GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Libro de texto

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Libro de texto

ESMate

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de Ciencia y Tecnología *ad honorem*

Wilfredo Alexander Granados Paz
Director Nacional de Currículo

Edgard Ernesto Abrego Cruz
Director General de Niveles y Modalidades Educativas

Janet Lorena Serrano de López
Directora Nacional de Asesoramiento Educativo y Desarrollo Estudiantil

Gustavo Antonio Cerros Urrutia
Gerente Curricular para el Diseño y Desarrollo de la Educación General

Félix Abraham Guevara Menjívar
Jefe del Departamento de Matemática

Equipo técnico autoral del Ministerio de Educación

Alejandra Natalia Regalado Bonilla
Ana Ester Argueta Aranda
Diana Marcela Herrera Polanco
Doris Cecibel Ochoa Peña
Francisco Antonio Mejía Ramos
Inés Eugenia Palacios Vicente
Liseth Steffany Martínez de Castillo
María Dalila Ramírez Rivera
Marta Rubidia Gamero de Morales
Norma Yolibeth López de Bermúdez
Ruth Abigail Melara Viera
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
Vilma Calderón Soriano de Alvarado
Vitelio Alexander Sola Gutiérrez
Wendy Stefanía Rodríguez Argueta

Equipo de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real
Laura Guadalupe Pérez

Corrección de estilo
Karen Lissett Guzmán Medrano

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

Primera edición © 2018.
Segunda edición © 2019.

372.704 5
M425 Matemática 6 : libro de texto / equipo técnico autoral Wendy Stefanía Rodríguez, Diana Marcela Herrera, Salvador Enrique Rodríguez,
s/v Ana Ester Argueta, Ruth Abigail Melara, Vitelio Alexander Sola, Francisco Antonio Mejía. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : Ministerio de Educación (MINED), 2019.
192 p. : il. ; 28 cm. -- (Esmate)
ISBN 978-99961-89-99-9 (impreso)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Educación primaria-Libros de
Matemática 6 : libro de texto ... 2019
texto. 3. Matemáticas-Enseñanza elemental. I. Rodríguez Argueta, Wendy Stefanía, coaut. II. Título.
BINA/jmh

Estimados estudiantes:

Nos complace darles la bienvenida a un nuevo año escolar y a una nueva oportunidad de adquirir muchos conocimientos matemáticos.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes en Matemática basado en los resultados de procesos de evaluación en Educación Básica y Educación Media (ESMATE 2) hemos creado para ustedes diversos materiales educativos, uno de ellos es el Libro de texto que tienen en sus manos.

Este libro contiene múltiples problemas y actividades con los que podrán desarrollar su razonamiento y mejorar las capacidades matemáticas que les serán muy útiles para resolver situaciones de la vida diaria.

Por ello, les invitamos a abordar cada actividad que contiene este libro como un reto a vencer y contamos con que pondrán todo su esfuerzo y dedicación para convertirse en ciudadanos ejemplares que contribuyan al desarrollo de nuestro querido país.

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia y
Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de
Ciencia y Tecnología *ad honorem*

Conozcamos nuestro libro

Segunda edición

En la presente edición se han incorporado las sugerencias y observaciones brindadas por los docentes del sistema educativo nacional.

Secciones de cada clase

Título de la clase

Analiza

Plantea un problema para que lo resuelvas en esta clase.

Comprende

Destaca los aspectos más importantes sobre lo desarrollado en la clase.

Soluciona

Presenta una o más soluciones del problema inicial, una de ellas puede ser similar a tu solución.

Resuelve

Contiene actividades para que ejercites lo aprendido en la clase, similares que hiciste en la sección Analiza.

Clases especiales

Practica lo aprendido

Presenta ejercicios de todas las clases de una lección o unidad, para que practiques los contenidos desarrollados.

Secciones especiales

¿Qué pasaría?

Presenta problemas similares al de la sección Analiza, con nuevos retos para que practiques un poco más.

¿Sabías que...?

Proporciona datos curiosos relacionados al tema presentado en la clase.

Recuerda

Presenta uno o más ejercicios de clases, unidades o grados anteriores que te servirán para resolver el Analiza.

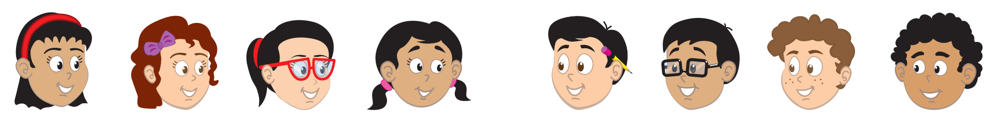
Desafíate

Propone retos matemáticos en los que puedes aplicar con creatividad lo visto en clase y descubrir lo mucho que has aprendido.

Nuestros acompañantes

Serán tus compañeras y compañeros durante todo el año escolar, compartirán contigo soluciones a los problemas planteados en la sección Analiza.

¡Hola, te acompañaremos en este nuevo año, aprenderemos mucho de Matemática!



Julia Carmen Ana Beatriz José Carlos Antonio Mario

Nuestros personajes

Estos personajes forman parte de la fauna de El Salvador y en nuestro libro te darán pistas, recomendaciones e información adicional para resolver los ejercicios propuestos. Es importante que los respetemos y protejamos porque son parte de la naturaleza y algunos de ellos están en peligro de extinción.

