ∢BOA = ∢DOC.

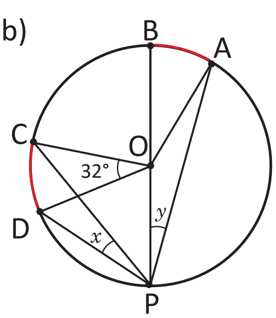
Entonces, y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

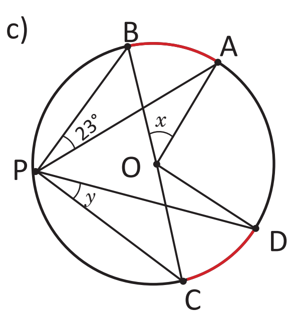
a)



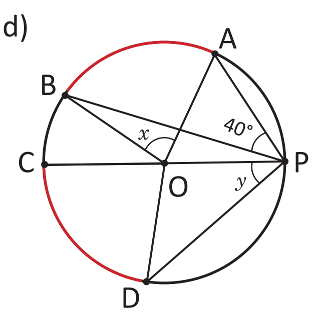
b)



c)



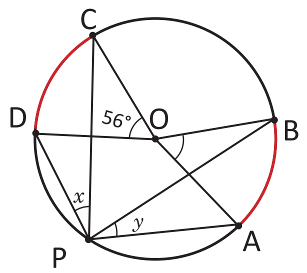
d)



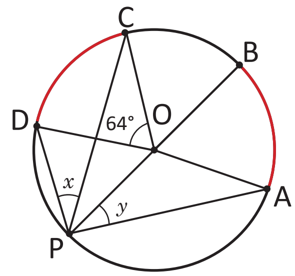
1.8 Practica lo aprendido

1. Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

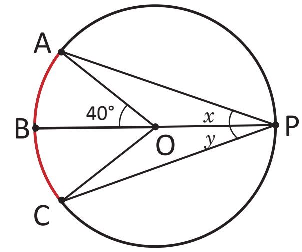
a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



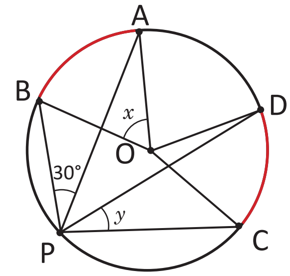
b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



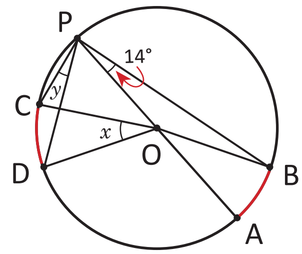
c) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



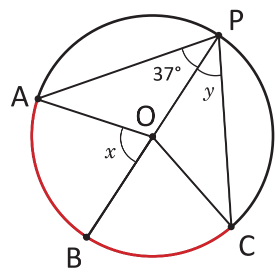
d) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



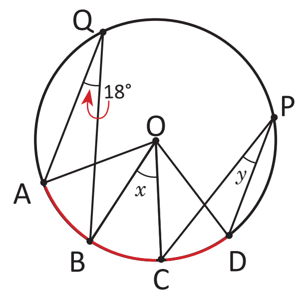
e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



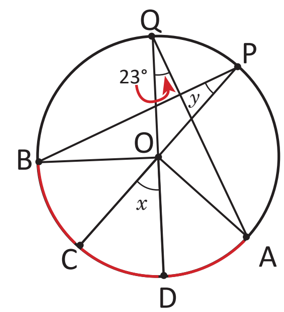
f) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



g) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$

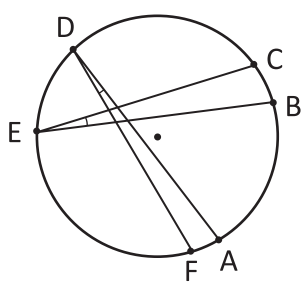


h) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$

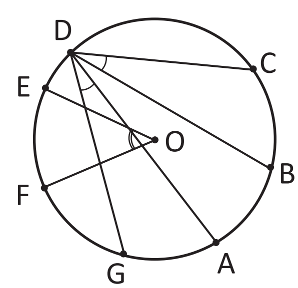


2. En las siguientes circunferencias, determina los arcos que sean de igual medida.

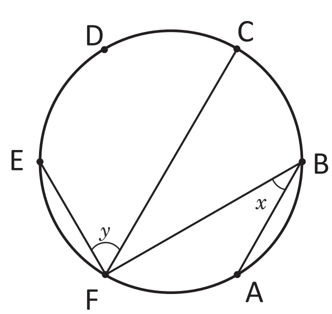
a) ∢ADF = ∢CEB



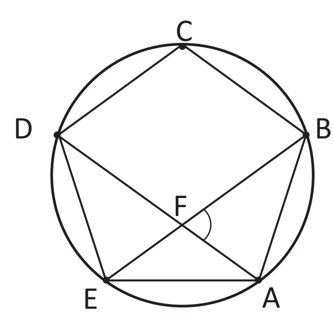
b) ∢FOE = 2∢CDB y ∢BDC = ∢ADG



3. Determina el valor de x y y si en la siguiente figura los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales.



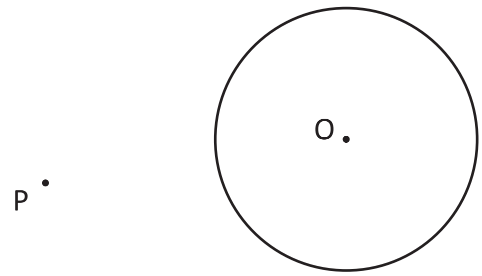
4. En la siguiente figura ABCDE es un pentágono regular, se trazan las diagonales AD y BE. Determina la medida de ∢BFA.



Unidad 7

2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

Dada la siguiente circunferencia y el punto P, construye con regla y compás las rectas que pasan por el punto P y son tangentes a la circunferencia.



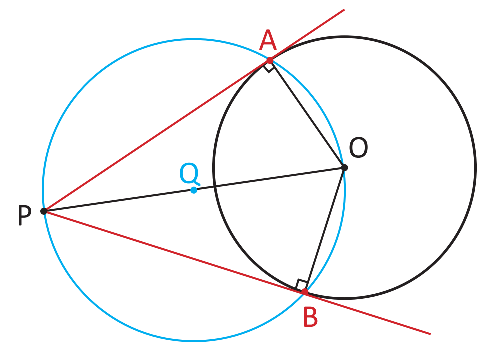
Tomando el punto medio del segmento PO, denotado por Q.

Se traza la circunferencia con centro Q y radio QO.

Se marcan los puntos A y B donde se intersectan las circunferencias.

Entonces, $\measuredangle OAP = \measuredangle PBO = 90°$ (ambos subtienden un arco de 180°).

Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.



La recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la tangente a la circunferencia.

Utilizando los resultados de ángulo inscrito se pueden construir las rectas que pasan por un punto P y tangentes a una circunferencia dada siguiendo los pasos de la solución.

1. Dibuja otra circunferencia y otro punto P fuera de dicha circunferencia, diferentes a los del inicio de la clase y construye las tangentes a la circunferencia que pasen por el punto P.

2. Con base al ejercicio de la clase responde:

   a) ¿Son iguales los segmento PA y PB?

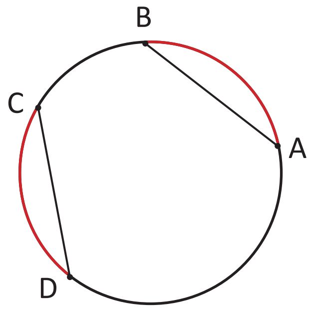
   b) ¿Por qué?

Puedes aplicar congruencia de triángulos para justificar tu respuesta.

2.2 Cuerdas y arcos de la circunferencia

P

En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.



S

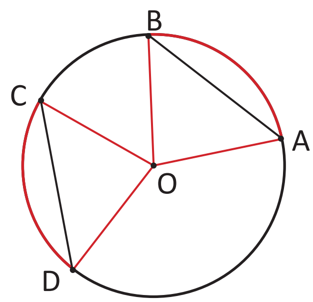
Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

$\measuredangle BOA = \measuredangle DOC$ (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, $\Delta BOA \cong \Delta DOC$ (por criterio LAL).

Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).



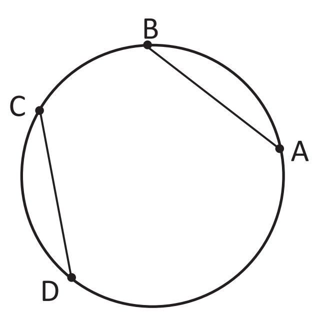
Para aplicar el criterio de congruencia LAL es necesario que dos lados y el ángulo entre ellos sean congruentes.

C

En una circunferencia si la medida de dos arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden esos arcos es igual.

E

En la siguiente figura AB = CD. Compara la longitud de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.

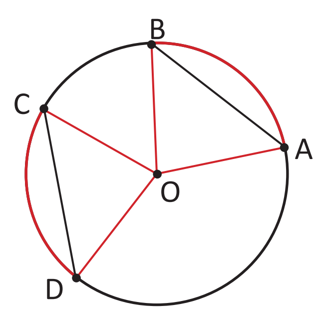


Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

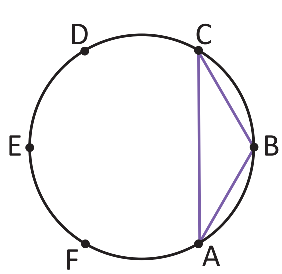
Entonces, $\Delta BOA \cong \Delta DOC$ (por criterio LLL).

Luego, $\measuredangle BOA = \measuredangle DOC$ (por la congruencia).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (el ángulo central es igual).



Los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal. Observa el ejemplo:



a) ABC BA = BC (porque $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC}$).
R. ABC es un triángulo isósceles.

b) ABDE c) ACE d) ACD

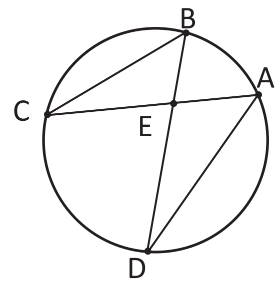
e) ABCDEF f) DEF g) ABCD

Unidad 7

2.3 Aplicación con semejanza de triángulos

P

En la siguiente figura determina si se cumple que el $\Delta AED \sim \Delta BEC$.



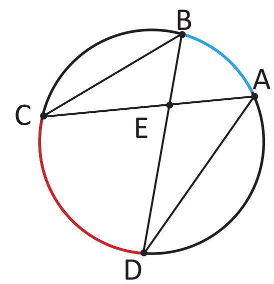
S

En la figura $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$ (son opuestos por el vértice).

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$ (subtienden el mismo arco).

Pero $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ y $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$.

Por lo tanto, $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (por criterio AA).



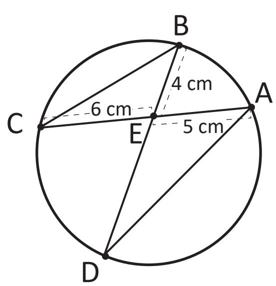
Para aplicar el criterio AA solo es necesario que dos ángulos sean congruentes.

C

Para determinar semejanza entre triángulos es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

E

En la siguiente figura determina la medida del segmento ED.



Como $\Delta AED \sim \Delta BEC$.

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

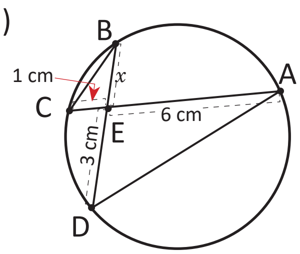
Por lo tanto, $ED = EC \times \frac{AE}{BE} = 6 \times \frac{5}{4} = 7.5$.

ED = 7.5 cm

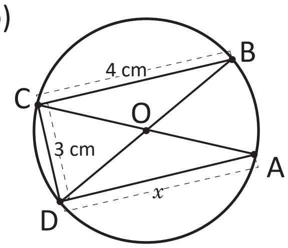
Cuando dos triángulos son semejantes, la razón entre sus lados homólogos se mantiene constante.