Soy un garrobo, es común que nos encuentres tomando el sol con iguanas, por lo que suelen confundirnos, pero somos especies diferentes.

Soy un armadillo, pero en El Salvador me conocen como cusuco, poseemos un duro caparazón que nos ayuda a protegernos.

Soy una tortuga golfina. Nosotras no olvidamos el lugar donde nacimos, por eso regresamos cada año a las playas de El Salvador a poner nuestros huevos.

Soy un perico frente naranja, conocido también como chocoyo. Nosotros podemos llegar a vivir hasta 25 años.

Índice

Unidad 1

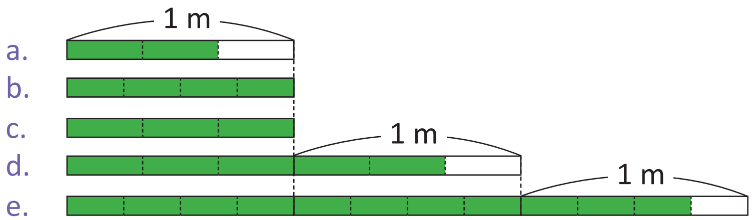
Operaciones con fracciones

En esta unidad aprenderás a

- Multiplicar fracciones por números naturales
- Multiplicar números mixtos por números naturales
- Multiplicar fracciones por fracciones
- Dividir fracciones entre números naturales
- Simplificar multiplicaciones de fracciones
- Encontrar el recíproco de un número

1.1 Practica lo aprendido

1. Escribe en cada literal la fracción que está representada en los gráficos:



2. Son fracciones equivalentes aquellas que, aunque parezcan distintas, tienen el mismo valor. Dada una fracción, se pueden encontrar fracciones equivalentes a ella por simplificación, al dividir el numerador y denominador por un mismo número. Por ejemplo:

$$\frac{10}{20} \xrightarrow{\div 2} \frac{5}{10} \xrightarrow{\div 5} \frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Encuentra tres fracciones equivalentes por simplificación:

a. $\frac{24}{36}$ b. $\frac{60}{90}$

Simplificar una fracción hasta su mínima expresión es escribirla con el menor numerador y denominador posible.

3. Simplifica las siguientes fracciones hasta su mínima expresión:

a. $\frac{20}{6}$ b. $\frac{15}{10}$ c. $\frac{30}{50}$

4. Para convertir fracciones impropias a números mixtos se realiza lo siguiente:

① Se divide el numerador de la fracción impropia entre su denominador; el cociente será el número natural del número mixto y el residuo es el numerador de la fracción propia.

② El denominador de la fracción impropia es el mismo que el de la fracción propia del número mixto.

Por ejemplo, $\frac{27}{4}$:

$27 \div 4 = \mathbf{6}$, residuo $\mathbf{3}$ → $\frac{27}{4} = \mathbf{6}\frac{\mathbf{3}}{}$

→ $\frac{27}{\mathbf{4}} = 6\frac{3}{\mathbf{4}}$

Para convertir números mixtos a fracciones impropias se realiza lo siguiente:

① Se multiplica el denominador por el número natural y se suma el numerador; el resultado será el numerador de la fracción impropia.

② El denominador de la fracción propia en el número mixto es el denominador de la fracción impropia.

Por ejemplo, $1\frac{3}{5}$:

$5 \times 1 + 3 = \mathbf{8}$ → $1\frac{3}{5} = \frac{\mathbf{8}}{}$

→ $1\frac{3}{\mathbf{5}} = \frac{8}{\mathbf{5}}$

Convierte las siguientes fracciones impropias en números mixtos, o viceversa:

a. $\frac{7}{4}$ b. $1\frac{1}{3}$

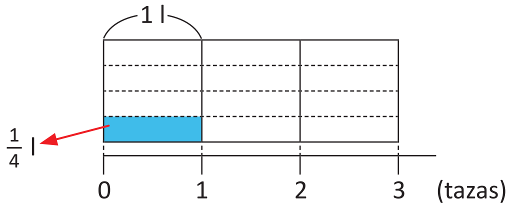
c. $\frac{3}{2}$ d. $1\frac{2}{3}$

1.2 Introducción a la multiplicación de fracciones con números naturales

Analiza

La taza es una unidad de capacidad para cantidades menores que un litro. Si una taza equivale a $\frac{1}{4}$ litros, ¿a cuántos litros equivalen 3 tazas?

PO: $\frac{1}{4} \times 3$



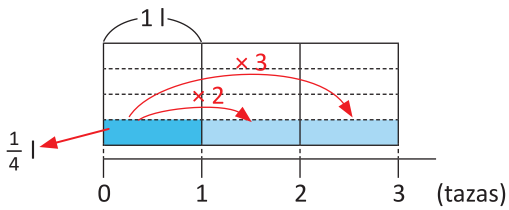
Observa que:

cantidad de litros en una taza × cantidad de tazas = equivalencia en litros

¿Cómo se puede calcular $\frac{1}{4} \times 3$?

Soluciona

La multiplicación $\frac{1}{4} \times 3$ significa tener $\frac{1}{4}$ repetido 3 veces.

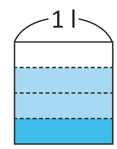


En el gráfico observo que:

$$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$$

R: $\frac{3}{4}$ litros.

La abreviatura de litro es l; 3 tazas contienen menos de un litro:



Comprende

Para multiplicar una fracción por un número natural:

① Se multiplica el numerador por el número natural.

② Se deja el mismo denominador.

Por ejemplo, $\frac{3}{7} \times 2$:

$$\frac{3}{7} \times 2 = \frac{3 \times 2}{7}$$
$$= \frac{6}{7}$$

Lo anterior se presenta en el siguiente esquema:

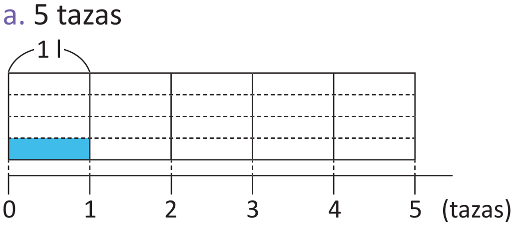
$$\frac{\blacktriangle}{\blacksquare} \times \bullet = \frac{\blacktriangle \times \bullet}{\blacksquare}$$

$\blacktriangle$, $\blacksquare$, $\bullet$ representan cualquier número natural.

Resuelve

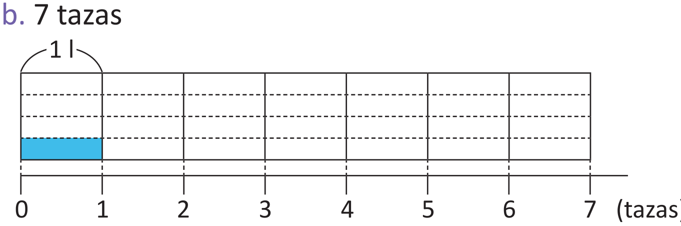
1. Encuentra la equivalencia en litros de las siguientes medidas en tazas. Utiliza el gráfico y el esquema para verificar que obtienes la misma respuesta:

a. 5 tazas



$\frac{1}{4} \times 5 = \frac{\triangle \times \bigcirc}{\square} =$

b. 7 tazas



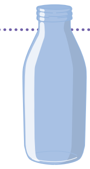
$\frac{1}{4} \times 7 = \frac{\triangle \times \bigcirc}{\square} =$

2. Efectúa (utiliza el procedimiento descrito en la sección Comprende):

a. $\frac{2}{9} \times 4$ b. $\frac{3}{10} \times 3$ c. $\frac{4}{15} \times 2$

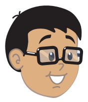
1.3 Multiplicación de fracciones con números naturales

Analiza



La botella también es una unidad de capacidad para cantidades menores que un litro. Si una botella equivale a $\frac{3}{4}$ litros, ¿a cuántos litros equivalen 3 botellas? Escribe el **PO** y calcula el resultado.

Soluciona



Carlos

PO: $\frac{3}{4} \times 3$

Aplico lo aprendido en la clase anterior:

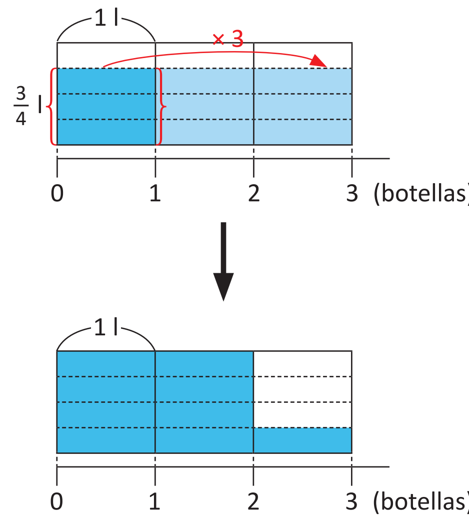
$$\frac{3}{4} \times 3 = \frac{3 \times 3}{4}$$
$$= \frac{9}{4}$$

Como $\frac{9}{4}$ es una fracción impropia, la convierto en número mixto:

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

R: $\frac{9}{4}\left(= 2\frac{1}{4}\right)$ litros.

Gráficamente, puedo realizar $\frac{3}{4} \times 3$ y verificar que es igual a $\frac{9}{4}$ o $2\frac{1}{4}$:



Observa que el resultado de $\frac{3}{4} \times 3$ nos dice cuánto es $\frac{3}{4}$ litros repetido 3 veces. Así que, tres cuartas partes, repetidas tres veces es $\frac{9}{4}$, o sea, $2\frac{1}{4}$.

Comprende

Si el resultado de una multiplicación es una fracción impropia, entonces este se puede convertir a número mixto.

Ejemplo:

$$\frac{4}{7} \times 5 = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}\left(= 2\frac{6}{7}\right)$$

Resuelve

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a. $\frac{1}{3} \times 4$ b. $\frac{2}{3} \times 7$ c. $\frac{3}{10} \times 7$

d. $\frac{2}{5} \times 3$ e. $\frac{7}{5} \times 4$ f. $\frac{3}{2} \times 5$

En e y f los multiplicandos son fracciones impropias, pero el procedimiento es el mismo que con fracciones propias.

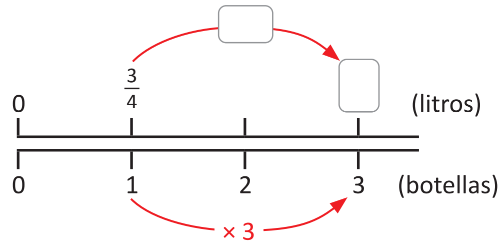
2. Una receta para panecillos de chocolate y avena requiere $\frac{3}{4}$ tazas de avena. Si preparamos 5 de estas recetas, ¿cuántas tazas de avena necesitamos?