1. Determina x en las siguientes figuras:

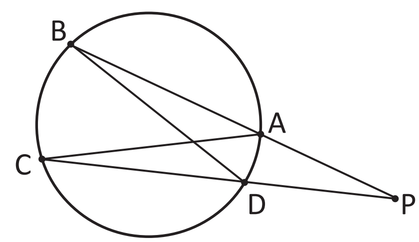
a)



b)



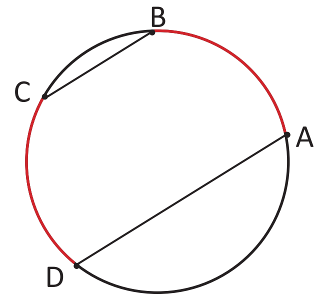
2. En la siguiente figura determina qué condiciones son necesarias para que $\Delta ACP \sim \Delta DPB$.



¿Es necesario algo más?

2.4 Paralelismo

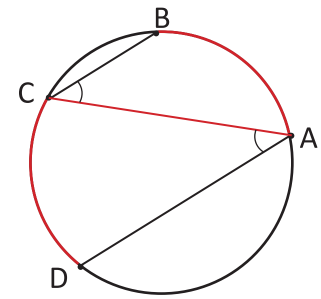
En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.



Trazando la cuerda AC.

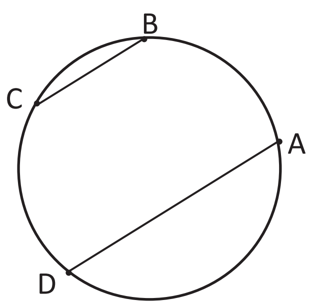
Entonces, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ (dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

Por lo tanto, BC ∥ AD (los ángulos alternos internos son iguales).



En una circunferencia, si se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el inicio de un arco y el final del otro son paralelas.

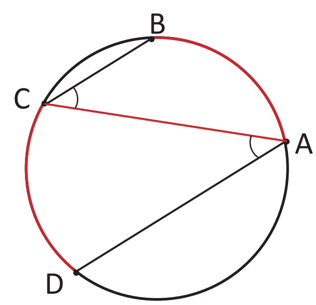
Compara los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ de la circunferencia, si BC ∥ AD.



Trazando la cuerda AC.

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ (ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (teorema del ángulo inscrito).



Este resultado es el recíproco del ejercicio inicial.

Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

b) $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA$

c) CB = DA

d) $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$

e) AB = BC

f) $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADB$

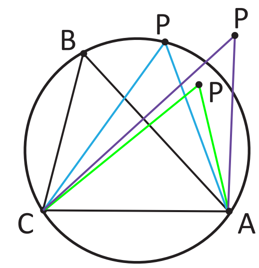
g) AC = BD

h) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

P

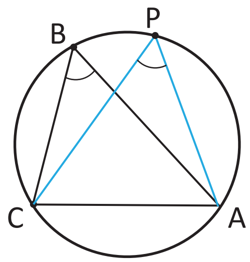
Considerando ∢ABC = ∢APC y que ambos ángulos comparten el segmento AC. Demuestra que los puntos A, B, C y P están en una misma circunferencia.



S

El punto P tiene 3 opciones, sobre, dentro o fuera la circunferencia.

Opción 1

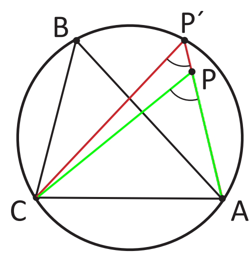


En este caso:

∢**ABC** = ∢**APC**.

Por lo tanto, A, B, C y P deben estar en una misma circunferencia.

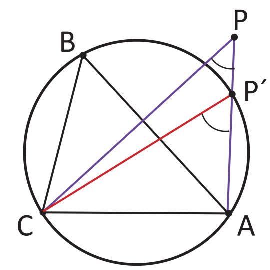
Opción 2



Trazando ∢AP'C, se tiene que
∢ABC = ∢AP'C < ∢APC
Dado que ∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP

Por lo tanto, ∢**ABC** < ∢**APC**.

Opción 3



Trazando ∢AP'C, se tiene que
∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.
Dado que ∢AP´C = ∢APC + ∢PCP'.

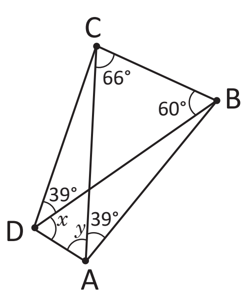
Por lo tanto, ∢**ABC** > ∢**APC**.

C

Si dos ángulos iguales, además comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.

E

Determina el valor de x y y.

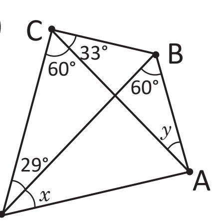


Como ∢CAB = ∢CDB y ambos comparten el segmento CB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

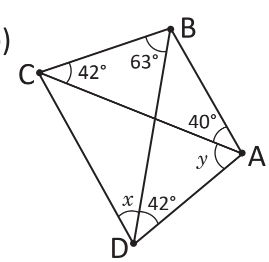
Se debe cumplir que ∢**BCA** = ∢**BDA**, entonces x = 66°.
Y además se debe cumplir que ∢**CBD** = ∢**CAD**, entonces y = 60°.

Determina el valor de x y y.

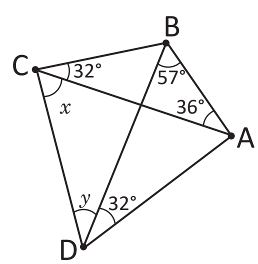
a)



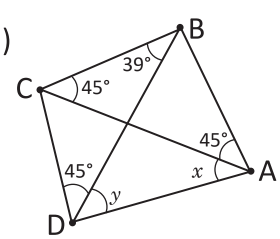
b)



c)



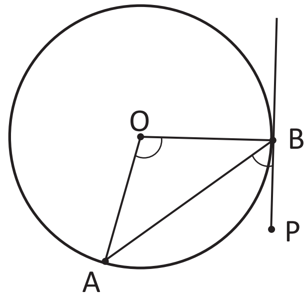
d)



2.6 Ángulo semiinscrito

P

Compara la medida de ∢ABP con ∢BOA en la siguiente figura.



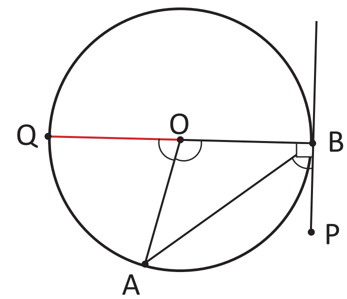
S

Se traza el diámetro QB.

Entonces, ∢AOQ = 2∢ABO (teorema del ángulo inscrito).

También, ∢AOQ = 180° – ∢BOA (ángulo suplementario).

Luego 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA, es decir, ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$.



Por lo tanto, ∢PBA = $\frac{∢BOA}{2}$, o bien ∢BOA = 2∢PBA (por ángulo complementario, ya que PB ⊥ BO).

C

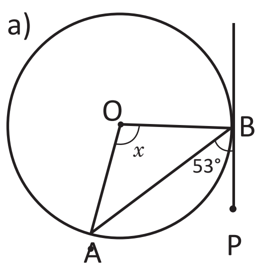
El ángulo formado por una tangente y una cuerda de la circunferencia se llama: **ángulo semiinscrito**.

En una circunferencia **la medida de un ángulo semiinscrito, es igual a la mitad de la medida del ángulo central, que subtiende el mismo arco que la cuerda.**

E

Determina el valor de x para cada caso.

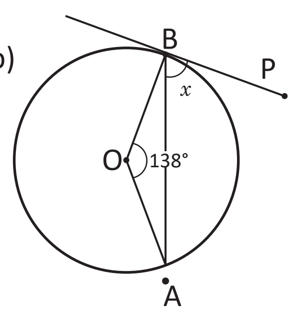
a)



Como ∢BOA = 2∢PBA.

Por lo tanto, x = 2(53°) = 106°.

b)

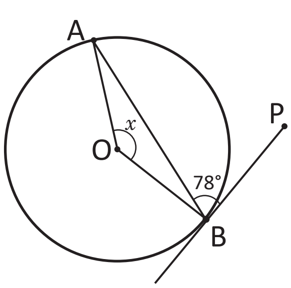


Como ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

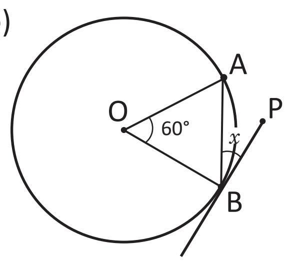
Por lo tanto, $x = \frac{138°}{2}$ = 69°.

Determina el valor de x para cada caso:

a)



b)

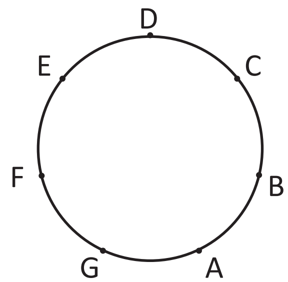


Unidad 7

2.7 Practica lo aprendido

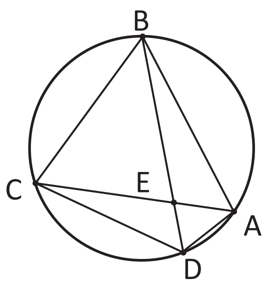
1. Dibuja una circunferencia y un punto P fuera de ella, construye con regla y compás las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto P.

2. Los puntos A, B, C, D, E, F, G dividen la circunferencia en 7 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal.



a) ABC b) ACDF c) ADG d) ABCDEFG

3. En la siguiente figura A, B, C, D están en una circunferencia. Responde:



a) ¿Cómo son los ángulos ∢EAB y ∢EDC?

b) ¿Cómo son los ángulos ∢ABE y ∢ACD? ¿Por qué?

c) ¿Cómo son los triángulos ΔABE y ΔDCE? ¿Por qué?

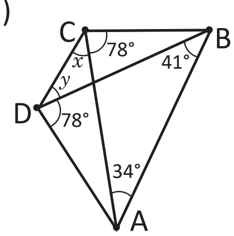
4. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos haya al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ b) ∢CAB = ∢CDB c) AC = AD d) ΔABC ~ ΔCDA

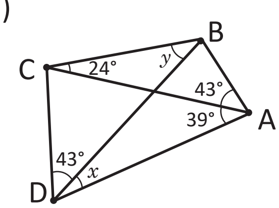
2.8 Practica lo aprendido

Determina el valor de x o y, según corresponda.