3. Camila dedica cada tarde $\frac{3}{4}$ de hora para hacer sus tareas. ¿Cuántas horas dedicará para hacer sus tareas en 7 días?

1.4 Interpretación de las gráficas de doble recta numérica

Analiza

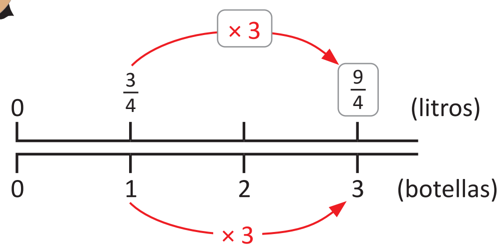
Interpreta la información de la siguiente gráfica, con relación al producto $\frac{3}{4} \times 3$:



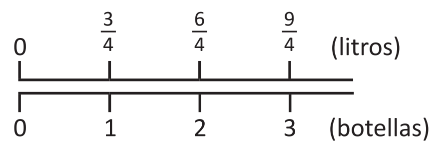
Soluciona

La gráfica muestra la relación que existe entre la cantidad de botellas (línea de abajo) y su equivalencia en litros (línea de arriba). Observo lo siguiente: 1 botella equivale a $\frac{3}{4}$ litros; si la cantidad de botellas se multiplica por 3 entonces la cantidad de litros también se multiplica por 3.

El gráfico completo es:



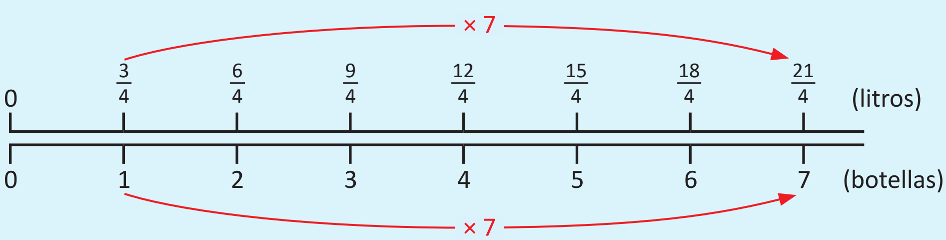
La escala de medida en las líneas no es la misma: en la línea de botellas se cuenta de 1 en 1; como 1 botella equivale a $\frac{3}{4}$ litros entonces, en la línea de litros se cuenta de $\frac{3}{4}$ en $\frac{3}{4}$.



Comprende

Las gráficas de doble recta numérica se usan para representar la relación entre dos cantidades que varían. Mientras una aumenta de 1 en 1, la otra puede aumentar en una cantidad diferente.

Por ejemplo, 7 botellas equivalen a $\frac{3}{4} \times 7$ litros; usando la gráfica de doble recta numérica:

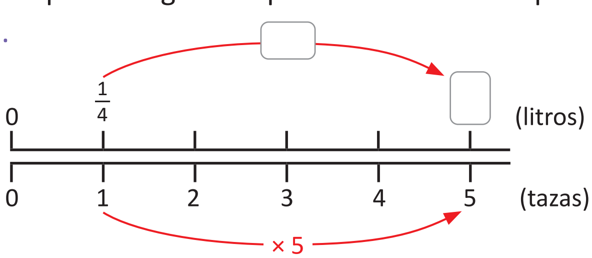


Las botellas aumentan de 1 en 1; mientras que los litros de $\frac{3}{4}$ en $\frac{3}{4}$. Luego, contamos 7 veces $\frac{3}{4}$. Así, 7 botellas equivalen a $\frac{21}{4}$ litros.

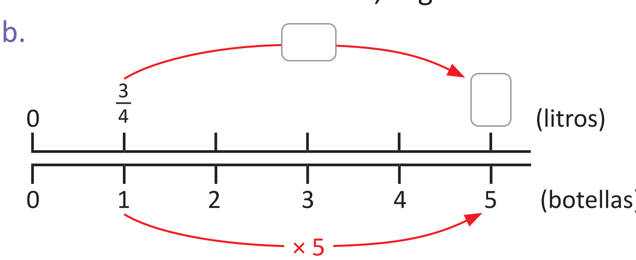
Resuelve

1. Completa las gráficas para encontrar las equivalencias de tazas o botellas a litros, según sea el caso:

a.



b.



2. ¿Cómo encontrarías el resultado de $\frac{2}{5} \times 2$ usando la gráfica de doble recta numérica?

1.5 Multiplicación de números mixtos por números naturales

Analiza

El galón es una unidad de capacidad para cantidades mayores que un litro. Si un galón equivale a $3\frac{3}{4}$ litros, ¿a cuántos litros equivalen 5 galones?

PO: $3\frac{3}{4} \times 5$

¿Cómo se puede calcular el resultado de $3\frac{3}{4} \times 5$?

Soluciona

Antonio

Convierto el número mixto a fracción impropia:

$$3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

Luego, multiplico:

$$\begin{aligned} 3\frac{3}{4} \times 5 &= \frac{15}{4} \times 5 \\ &= \frac{15 \times 5}{4} \\ &= \frac{75}{4} \left(= 18\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

R: $\frac{75}{4} \left(= 18\frac{3}{4}\right)$ litros.

Carmen

Como $3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$, entonces, en cinco galones hay 5 veces 3 litros, y 5 veces $\frac{3}{4}$ litros. En total, la cantidad de litros en cinco galones es $3 \times 5 + \frac{3}{4} \times 5$. Calculo el resultado de lo anterior:

$$\begin{aligned} 3 \times 5 + \frac{3}{4} \times 5 &= 15 + \frac{3 \times 5}{4} \\ &= 15 + \frac{15}{4} \\ &= 15 + 3\frac{3}{4} \\ &= 18\frac{3}{4} \end{aligned}$$

R: $18\frac{3}{4}$ litros.

Comprende

Para multiplicar números mixtos con números naturales se realiza lo siguiente:

1. Se convierte el número mixto en fracción impropia.
2. Se multiplica la fracción impropia por el número natural.
3. Si el resultado es otra fracción impropia, se puede convertir a número mixto.

Por ejemplo, $1\frac{1}{4} \times 3$:

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{4} \times 3 &= \frac{5}{4} \times 3 \\ &= \frac{5 \times 3}{4} \\ &= \frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

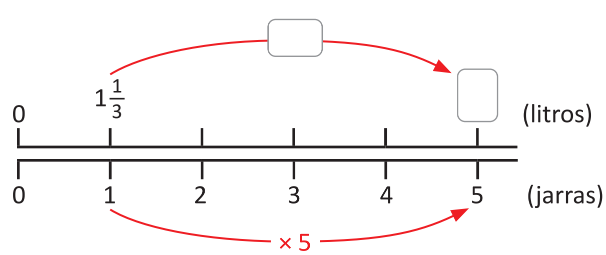
Resuelve

1. Efectúa:

a. $1\frac{1}{3} \times 2$ b. $1\frac{2}{5} \times 3$ c. $2\frac{1}{4} \times 5$

d. $2\frac{1}{5} \times 3$ e. $3\frac{2}{5} \times 4$ f. $4\frac{3}{4} \times 3$

2. Se necesitan $1\frac{1}{3}$ litros de jugo para llenar una jarra. ¿Cuántos litros de jugo se necesitarán para llenar 5 jarras?



1.6 Simplificación de multiplicación de fracciones por números naturales

Analiza

Simplifica hasta su mínima expresión la siguiente multiplicación:

$$\frac{5}{12} \times 9$$

Soluciona

José

Realizo primero la multiplicación; luego, simplifico el resultado:

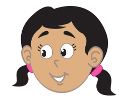
$$\frac{5}{12} \times 9 = \frac{5 \times 9}{12}$$

$$= \frac{\overset{15}{\cancel{45}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}$$

Divido el numerador y denominador entre 3, ya que el MCD de 45 y 12 es 3.

$$= \frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right)$$

R: $\frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right)$



Beatriz

Antes de realizar la multiplicación, me enfoco en los números 9 y 12, y simplifico, dividiendo ambos entre su MCD que es 3:

$$\frac{5}{12} \times 9 = \frac{5 \times \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}$$

¡Simplifico antes de multiplicar!

$$= \frac{5 \times 3}{4}$$

$$= \frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right)$$

R: $\frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right)$

Comprende

Simplificar antes de efectuar la multiplicación evita realizar cálculos más grandes. Se seleccionan parejas de números, uno en el numerador y otro en el denominador, y se dividen ambos entre su MCD. El resultado del cálculo debe estar en su mínima expresión.

Por ejemplo:

$$\frac{5}{12} \times 8 = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}$$ el MCD de 8 y 12 es 4

$$= \frac{5 \times 2}{3}$$

$$= \frac{10}{3} \left(= 3\frac{1}{3}\right)$$

Recuerda que, para simplificar también puedes dividir numerador y denominador por un mismo valor tantas veces hasta que ya no sea posible.

Resuelve

1. Efectúa (simplifica antes de realizar el cálculo):

a. $\frac{1}{6} \times 3$ b. $\frac{5}{18} \times 9$ c. $\frac{5}{12} \times 18$

d. $\frac{7}{24} \times 20$ e. $\frac{3}{5} \times 5$ f. $\frac{7}{10} \times 10$

Cuando resuelvas e y f recuerda que: $\frac{3}{1} = 3$ y $\frac{5}{1} = 5$

2. Si Olivia toma $\frac{3}{4}$ litros de leche cada día, ¿cuántos litros de leche beberá en 14 días?

3. Un apicultor recolecta $\frac{8}{5}$ kg de miel por cada panal de abejas. ¿Cuántos kilogramos recolectará por 10 panales?

Las abejas necesitan celdas adecuadas a la anatomía de sus cuerpos y que les permita optimizar el espacio. Por tal razón, sus panales están conformados por celdas hexagonales, y más aún, son hexágonos regulares; esto con el fin de maximizar la superficie útil.
Fuente: *api-cultura.com*

2.1 Introducción a la división de fracciones entre números naturales

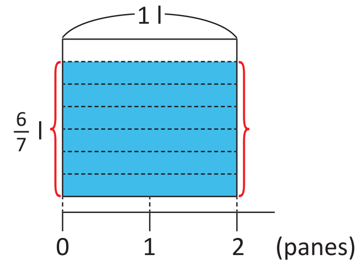
Recuerda

Dos jarras iguales se llenaron con 6 litros de jugo. ¿Con cuántos litros se llena cada jarra?, ¿qué operación utilizas para calcularlos?

Analiza

Si para elaborar dos panes se utilizaron $\frac{6}{7}$ litros de agua, ¿cuántos litros de agua se necesitan para elaborar un pan?