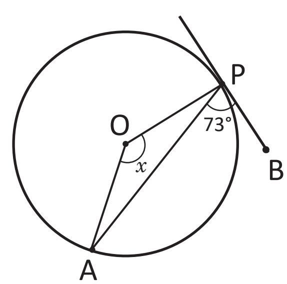
a)



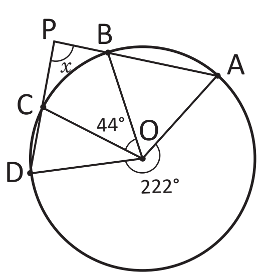
b)



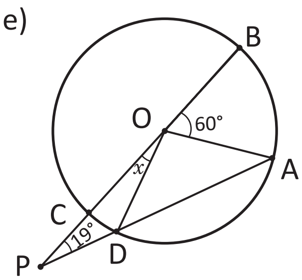
c)



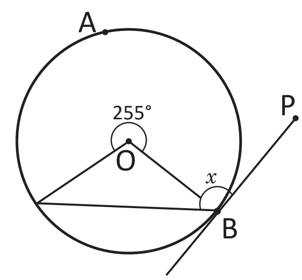
d)



e)

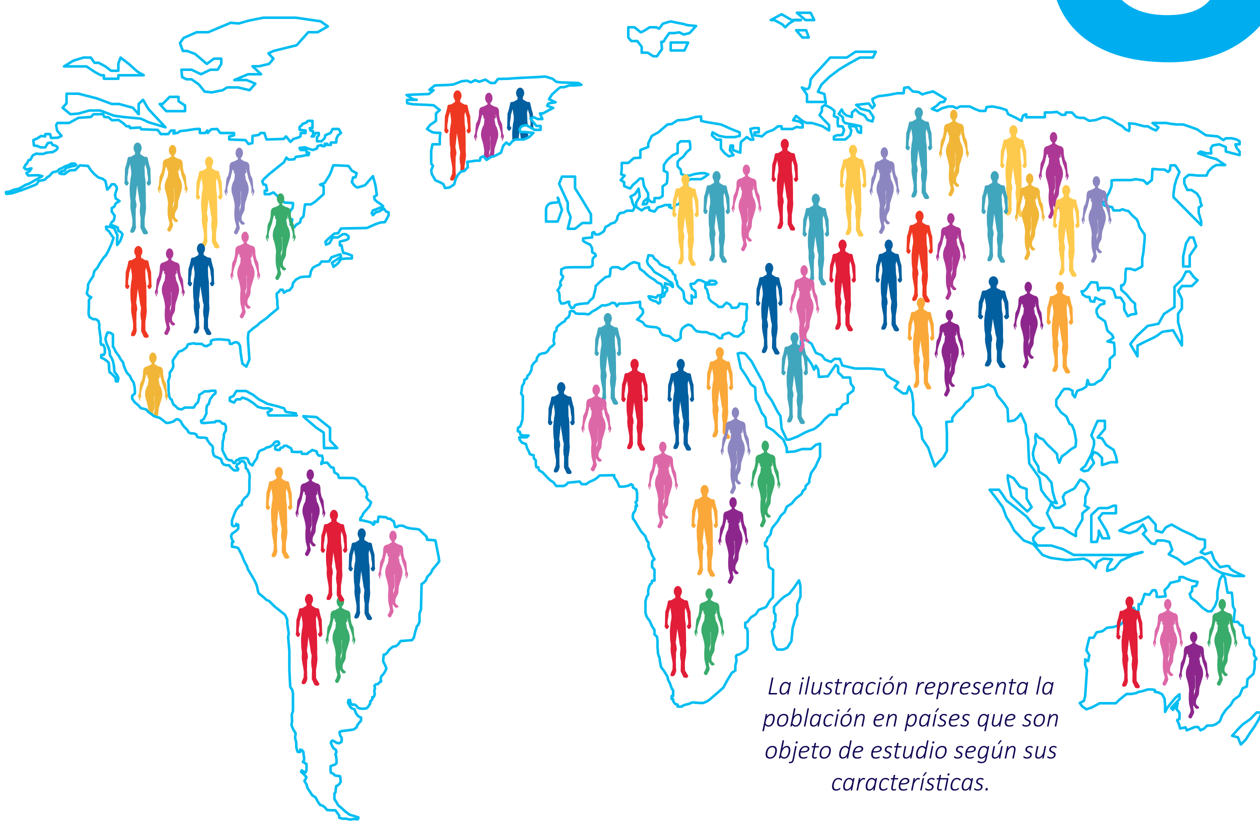


f)



Medidas de dispersión

8 Unidad



La ilustración representa la población en países que son objeto de estudio según sus características.

Desde la antigüedad la estadística resultó ser muy útil a todas las ciencias; esta se constituyó en una herramienta importante en los procesos de investigación, ya que permite planear, recolectar y organizar información referente a individuos u observaciones de un fenómeno, al cuál se le estudian características en común en una población o muestra.

Para analizar una serie de datos no basta con conocer las medidas de tendencia central, que son las que indican donde se sitúan la mayoría de datos, también es necesario estudiar las medidas de dispersión o variabilidad, para saber qué tan próxima está entre si la información. Estas medidas tienen sus aplicaciones en las tarifas sobre servicios públicos; temperaturas por semanas; estudios sobre comportamientos de cierta población, longitudes recorridas por corredores, entre otros.

Al finalizar esta unidad sabrás cómo agrupar datos en una tabla de distribución de frecuencias, conocerás la media aritmética, la varianza y la desviación típica; para datos agrupados y no agrupados, esto se abordará con problemas de la vida cotidiana.

1.1 Rango para datos no agrupados

En la tabla se presenta la tarifa mensual (en dólares) por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador:

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

¿Cómo se calcula la media aritmética, mediana y moda para datos no agrupados?

a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de las tarifas de cada una de las residenciales.

b) Para cada residencial calcula la diferencia entre la tarifa más alta y la más baja. ¿Cuál residencial tiene la mayor diferencia?

a) Para calcular la media aritmética (μ) se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número de datos, la mediana es el dato que ocupa la posición central cuando estos se ordenan de menor a mayor y la moda es el dato con mayor frecuencia (el que más se repite).

Para la residencial 1:

$$\mu = \frac{12 + 11 + 12 + 13 + 12 + 18}{6} = \frac{78}{6} = 13$$

La media aritmética es $13.

Los datos ordenados de menor a mayor quedan de la siguiente forma:

11, 12, 12, 12, 13, 18

Por ser un número par de datos, la mediana es la media de los datos que ocupan las posiciones 3 y 4:

$$\frac{12 + 12}{2} = 12$$

La mediana es igual a $12. Por último, la moda es $12 para la residencial 1, pues es el dato que más se repite.

Para la residencial 2:

$$\mu = \frac{10 + 13 + 12 + 11 + 12 + 12 + 14}{7} = \frac{84}{7} = 12$$

La media aritmética es $12.

Los datos ordenados de menor a mayor quedan de la siguiente forma:
10, 11, 12, 12, 12, 13, 14
El dato que ocupa la posición central (cuarta posición) es 12, es decir, la mediana de la residencial 2 es igual a $12. Finalmente, la moda es igual a $12 para la residencial 2, pues es el dato que más se repite.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente cuadro:

	Residencial 1	Residencial 2
Media aritmética	$13	$12
Mediana	$12	$12
Moda	$12	$12

b) Para la residencial 1 la tarifa más alta es $18, la más baja es $11 y la diferencia es 18 − 11 = 7.
Para la residencial 2 la tarifa más alta es $14, la más baja es $10 y la diferencia es 14 − 10 = 4.

Por lo tanto, la diferencia de la tarifa más alta y la más baja es mayor en la residencial 1.

C

Las **medidas de dispersión** indican qué tanto se dispersan o agrupan los datos con respecto a su media aritmética.

El **rango** es una medida de dispersión que para una serie de datos no agrupados es igual a la diferencia del dato mayor y el dato menor. Al **rango** también se le llama **amplitud.** En el Problema inicial, las tarifas de la residencial 1 se encuentran más dispersas, ya que el rango es mayor.

1. Observa los datos no agrupados de las series A y B. ¿En cuál serie los datos están más dispersos?

	Serie A	Serie B
1	20.3	20.9
2	20.8	20.5
3	21.0	24.0
4	20.5	29.5
5	21.1	21.0
6	20.2	19.1
7	20.4	16.4

2. María registra la temperatura en dos semanas diferentes, obteniendo los resultados de la derecha.

a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de cada semana.

b) Calcula el rango de cada semana, ¿en cuál de ellas los datos están más dispersos?

Semana 1	
Día	Temperatura
domingo	32°
lunes	31°
martes	29°
miércoles	30°
jueves	30°
viernes	29°
sábado	29°

Semana 2	
Día	Temperatura
domingo	35°
lunes	34°
martes	32°
miércoles	30°
jueves	30°
viernes	27°
sábado	25°

1.2 Desviación respecto a la media

P

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

En las series de datos de la tarifa mensual por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador, se obtuvo lo siguiente:

	Residencial 1	Residencial 2
Media aritmética	\$13	\$12
Mediana	\$12	\$12

a) ¿Cuál de las medidas; media o mediana, consideras puede ser más representativa para cada distribución?

b) En ambas series, encuentra las diferencias de cada dato y su media aritmética, ¿cómo se relacionan estas diferencias con la dispersión?

S

a) Para la residencial 1: la mayoría de los datos son menores a \$13, que es el valor de la media. Esto es debido a que la media se ve afectada por el sexto dato (\$18) que difiere considerablemente de los demás; entonces, para esta distribución la mediana puede ser un dato más representativo.

Para la residencial 2: tanto la media como la mediana tienen el mismo valor, puede tomarse cualquiera de los dos como dato más representativo de la distribución.

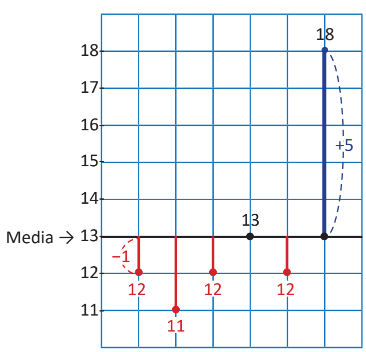
b) En la tabla se presentan las diferencias de cada uno de los datos y la media:

Residencial 1	
x	$x-\mu$
12	12−13 = −1
11	11−13 = −2
12	12−13 = −1
13	13−13 = 0
12	12−13 = −1
18	18−13 = 5

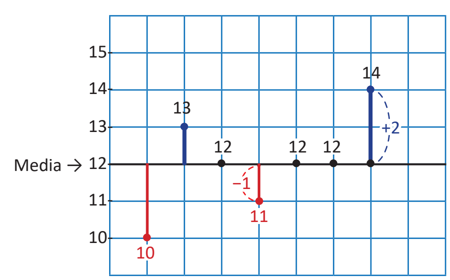
Residencial 2	
x	$x-\mu$
10	10−12 = −2
13	13−12 = 1
12	12−12 = 0
11	11−12 = −1
12	12−12 = 0
12	12−12 = 0
14	14−12 = 2

Sin tomar en cuenta los signos negativos, las diferencias reflejan la distancia de cada uno de los datos a su media aritmética. Lo anterior puede observarse mejor en los siguientes esquemas:

Residencial 1



Residencial 2



En ellos se observa que los datos de la residencial 2 se encuentran a menor distancia con respecto a su media aritmética ($12); mientras que en los datos de la residencial 1, el último de ellos está relativamente lejos de su media aritmética ($13).

C

En una distribución, a la diferencia de cada uno de los datos (x) y su media aritmética (μ) se le llama **desviación** respecto a la media (o simplemente desviación), se simboliza por $x - \mu$ e indica la diferencia de cada uno de los datos a la media aritmética. La suma de todas las desviaciones se simboliza por $\Sigma(x - \mu)$ y siempre es igual a cero:

Suma de todas las desviaciones = 0

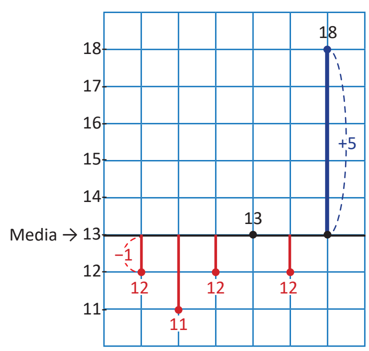
es decir,

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

E

Utilizando el Problema inicial, verifica que la suma de todas las desviaciones con respecto a la media es cero.

Residencial 1



En el esquema puede notarse que el valor absoluto de la suma de las distancias negativas es igual al de la positiva, haciendo que el resultado sea cero. También puede hacerse el cálculo:

$$\begin{aligned}\Sigma(x - \mu) &= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5\\ &= -1 - 2 - 1 - 1 + 5\\ &= -5 + 5\\ &= 0\end{aligned}$$

En la siguiente tabla se presentan tres series de datos no agrupados.

Completa cada una de las tablas y con base en las desviaciones, respecto a la media responde:

¿En cuál distribución los datos se encuentran más dispersos con respecto a la media?