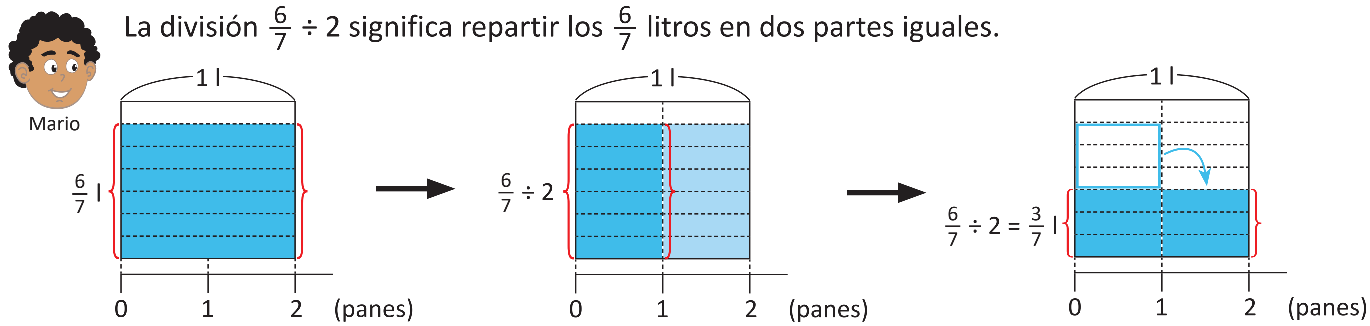
PO: $\frac{6}{7} \div 2$



¿Cómo se puede calcular el resultado de $\frac{6}{7} \div 2$?

Soluciona

La división $\frac{6}{7} \div 2$ significa repartir los $\frac{6}{7}$ litros en dos partes iguales.



Del gráfico deduzco lo siguiente:

$$\frac{6}{7} \div 2 = \frac{6 \div 2}{7} = \frac{3}{7}$$

R: $\frac{3}{7}$ litros.

Comprende

Cuando se divide una fracción entre un número natural, si es posible, se divide el numerador entre el divisor y se deja el mismo denominador.

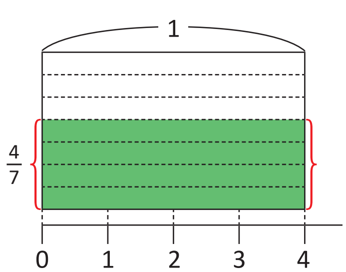
Por ejemplo, $\frac{4}{5} \div 2$:

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4 \div 2}{5} = \frac{2}{5}$$

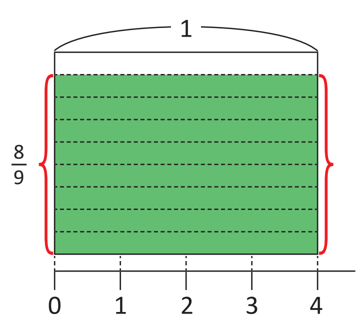
Resuelve

Encuentra el resultado de las siguientes divisiones, tanto de forma gráfica como aplicando lo descrito en la parte del Comprende:

a. $\frac{4}{7} \div 4$



b. $\frac{8}{9} \div 4$



2.2 División de fracciones entre números naturales

Recuerda

Verifica si las siguientes parejas de fracciones son equivalentes:

a. $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ b. $\frac{9}{12}$ y $\frac{12}{16}$

Analiza

Calcula el resultado de la siguiente división:

$$\frac{3}{4} \div 2$$

Soluciona

En la clase anterior aprendí que:

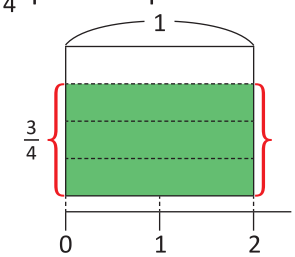
$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3 \div 2}{4}$$

La división 3 ÷ 2 no es exacta. Pero, al amplificar $\frac{3}{4}$ como $\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$, entonces sí puedo dividir entre 2.

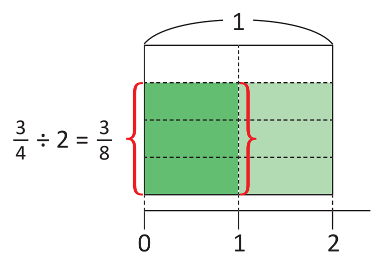
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \div 2 &= \frac{6}{8} \div 2 \\ &= \frac{6 \div 2}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

R: $\frac{3}{8}$

Gráficamente, $\frac{3}{4}$ puedo representarlo así:



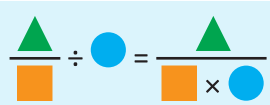
Al dividir entre 2, queda dividido en 4 × 2 = 8 partes iguales:



Comprende

Para dividir una fracción entre un número natural:

① Se deja el mismo numerador.
② Se multiplica el denominador por el número natural.



 representan cualquier número natural.

Resuelve

1. Efectúa:

a. $\frac{3}{5} \div 2$ b. $\frac{3}{7} \div 4$ c. $\frac{2}{7} \div 3$

d. $\frac{3}{5} \div 5$ e. $\frac{5}{6} \div 7$ f. $\frac{4}{9} \div 11$

2. Si se reparten equitativamente $\frac{2}{5}$ litros de leche en 3 vasos, ¿cuántos litros de leche quedan en cada vaso?

3. Si se reparten $\frac{3}{4}$ qq de arroz en cantidades iguales en 5 sacos, ¿cuántos quintales de arroz quedan en cada saco?

2.3 División de números mixtos entre números naturales

Recuerda

Efectúa: $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

Analiza

Carlos tiene $2\frac{1}{2}$ litros de jugo de naranja y los reparte en 3 recipientes. Si en cada recipiente coloca la misma cantidad de jugo, ¿cuántos litros de jugo hay en cada uno?

PO: $2\frac{1}{2} \div 3$

¿Cómo se puede calcular $2\frac{1}{2} \div 3$?

Soluciona

Primero, escribo el número mixto (dividendo) como fracción impropia:


Antonio

$$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Ahora, utilizo lo que aprendí en la clase anterior, es decir, dejo el mismo numerador y multiplico el denominador por el número natural:

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2} \div 3 &= \frac{5}{2} \div 3 \\ &= \frac{5}{2 \times 3} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

R: $\frac{5}{6}$ litros.

Comprende

Para dividir números mixtos entre números naturales:

① Se convierte el número mixto en fracción impropia.

② Se divide la fracción impropia entre el número natural usando el mismo procedimiento de la clase anterior, es decir, se deja el numerador y se multiplica el denominador por el número natural (si el resultado es fracción impropia, se puede convertir a número mixto).

Por ejemplo, $3\frac{2}{5} \div 2$:

$$\begin{aligned} 3\frac{2}{5} \div 2 &= \frac{17}{5} \div 2 \\ &= \frac{17}{5 \times 2} \\ &= \frac{17}{10} \left(= 1\frac{7}{10}\right) \end{aligned}$$

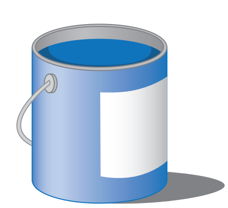
Resuelve

1. Efectúa:

a. $2\frac{1}{5} \div 3$ b. $3\frac{1}{4} \div 4$ c. $4\frac{2}{3} \div 5$

d. $3\frac{1}{5} \div 3$ e. $4\frac{3}{7} \div 5$ f. $5\frac{2}{3} \div 4$

2. Si con $1\frac{1}{4}$ gal se pintó una pared de 40 m^2, ¿cuánta pintura se utiliza para 1 m^2?



2.4 Simplificación de divisiones

Recuerda

Efectúa (simplifica la respuesta hasta su mínima expresión): $\frac{7}{10} \times 15$

Analiza

Efectúa (simplifica hasta su mínima expresión):

$$\frac{4}{5} \div 12$$

Soluciona


José

Realizo primero la división, luego simplifico el resultado:

$$\frac{4}{5} \div 12 = \frac{4}{5 \times 12}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{15}{\cancel{60}}}$$

Divido el numerador y denominador entre 4, ya que el MCD de 4 y 60 es 4.

$$= \frac{1}{15}$$

¡Simplifico la respuesta final!


Ana

Antes de realizar la multiplicación, me enfoco en los números 4 y 12, y simplifico, dividiendo ambos entre su MCD que es 4:

$$\frac{4}{5} \div 12 = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5 \times \underset{3}{\cancel{12}}}$$

$$= \frac{1}{5 \times 3}$$

$$= \frac{1}{15}$$

¡Al igual que la multiplicación, simplifico antes de multiplicar!

Comprende

Simplificar una división antes de multiplicar es útil ya que se evitan cálculos más grandes. Para hacerlo, se divide el numerador y el número natural entre su MCD.

Por ejemplo, $\frac{3}{4} \div 9$:

$$\frac{3}{4} \div 9 = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4 \times \underset{3}{\cancel{9}}}$$

$$= \frac{1}{4 \times 3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Algunas divisiones con números mixtos también se pueden simplificar al convertir el número mixto a fracción impropia. Por ejemplo:

$$2\frac{4}{5} \div 6 = \frac{14}{5} \div 6$$

$$= \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{5 \times \underset{3}{\cancel{6}}}$$

$$= \frac{7}{5 \times 3}$$

$$= \frac{7}{15}$$

Resuelve

1. Efectúa:

a. $\frac{2}{5} \div 8$

b. $\frac{12}{13} \div 6$

c. $\frac{6}{7} \div 3$

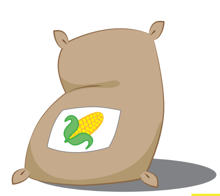
d. $\frac{18}{11} \div 9$

e. $\frac{24}{7} \div 6$

f. $\frac{22}{7} \div 11$

2. Si $\frac{16}{5}$ lb de comida para perro se distribuyen equitativamente en 4 bolsas, ¿cuántas libras hay en cada bolsa?

3. Si $3\frac{3}{4}$ qq de maíz se dividen en 5 partes iguales, ¿cuántos quintales hay en cada parte?



2.5 Practica lo aprendido

En resumen, en esta lección hemos aprendido que:

En la multiplicación, se multiplica el numerador por el número natural; mientras que, en la división, se multiplica el denominador por el número natural. Si es posible simplificar, hazlo antes de multiplicar.