Serie A	
x	$x - \mu$
15	
4	
6	
3	
2	
Media	
Mediana	
Rango	

Serie B	
x	$x - \mu$
8	
9	
6	
7	
5	
Media	
Mediana	
Rango	

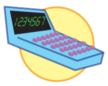
Serie C	
x	$x - \mu$
15	
5	
8	
10	
7	
Media	
Mediana	
Rango	

1.3 Varianza para datos no agrupados

P

Las desviaciones con respecto a la media pueden resultar complicadas de interpretar debido al signo negativo en alguna de ellas y cuando se tienen muchos datos.

En las tablas aparecen las desviaciones respecto a la media de los datos de la clase anterior:



Residencial 1	
x	$x - \mu$
12	12 − 13 = − 1
11	11 − 13 = − 2
12	12 − 13 = − 1
13	13 − 13 = 0
12	12 − 13 = − 1
18	18 − 13 = 5

Residencial 2	
x	$x - \mu$
10	10 − 12 = − 2
13	13 − 12 = 1
12	12 − 12 = 0
11	11 − 12 = − 1
12	12 − 12 = 0
12	12 − 12 = 0
14	14− 12 = 2

a) Calcula el cuadrado de cada una de las desviaciones con respecto a su media.
b) Calcula la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones del literal anterior. Esta media aritmética se simboliza con σ^2 (σ es la letra griega sigma).

S

a) En las tablas se presentan los cuadrados de cada una de las desviaciones, en la columna $(x - \mu)^2$.

Residencial 1		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
11	11 − 13 = − 2	$(-2)^2 = 4$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
13	13 − 13 = 0	$0^2 = 0$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
18	18 − 13 = 5	$5^2 = 25$

Residencial 2		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
10	10−12 = −2	$(-2)^2 = 4$
13	13−12 = 1	$1^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
11	11−12 = −1	$(-1)^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
14	14−12 = 2	$2^2 = 4$

b) La media aritmética de los cuadrados de las desviaciones del literal anterior (que se simboliza por σ^2) se calcula sumando todos los resultados, de la última columna, de cada tabla y dividiéndolos entre el total de datos.

Para la residencial 1:

$$\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$$

Para la residencial 2:

$$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

La medida (σ^2) sirve también para calcular la dispersión de los datos con respecto a su media. Se puede observar que cuanto mayor sean las desviaciones respecto a la media, mayor es σ^2 y por consiguiente más dispersos se encontrarán los datos.

σ^2 en la residencial 1 se ve afectada por la desviación del último dato cuyo cuadrado es 25, dando como resultado que sea mayor a σ^2 de la residencial 2. Por lo tanto, las tarifas de la residencial 1 se encuentran más dispersas.

A la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones se le llama **varianza**, se denota por σ^2 y se calcula:

$$Varianza = \frac{\text{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\text{Número de datos}}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}$$

Donde n es el número total de datos y μ es la media aritmética de la serie de datos. En el problema inicial, la varianza de la serie de datos de la residencial 1 es $\sigma^2 \approx 5.33$; mientras que la varianza de la serie de datos de la residencial 2 es $\sigma^2 \approx 1.43$.

Como esta medida es sensible a cada uno de los datos de la serie, la varianza revela aspectos en la dispersión que no refleja el rango. Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como dato representativo de la distribución.

En las tablas se presentan las tres series de datos no agrupados de la clase anterior.

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15		
4		
6		
3		
2		

Varianza (σ^2)	

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8		
9		
6		
7		
5		

Varianza (σ^2)	

Serie C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15		
5		
8		
10		
7		

Varianza (σ^2)	

Completa cada una de las tablas y calcula la varianza de cada serie. Con base en ella, justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos. Compáralo con el resultado obtenido en la clase anterior.

1.4 Desviación típica para datos no agrupados

P

Con la tarifa mensual por el servicio de agua potable, en dos residenciales de San Salvador, realiza lo siguiente:

a) Calcula la raíz cuadrada de la varianza de ambas series y simbolízala por σ (sin el cuadrado). ¿Sigue siendo mayor el resultado de la residencial 1 que cuenta con datos más dispersos?
b) Coloca los datos de cada residencial como puntos sobre la recta numérica.
c) Resta y suma el respectivo valor de σ a cada media aritmética. Coloca estos números sobre la recta.
d) Según lo observado en la recta, ¿cuáles datos están más dispersos?

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18
σ^2	5.33 (dólares al cuadrado)

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14
σ^2	1.43 (dólares al cuadrado)

S

a) La raíz cuadrada de la varianza de los datos de la residencial 1 es:

$$\sigma = \sqrt{5.33}$$
$$\approx 2.31$$

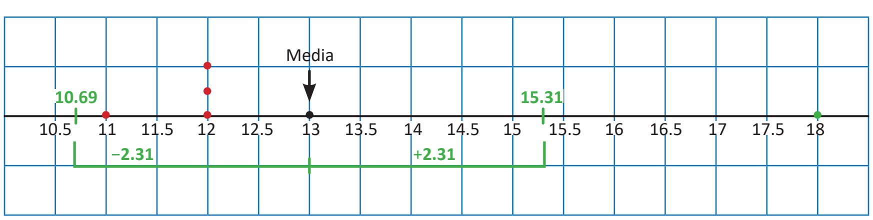
Mientras que la raíz cuadrada de la varianza de los datos de la residencial 2 es:

$$\sigma = \sqrt{1.43}$$
$$\approx 1.20$$

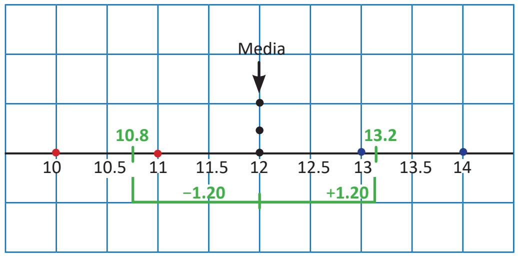
El resultado de la residencial 1 sigue siendo mayor que el de la residencial 2.

b) Cada punto representa uno de los datos; si dos o más datos tienen el mismo valor, entonces se ubican verticalmente sobre el valor correspondiente (los puntos rojos son los datos menores que la media, los azules los mayores, y los negros los que tienen igual valor que la media).

c) **En la serie de la residencial 1:** Para conocer la cantidad de datos que quedan a una distancia σ de su media (13) se le resta y suma a μ el valor de σ (que es 2.31) dando como resultado 10.69 y 15.31 respectivamente. En el esquema de abajo se observa que cinco de los seis datos de la serie quedan a una distancia de 2.31 de la media aritmética.



En la serie de la residencial 2: Al restar y sumar σ (1.20) a la media (12) se obtiene como resultado 10.8 y 13.2 respectivamente. En el esquema de abajo se observa que cinco de los siete datos de la serie quedan a una distancia de 1.20 de la media aritmética.



d) Aparentemente no hay mucha diferencia en las dos series, sin embargo, el hecho que σ sea menor para la residencial 2 indica que los datos se encuentran a una menor distancia de su media aritmética que los datos de la residencial 1, y por tanto, las tarifas mensuales de la residencial 1 se encuentran más dispersas (esto por influencia del dato cuyo valor es $18).

C

A la raíz cuadrada de la varianza se le denomina **desviación típica**, se denota por σ y se calcula así:

$$\text{Desviación Típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\text{Número de datos}}}$$

Es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}}$$

A la desviación típica también se le llama **desviación estándar.**

La desviación típica da un tipo de promedio de las desviaciones con respecto de la media μ, o sea, un promedio de las distancias de cada dato a su media aritmética, algo que no hace la varianza por expresarse en unidades cuadradas.

Cuanto mayor sea la desviación típica, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como medida representativa de la serie de datos. La desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será negativo.

Con las series de datos A, B y C del ejercicio de la clase anterior realiza los siguiente:

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15		
4		
6		
3		
2		

σ^2	
σ	

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8		
9		
6		
7		
5		

σ^2	
σ	

Serie C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15		
5		
8		
10		
7		

σ^2	
σ	

a) Calcula la desviación típica de cada una de las series de datos.

b) Determina, en cada serie, la cantidad de datos que quedan a una distancia de una desviación típica con respecto a su media.

1.5 Agrupación de datos

P

Carlos y Antonio trabajan en la librería Maquilishuat. Durante 30 días registran la cantidad de cuadernos vendidos cada día, obteniendo el siguiente registro:

Carlos				
5	15	23	11	20
10	6	9	10	22
15	21	15	16	34
20	18	13	26	18
16	22	21	24	12
14	17	19	16	11

Antonio				
9	15	5	18	22
13	17	11	24	14
19	22	23	10	11
20	12	16	28	18
10	13	21	17	8
21	20	15	15	6

Cada casilla representa un día.

a) Clasifica el número de cuadernos vendidos en 6 grupos de 5 en 5, inicia en 5 y termina en 35.
b) Organiza los grupos en una tabla y determina el total de datos en cada grupo.

S

a) Como deben ser 6 grupos y el primero de ellos debe comenzar en 5 y el último terminar en 35, entonces los grupos serán: de 5 a 10 cuadernos, de 10 a 15 cuadernos, de 15 a 20 cuadernos, de 20 a 25 cuadernos, de 25 a 30 cuadernos y de 30 a 35 cuadernos. Según lo anterior, los cuadernos vendidos por Carlos quedan clasificados de la siguiente forma:

Carlos			16			
			19			
			17	24		
		11	16	21		
		14	18	22		
		12	18	20		
		13	16	21		
	9	10	15	22		
	6	10	15	20		
	5	11	15	23	26	34
	De 5 a 10	**De 10 a 15**	**De 15 a 20**	**De 20 a 25**	**De 25 a 30**	**De 30 a 35**

En el grupo "de 5 a 10" se colocan las cantidades 5, 6, 7, 8 y 9, si las hay; la cantidad final (10) se coloca en el grupo siguiente. De manera similar se hace para los demás grupos.

De forma similar se clasifican los cuadernos vendidos por Antonio:

En 8 días, Antonio vendió de 20 a 25

Antonio						
			15			
		13	15	20		
		10	17	21		
		12	18	21		
		11	16	20		
	6	10	19	23		
	8	14	17	22		
	5	11	18	24		
	9	13	15	22	28	
	De 5 a 10	**De 10 a 15**	**De 15 a 20**	**De 20 a 25**	**De 25 a 30**	**De 30 a 35**

b) La tabla queda de la siguiente manera:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos	Antonio
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**

Este número representa la cantidad de días en los que Antonio vendió de 20 a 25 cuadernos.

C

La tabla en que se organizan los grupos de datos de una serie tal como en el Problema inicial se llama: **tabla de distribución de frecuencias.**

A los intervalos de datos formados se les llama **clases** y el total de datos que corresponde a cada clase se le llama **frecuencia**. Al tamaño de una clase se le llama ancho de clase y a los valores extremos **límites de clase**.

Por ejemplo, para la primera clase del Problema inicial los límites de clase son 5 y 10, el límite inferior es 5, el límite superior es 10 y el ancho de clase es 5. El número que está en el centro de cada clase se llama **punto medio**, se denota por Pm y se determina mediante la ecuación:

$$Pm = \frac{\textit{Límite superior + Límite inferior}}{2}$$

El punto medio de la primera clase es: $Pm = \frac{5 + 10}{2} = 7.5$

En dos comunidades de Morazán se hace un estudio sobre la edad de los menores de 21 años, obteniendo los siguientes resultados:

Comunidad 1					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

Comunidad 2					
14	13	9	17	15	9
9	14	15	20	18	12
13	10	9	11	10	13
16	12	12	11	10	13
18	11	14	10	19	9

a) Clasifica las edades de los menores de 21 años de cada comunidad en 4 grupos de 3 en 3, inicia en 9 y termina en 21.
b) Organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
c) Con la tabla creada, agrega otra columna donde se muestre el punto medio de cada clase.

1.6 Media aritmética y rango para datos agrupados

P

Carlos y Antonio trabajan en la librería Maquilishuat. Durante un mes registran la cantidad de cuadernos vendidos por día, obteniendo el siguiente dato:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días		Punto medio de cada clase (Pm)	$f_C \times Pm$	$f_A \times Pm$
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)			
5 a 10	3	4	7.5	22.5	30.0
10 a 15	7	8			
15 a 20	10	9			
20 a 25	8	8			
25 a 30	1	1			
30 a 35	1	0			
TOTAL	30	30			

a) Completa la tabla y calcula la media aritmética para cada una de las series de datos (de Carlos y Antonio), ¿qué ocurre?

b) Identifica en cada una el límite superior de la última clase que posee frecuencia distinta de cero y el límite inferior de la primera clase que posee frecuencia distinta de cero.

c) Realiza, para cada serie, la diferencia del límite superior y el límite inferior encontrado en el literal b. ¿En cuál serie los datos se encuentran más dispersos?

S

a) Los valores de la tabla quedan de la siguiente manera:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días		Punto medio de cada clase (Pm)	$f_C \times Pm$	$f_A \times Pm$
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)			
5 a 10	3	4	7.5	22.5	30.0
10 a 15	7	8	12.5	87.5	100.0
15 a 20	10	9	17.5	175.0	157.5
20 a 25	8	8	22.5	180.0	180.0
25 a 30	1	1	27.5	27.5	27.5
30 a 35	1	0	32.5	32.5	0.0
TOTAL	30	30			

La media aritmética de la serie de datos de Carlos se calcula:

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f \times Pm}{\textit{Número de datos}}$$

$$\mu = \frac{22.5 + 87.5 + 175.0 + 180.0 + 27.5 + 32.5}{30}$$

$$= \frac{525}{30}$$

$$= 17.5$$

La media aritmética de la serie de datos de Antonio, se calcula de la misma manera que la de Carlos, y el resultado es 16.5.

b) Para el caso de Carlos la última clase que posee frecuencia distinta de cero es la clase de 30 a 35, que tiene frecuencia igual a 1 cuyo límite superior es 35, y la primera clase que posee frecuencia distinta de cero es la clase de 5 a 10 (tiene frecuencia 3) cuyo límite inferior es 5.

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_C)
5 a 10	3
10 a 15	7
15 a 20	10
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	1
TOTAL	30

De igual forma se identifican las dos clases para el caso de Antonio:

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Antonio (f_A)
5 a 10	4
10 a 15	8
15 a 20	9
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	0
TOTAL	30

c) Para la serie de Carlos la diferencia es: 35 − 5 = 30.
Y para la serie de Antonio la diferencia es: 30 − 5 = 25.

Por lo tanto, los datos de la serie de Carlos se encuentran más dispersos.

El **rango** para una serie de datos agrupados es la diferencia del límite superior de la última clase con frecuencia distinta de cero y el límite inferior de la primera clase con frecuencia distinta de cero. La **media aritmética** para series de datos agrupados se calcula así:

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f \times Pm}{\textit{Número de datos}}$$

En un centro escolar se registra el tiempo, en minutos, que los estudiantes de octavo y noveno grado miran televisión al día, los datos se muestran en la siguiente tabla de distribución de frecuencia:

Minutos	8° grado (f_1)	9° grado (f_2)	Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
30 a 40	0	3	35	0	105
40 a 50	10	8			
50 a 60	11	9			
60 a 70	12	12			
70 a 80	11	10			
80 a 90	6	8			
TOTAL	50	50			

a) Completa la tabla, encuentra la media aritmética para cada una de las series de datos y compáralas.
b) Comparando los rangos, determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos.

Unidad 8

1.7 Varianza para datos agrupados

En la tabla aparecen los datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos durante 30 días:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f\,(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5			
15 a 20	10	17.5	175.0			
20 a 25	8	22.5	180.0			
25 a 30	1	27.5	27.5			
30 a 35	1	32.5	32.5			
TOTAL	30					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

a) Completa la tabla y calcula la suma de los datos de la última columna.
b) ¿Cómo podrías calcular la varianza para esta serie de datos agrupados?

a) La tabla completa se presenta a continuación:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5	−5	25	175
15 a 20	10	17.5	175.0	0	0	0
20 a 25	8	22.5	180.0	5	25	200
25 a 30	1	27.5	27.5	10	100	100
30 a 35	1	32.5	32.5	15	225	225
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

La sumatoria de los datos de la última columna, $f(Pm - \mu)^2$, es:

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$$

b) Para calcular la varianza, basta dividir entre el número total de datos el resultado de la suma calculada en el literal a), es decir:

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$$
$$\approx 33.33$$

Igual que en las series de datos no agrupados, la varianza se encuentra expresada en unidades cuadradas. Para este caso serían “días al cuadrado”.

Por lo tanto, $\sigma^2 \approx 33.33$.

C La varianza de una serie de datos agrupados se calcula de la siguiente forma:

$$Varianza = \frac{\textit{Suma de los productos } f\,(Pm - \mu)^2}{\textit{Número de datos}}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\, f(Pm - \mu)^2}{n}$$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, Pm es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos.

Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética.

1. Completa la tabla y calcula la varianza para la cantidad de cuadernos vendidos por Antonio. Luego determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos, comparando las varianzas.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Antonio (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	4	7.5	30.0	−9	81	324
10 a 15	8	12.5	100.0			
15 a 20	9	17.5	157.5			
20 a 25	8	22.5	180.0			
25 a 30	1	27.5	27.5			
30 a 35	0	32.5	0.0			
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**16.5**					

2. Con las series de datos agrupados de las dos comunidades de Morazán de la clase 5 realiza lo siguiente:

a) Completa la siguiente tabla y calcula la varianza de los datos de la comunidad 1:

Edad en años	Cantidad de personas Comunidad 1 (f_1)	Punto medio (Pm)	$f_1 \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_1(Pm - \mu)^2$
De 9 a 12	7	10.5	73.5	−4	16	112
De 12 a 15	11	13.5	148.5			
De 15 a 18	7	16.5	115.5			
De 18 a 21	5	19.5	97.5			
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**14.5**					

b) Elabora una tabla como la anterior para la comunidad 2 y calcula la varianza de sus datos.
c) Con base a lo anterior responde, ¿en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos?

Unidad 8

1.8 Desviación típica para datos agrupados

P

Calcula la desviación típica de la serie de datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos y Antonio durante 30 días y justifica en cuál de ellas los datos se encuentran más dispersos.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**
Media aritmética (μ)	**17.5**	**16.5**
Varianza (σ^2)	33.33	29

S

Para datos agrupados en clases, la desviación típica sigue siendo igual a la raíz cuadrada de la varianza.
Para la serie de datos de Carlos:

$$\sigma = \sqrt{33.33}$$
$$\approx 5.77$$

Y para la serie de datos de Antonio:

$$\sigma = \sqrt{29}$$
$$\approx 5.39$$

Como la desviación típica de la distribución de Carlos es mayor a la de Antonio, se concluye que los datos de la distribución de Carlos se encuentran más dispersos, con respecto a su media aritmética 17.5.

C

La desviación típica de una serie de datos agrupados se calcula:

$$\textit{Desviación típica} = \sqrt{\textit{varianza}}$$

Es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}}$$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, Pm es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos. Tanto para datos agrupados como no agrupados, la desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será un número negativo.

Con base al ejercicio 2 de la clase anterior. Calcula la desviación típica (σ) de las series de datos agrupados de las dos comunidades de Morazán y responde con base a esta medida, ¿en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos?

1.9 Practica lo aprendido

1. Los siguientes datos representan las estaturas de 8 estudiantes en centímetros:
163, 162, 164, 163, 164, 162, 161, 185.

   a) Calcula la media aritmética, la mediana y el rango de la serie de datos.
   b) ¿Cuál de las medidas, media o mediana, escogerías para representar la distribución? Justifica tu respuesta.

2. Con los datos presentados en la siguiente tabla, determina cuáles de las series de datos B, C y D tienen igual desviación típica que la serie de datos de A. Justifica tu respuesta.

A	B	C	D
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
25	30	35.5	28
26	31	36.5	29
23	28	33.5	26
21	26	31.5	21
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
23	28	33.5	23
22	27	32.5	22

3. Observa las siguientes series de datos no agrupados:

	Serie A
1	30
2	25
3	11
4	20
5	14
6	26

	Serie B
1	18
2	20
3	19
4	21
5	22

   a) Calcula las desviaciones respecto a su media aritmética de cada serie y la desviación típica.
   b) Comparando las desviaciones típicas, determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos.

4. Los siguientes datos representan el peso en libras de 9 personas que trabajan en una oficina.
160 l, 200 l, 164 l, 130 l, 140 l, 162 l, 161 l, 185 l, 154 l.

   a) Calcula la media aritmética, la mediana y el rango de la serie de datos.
   b) ¿Cuál de las medidas, media o mediana, escogerías para representar la distribución? Justifica tu respuesta.

1.10 Practica lo aprendido

1. Una tienda de ropa tiene dos sucursales A y B. En 100 días registran la cantidad de clientes atendidos en cada sucursal, los datos se presentan en la siguiente tabla:

Cantidad de clientes	Cantidad de días	
	Sucursal A	Sucursal B
50 a 60	15	17
60 a 70	20	21
70 a 80	24	27
80 a 90	22	20
90 a 100	19	15

a) Calcula la varianza para cada una de las sucursales.
b) Con base a la varianza, ¿en cuál sucursal los datos se encuentran más dispersos?

2. Se realizó un estudio sobre el peso, en libras, de los estudiantes de noveno grado de un centro escolar. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Peso en libras	Sección A	Sección B
120 a 130	7	5
130 a 140	12	9
140 a 150	13	12
150 a 160	10	14
160 a 170	8	10

Utiliza la desviación típica para determinar en cuál de las secciones los pesos se encuentran más dispersos, con respecto a su media aritmética.

3. La estatura en pulgadas de cierto grupo de personas se muestra en la siguiente tabla. Sabiendo que $\mu = 67.45$

Estatura	f	Pm
60 - 62	1	61
62 - 64	4	63
64 - 66	8	65
66 - 68	30	67
68 - 70	37	69

a) Calcula la varianza.
b) Calcula la desviación típica.

2.1 Desviación típica de una variable, más una constante

En una empresa se aumenta \$50 al salario de 10 trabajadores; en la tabla de la derecha se muestran los salarios anteriores y el salario actual.

a) ¿Cuál es la media aritmética de ambas series de datos?
b) Calcula la desviación típica para ambas series de datos y compáralas, ¿qué ocurre?
c) ¿Qué pasaría con la desviación típica de los datos del salario actual si el aumento fuera de \$60?

Trabajador	Salario anterior (en dólares)	Salario actual (en dólares)
1	485	535
2	488	538
3	486	536
4	489	539
5	486	536
6	485	535
7	488	538
8	487	537
9	500	550
10	486	536

a) La media aritmética de los salarios anteriores se calcula:

$$\mu = \frac{485 + 488 + 486 + 489 + 486 + 485 + 488 + 487 + 500 + 486}{10}$$

$$= 488$$

Si a los datos de una serie A se les suma una constante dando como resultado otra serie B, entonces la media de B es igual a la media de A más la constante.

De manera similar se calcula la media aritmética de los salarios actuales, cuyo resultado es 538. Por lo tanto, la media aritmética de los salarios anteriores es \$488 y la de los salarios actuales es \$538.

b) En la tabla se muestran las desviaciones, de los salarios anteriores, con respecto a su media aritmética \$488 y sus respectivos cuadrados:

Trabajador	Salario anterior (en dólares)	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	485	−3	9
2	488	0	0
3	486	−2	4
4	489	1	1
5	486	−2	4
6	485	−3	9
7	488	0	0
8	487	−1	1
9	500	12	144
10	486	−2	4
Media (μ)	**488**		

Luego, la desviación típica se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{9+0+4+1+4+9+0+1+144+4}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{176}{10}}$$

$$= 4.2$$

De manera similar se calcula la desviación típica de los salarios actuales, cuyo resultado también es 4.2; es decir, la desviación típica a diferencia de la media aritmética, no se vio afectada al sumar 50 a cada uno de los datos.

c) Si el aumento fuera de $60, entonces la desviación típica sería igual a la calculada para el salario anterior, o sea 4.2.

C

Si a cada uno de los datos de una distribución A se les suma la misma constante c (c es un número cualquiera) dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a la desviación típica de la distribución A.

1. Observa la tabla con dos series de datos A y B, ¿tienen ambas distribuciones la misma desviación típica? Justifica tu respuesta y calcula el valor de la misma.

	Serie A	Serie B
1	25.1	37.1
2	26.4	38.4
3	27.5	39.5
4	20.7	32.7
5	21.2	33.2

2. En la residencial Centroamérica aumentarán $5 a la tarifa mensual por el servicio de agua potable. ¿Cuál será el valor de la desviación típica de la distribución teniendo en cuenta este cambio?

Casa	Tarifa a cancelar (en dólares)
1	10.50
2	10.60
3	12.20
4	11.50
5	12.90
6	11.40
7	12.60
8	12.50
9	11.30
10	35.50

2.2 Desviación típica de una variable multiplicada por una constante

P

Cinco corredores deciden que para el mes de febrero aumentarán al doble las longitudes que recorren cada semana para entrenar. En la tabla se presenta la longitud recorrida en enero y la longitud que se recorrerá en febrero.

a) Calcula la desviación típica de ambas series de datos.

b) Efectúa el cociente entre la desviación típica de febrero y la desviación típica de enero, ¿cuál es la relación entre ambos datos?

Corredores	Longitud recorrida en metros	
	Enero	Febrero
1	150	300
2	160	320
3	145	290
4	165	330
5	150	300

S

a) Para calcular la desviación típica es necesario tener la media aritmética de cada serie de datos. Para enero la media es:

$$\mu = \frac{150 + 160 + 145 + 165 + 150}{5} = 154.$$

Se calculan los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media aritmética 154 m, los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Corredores	Enero	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	150	–4	16
2	160	6	36
3	145	–9	81
4	165	11	121
5	150	–4	16
Media (μ)	**154**		

$$\sigma = \sqrt{\frac{16 + 36 + 81 + 121 + 16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{270}{5}}$$

$$= 7.35$$

La desviación típica de enero es 7.35.

Para los datos de febrero: como las longitudes se han aumentado al doble, (se han multiplicado por 2) entonces la media aritmética de febrero también aumenta al doble, o sea 308 m. La desviación típica se calcula de manera similar a la de enero, dando como resultado 14.7.

b) El cociente es:

$$\frac{\textit{Desviación típica de febrero}}{\textit{Desviación típica de enero}} = \frac{14.7}{7.35} = 2$$

Es decir, la desviación típica de febrero es el doble de la desviación típica de enero. Cuando los datos se multiplican por un número positivo, la desviación típica también se multiplica por ese número.

C

Si a cada uno de los datos de una distribución A se les multiplica por la misma constante c (c es un número positivo), dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a multiplicar la desviación típica de la distribución A por la constante c.

1. En la tabla de abajo se presentan tres series de datos:

   a) ¿Cuál es el número por el que se tienen que multiplicar los datos de la serie A para obtener la serie B?, ¿y para obtener la serie C?

   b) Calcula la desviación típica de la serie A, con base a ella calcula la desviación típica de las series B y C.

A	B	C
12.5	18.75	5.0
11.0	16.5	4.4
11.5	17.25	4.6
12.8	19.2	5.12
12.2	18.30	4.88

2. En una serie de datos, la media aritmética de la distribución es 35 y la desviación típica es 17.07; si cada uno de los datos se reduce a la mitad, ¿cuál será el valor de la nueva desviación típica?

3. Una librería registra la cantidad de libros vendidos, de lunes a viernes, durante dos semanas.

   a) ¿Cuál es el número por el que se tienen que multiplicar los datos de la semana 1 para obtener los de la semana 2?
   b) Calcula la desviación típica para ambas semanas.

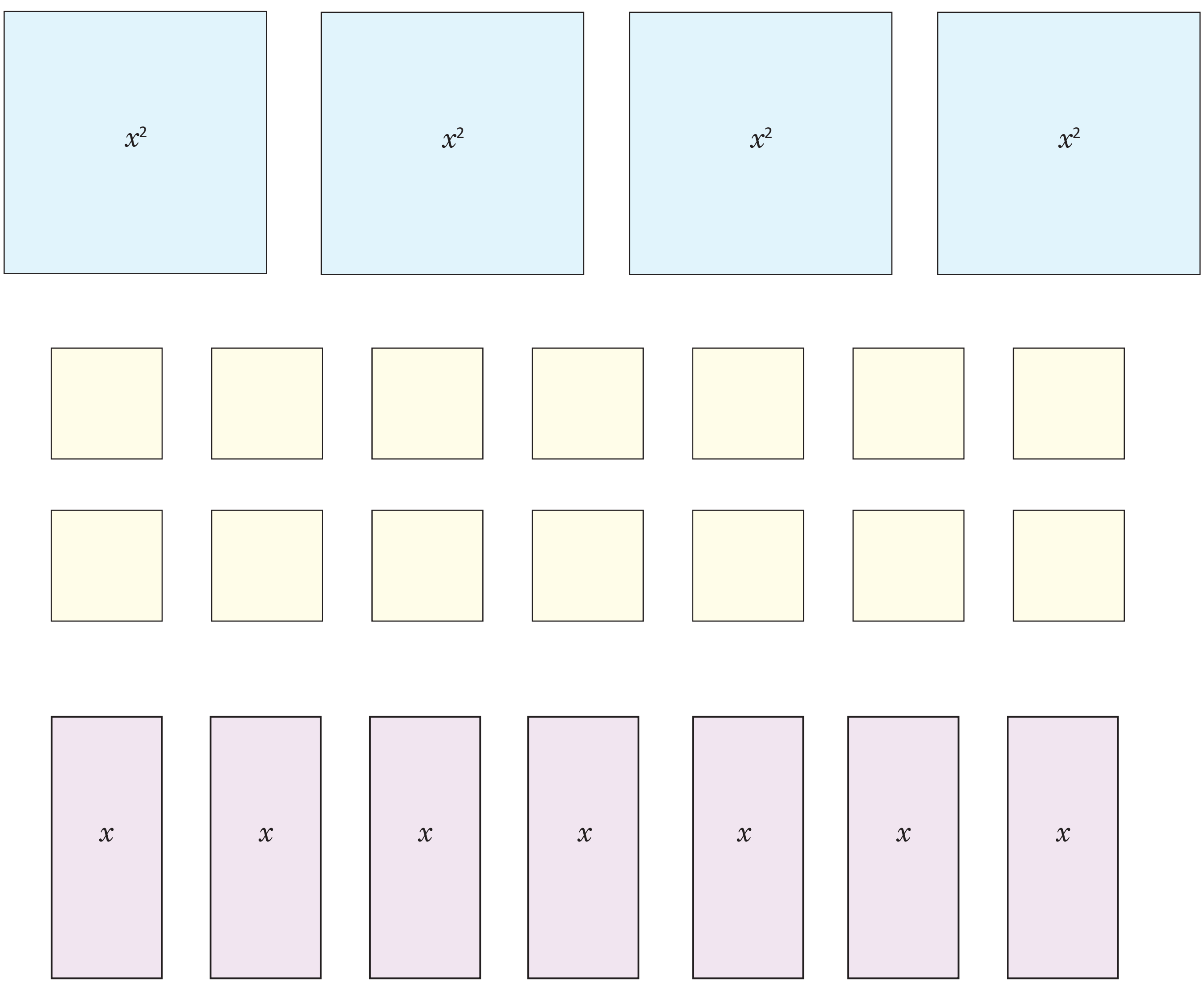
Días	Cantidad de libros vendidos	
	Semana 1	Semana 2
lunes	8	24
martes	9	27
miércoles	5	15
jueves	7	21
viernes	11	33

Material complementario

Se presenta el siguiente recurso para que pueda servir como apoyo en algunas clases de este libro. Este material no es para recortar, sino para sacar fotocopias en caso de que sea necesario.

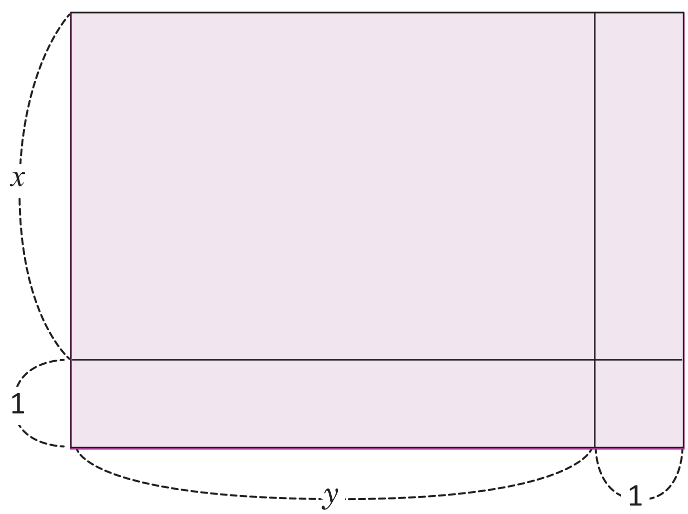
UNIDAD 1: Multiplicación de polinomios

Figuras que se pueden utilizar para las siguientes clases: 1.1, 2.1, 3.1, 3.3, 3.5

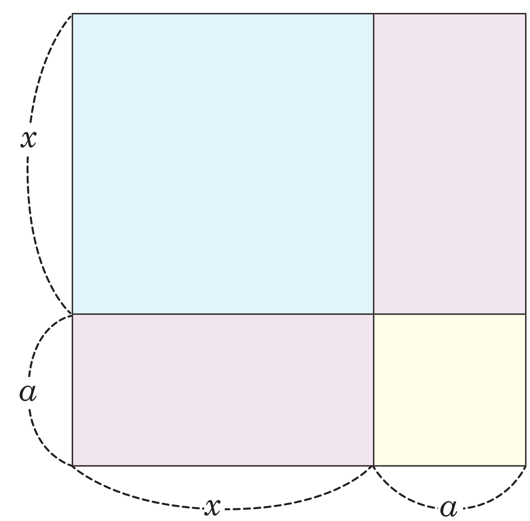


Figuras que se pueden utilizar para las siguientes clases: 1.1, 2.1, 3.1, 3.3, 3.5

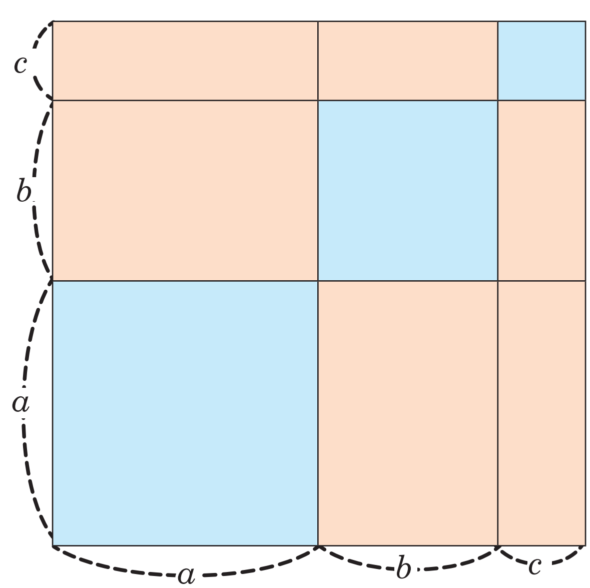
Clase: 1.2



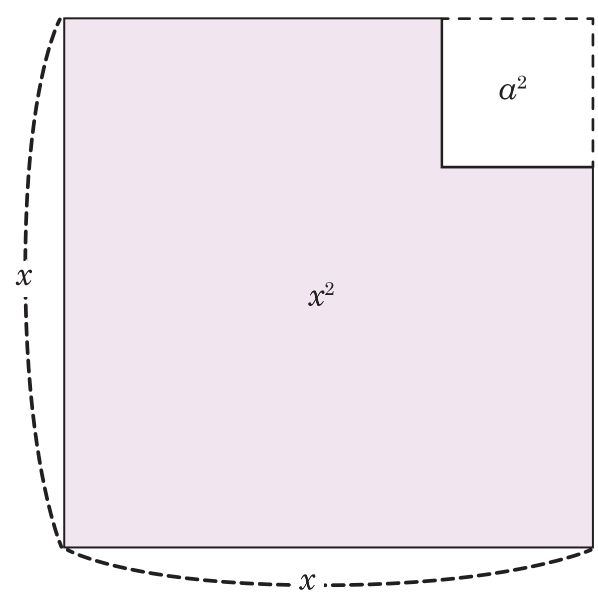
Clase: 2.2



Clase: 2.7



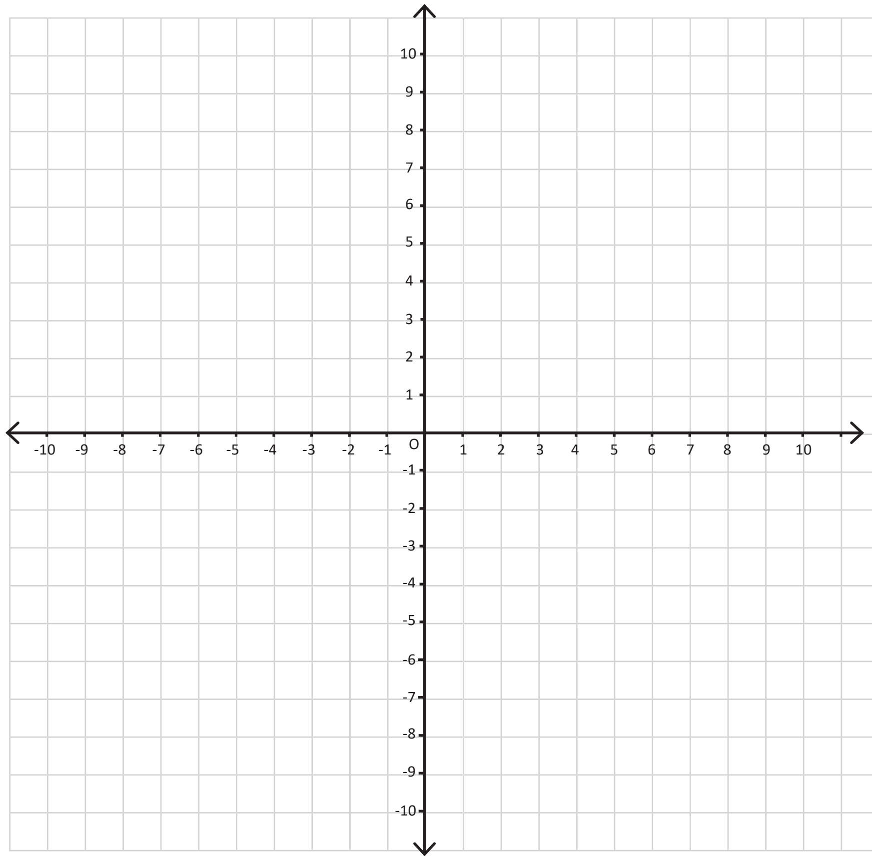
Clase: 3.6



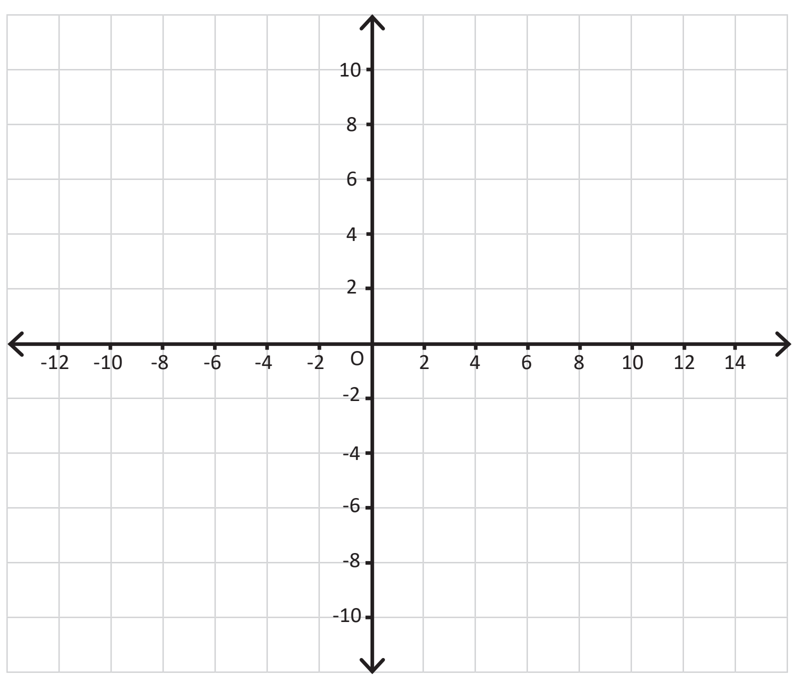
UNIDAD 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$

Figuras que se pueden utilizar para las clases:

1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 2.1, 2.2, 2.3



Clase: 1.6

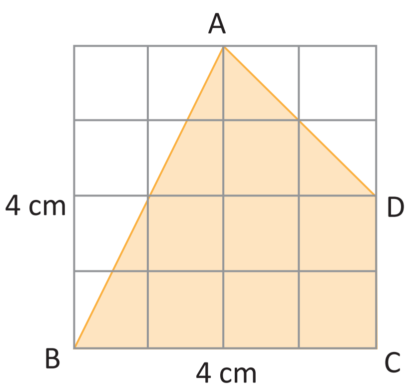


Unidad 8

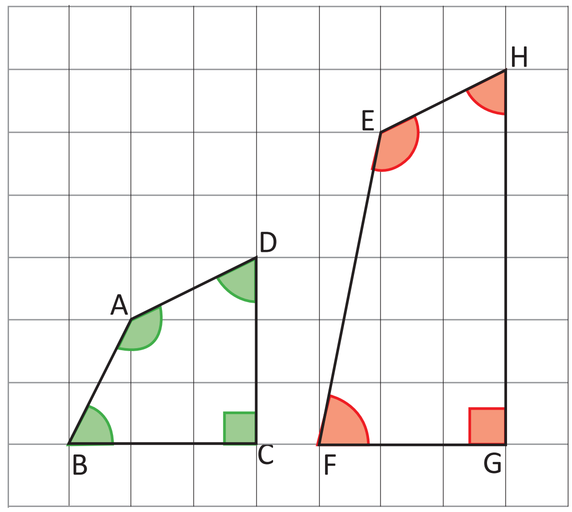
UNIDAD 5: Figuras semejantes

Figuras que se pueden utilizar:

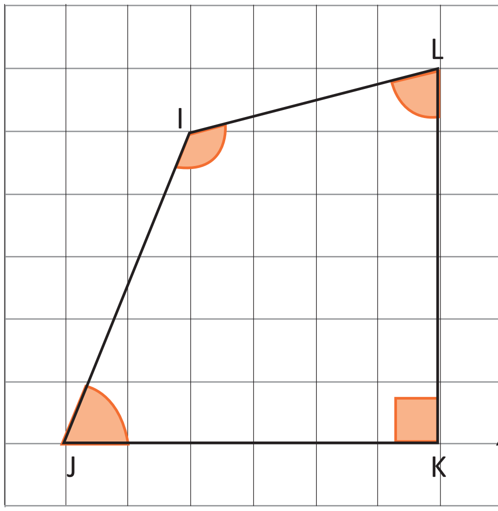
Clase 1.3



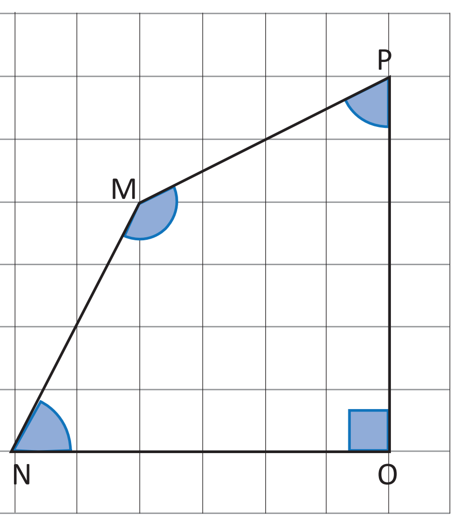
Clase 1.4



Clase 1.4



Clase 1.5

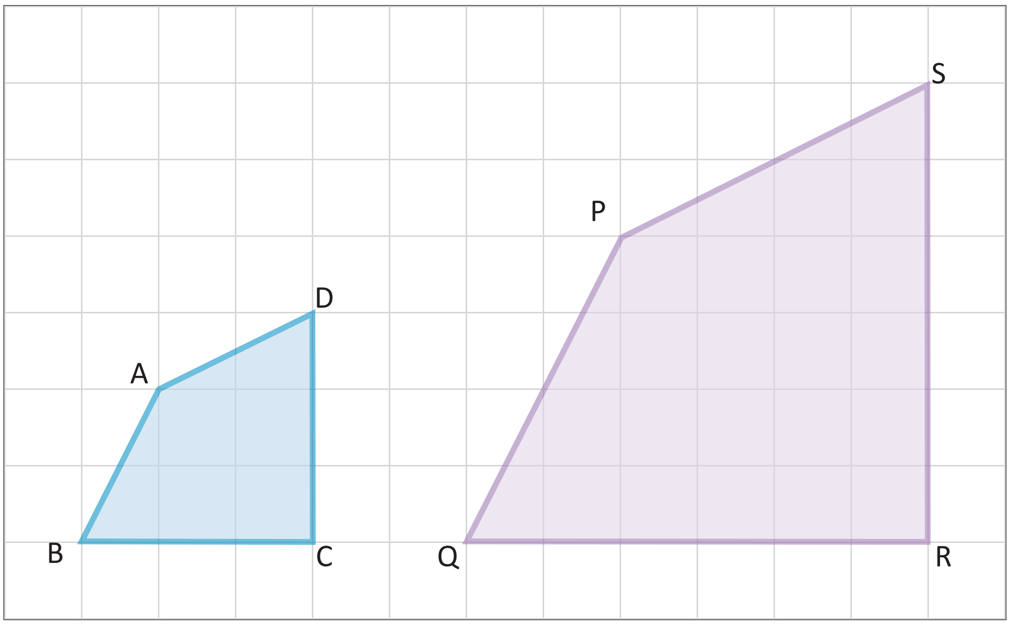


UNIDAD 5: Figuras semejantes

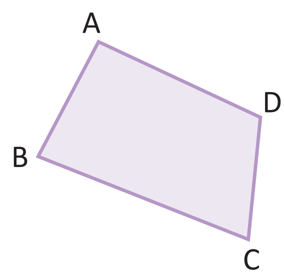
Figuras que se pueden utilizar:

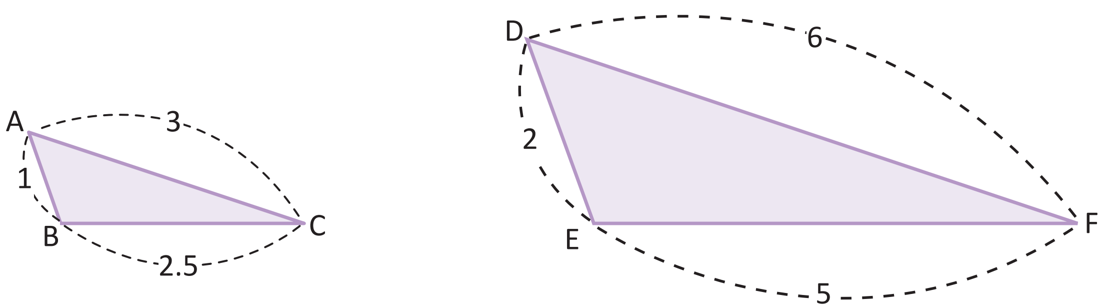
Clase 5

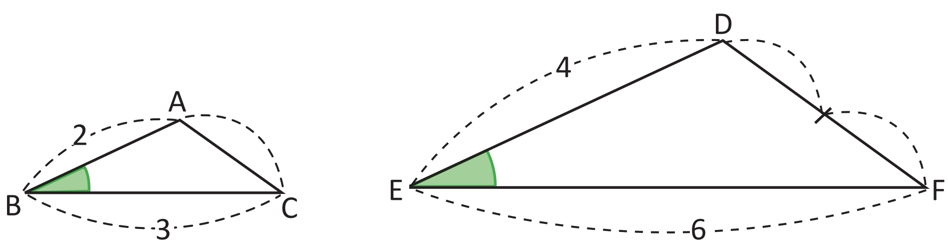
Clase 5



Clase 1.6



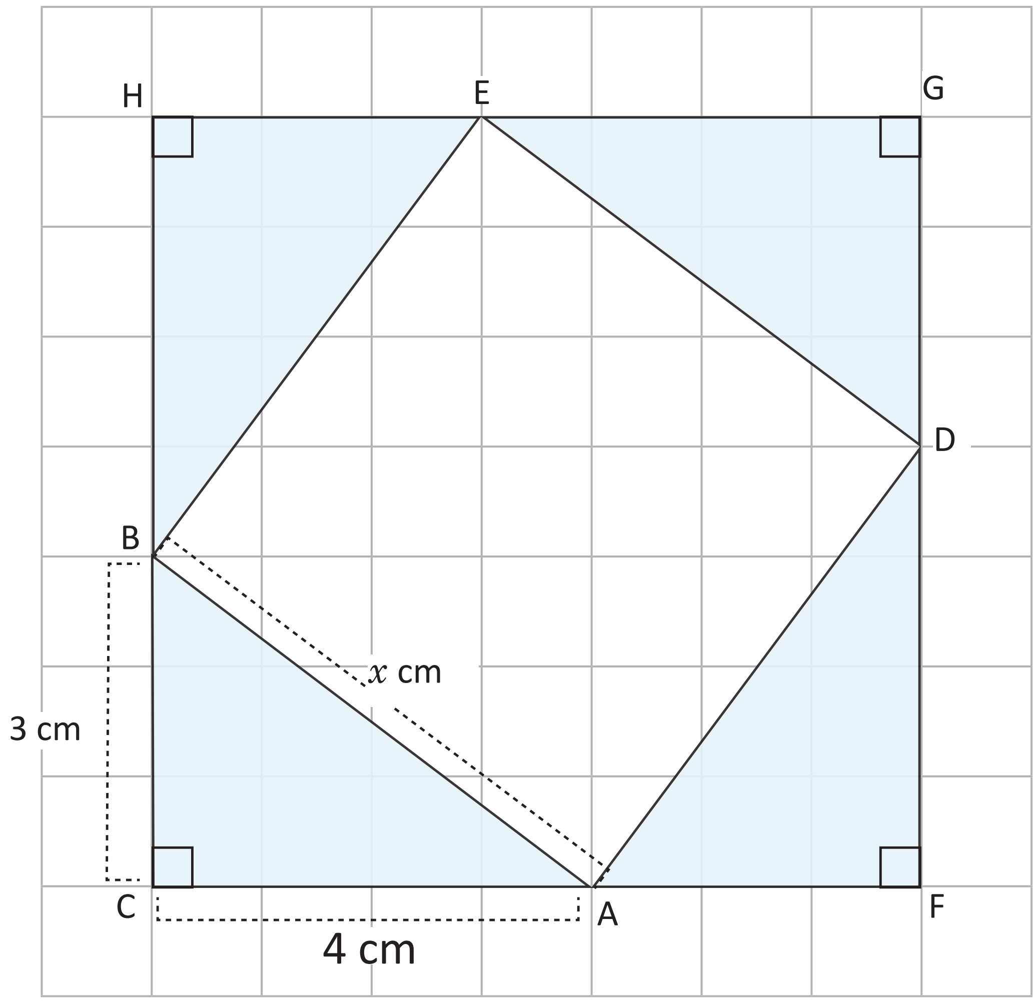




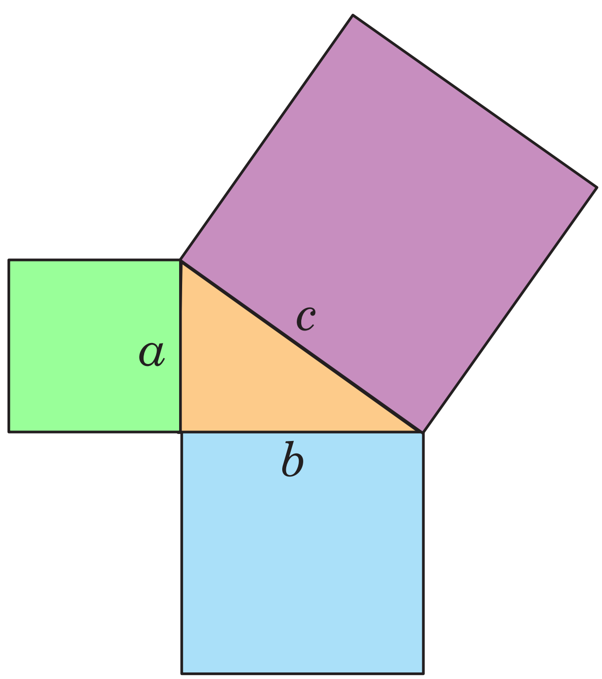
Unidad 8

Figuras que se pueden utilizar:

clase 1.1



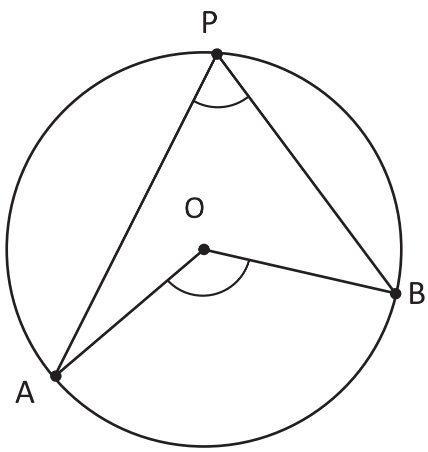
clase 1.4



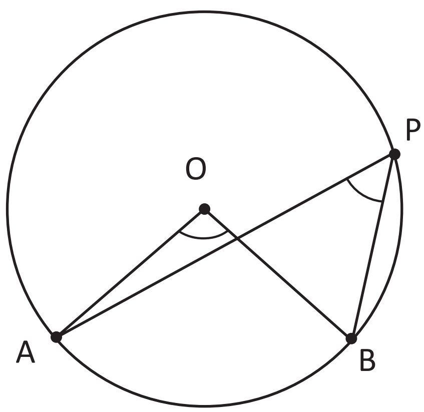
UNIDAD 7: Ángulo inscrito y central

Figuras que se pueden utilizar:

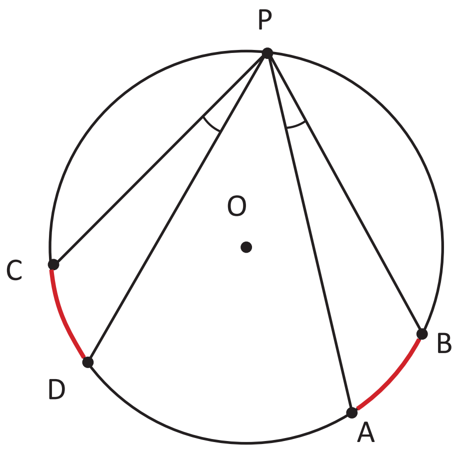
clase 1.4



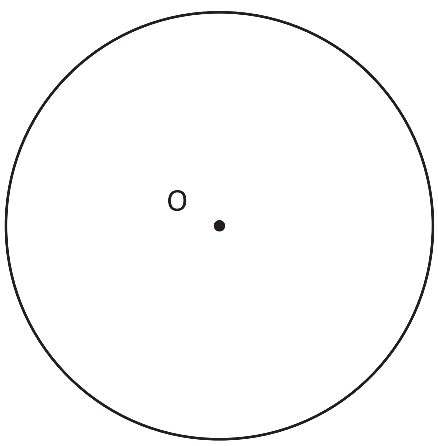
clase 1.5



clase 1.7



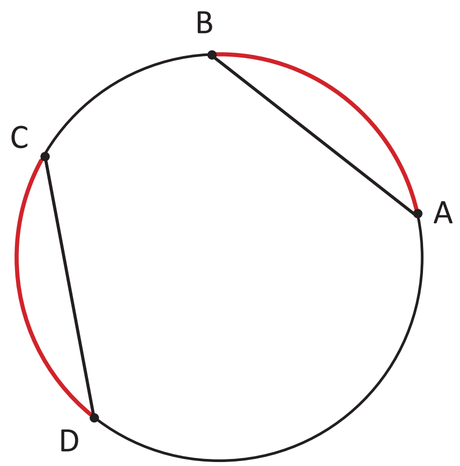
clase 2.1



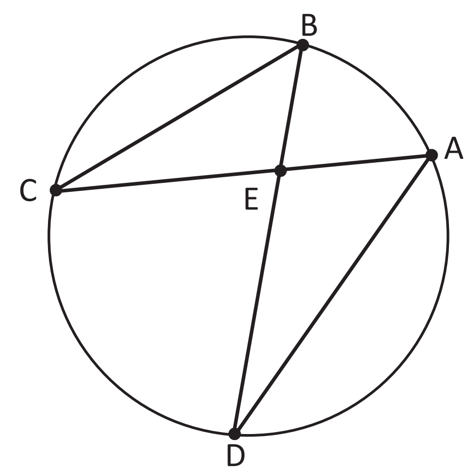
UNIDAD 7: Ángulo inscrito y central

Figuras que se pueden utilizar:

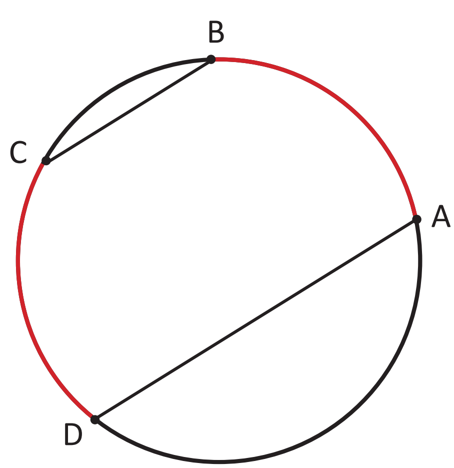
Clase 2.2



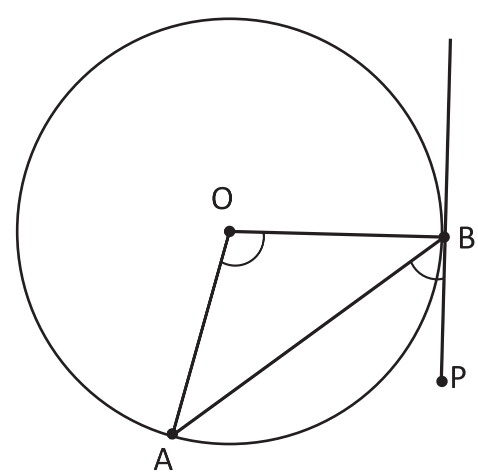
Clase 2.3



Clase 2.4



Clase 2.6



GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

JICA

Libro de texto Matemática 9