1. Efectúa (simplifica donde sea posible):

a. $\frac{2}{9} \times 4$ b. $\frac{4}{5} \times 3$ c. $3\frac{1}{4} \times 2$

d. $\frac{3}{8} \times 10$ e. $\frac{4}{5} \div 3$ f. $\frac{1}{7} \div 10$

g. $\frac{1}{10} \div 6$ h. $\frac{6}{7} \div 2$ i. $\frac{5}{8} \div 4$

2. David practica piano $1\frac{1}{3}$ horas cada día. ¿Cuántas horas practicará en 5 días?

Uno de los pianistas más reconocidos de la historia fue **Ludwin Van Beethoven**. Aunque su vida estuvo marcada por una terrible sordera, algunos de sus trabajos más importantes los compuso cuando prácticamente era incapaz de escuchar.
Fuente: *www.biography.com*

3. Se reparten equitativamente $11\frac{2}{3}$ quintales de maíz en 10 recipientes. ¿Cuántos quintales hay en cada recipiente?

4. En la fábrica Camisal utilizaron $8\frac{3}{4}$ yardas de tela para fabricar 5 camisas iguales. ¿Cuántas yardas utilizaron para cada camisa?

Desafíate

1. Julia trabajó $\frac{3}{4}$ horas cada día, durante 2 días, en su proyecto de Ciencias. Mario trabajó $\frac{1}{4}$ de hora cada día, durante 6 días, en el mismo proyecto. ¿Quién de ellos trabajó más tiempo en su proyecto?

El **tornillo de Arquímides** posee más de 2,000 años de antigüedad. Históricamente ha sido utilizado para el riego y el drenaje de agua en las minas. Al girar el mecanismo, el agua asciende por medio del tornillo por el otro extremo.
Fuente: *www.historiaybiografias.com*

2. Al final de una jornada de ciclismo entre 5 compañeros, el equipo consumió 15 botellas de agua de $\frac{3}{4}$ litros cada botella. Suponiendo que todos bebieron la misma cantidad de agua, ¿cuántos litros bebió cada uno?

3.1 Multiplicación por fracciones unitarias

Recuerda

Se llaman fracciones unitarias a aquellas cuyo numerador es 1; por ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Escribe otros ejemplos de fracciones unitarias.

Analiza

Si una botella equivale a $\frac{3}{4}$ litros, ¿cuántos litros hay en $\frac{1}{2}$ botella?

PO: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

¿Cómo se puede calcular $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$?

Piensa: ¿cómo sería calcular la cantidad de litros en 2 botellas y en 3 botellas? ¿Cómo sería entonces para $\frac{1}{2}$ botella?

2 botellas: $\frac{3}{4} \times 2$, es decir, $\frac{3}{4}$ repetido 2 veces.

3 botellas: $\frac{3}{4} \times 3$, es decir, $\frac{3}{4}$ repetido 3 veces.

$\frac{1}{2}$ botella: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, es decir, $\frac{3}{4}$ repetido $\frac{1}{2}$ veces.

Además:

cantidad de litros en una botella × cantidad de botellas = equivalencia en litros

Soluciona

Carmen

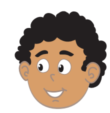
La cantidad de litros en media botella la puedo encontrar también dividiendo entre 2 la cantidad de litros en 1 botella, es decir:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \div 2$$

¡Esta operación la aprendí en clases anteriores! Efectúo la división de una fracción por un número natural:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} &= \frac{3}{4} \div 2 \\ &= \frac{3}{4 \times 2} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

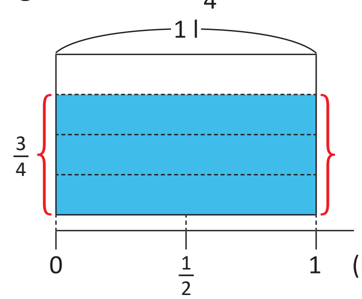
R: $\frac{3}{8}$ litros.



Mario

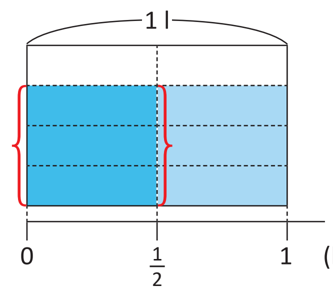
La multiplicación $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ significa tener $\frac{3}{4}$ repetido $\frac{1}{2}$ veces. Esto equivale a calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, es decir, la mitad de $\frac{3}{4}$.

Represento gráficamente $\frac{3}{4}$ l:



Lo divido en 2 partes iguales:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \div 2$$
$$= \frac{3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$



Después de dividir en 2 partes iguales, 1 litro quedará dividido en $4 \times 2 = 8$ partes.

R: $\frac{3}{8}$ litros.

Comprende

Una multiplicación por una fracción unitaria equivale a una división entre número natural, donde el denominador de la fracción unitaria es el divisor.

$$\frac{\blacktriangle}{\blacksquare} \times \frac{1}{\bullet} = \frac{\blacktriangle}{\blacksquare} \div \bullet = \frac{\blacktriangle}{\blacksquare \times \bullet}$$

$\blacktriangle$, $\blacksquare$, $\bullet$ representan cualquier número natural.

Por ejemplo:

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{5} \div 9$$
$$= \frac{2}{5 \times 9}$$
$$= \frac{2}{45}$$

Resuelve

1. Completa aplicando la equivalencia de multiplicación por fracción unitaria y división entre número natural, y luego efectúa:

a. $\frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{5} \div \square$

b. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \square 5$

c. $\frac{8}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9} \div \square$

d. $\frac{7}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{11} \square 2$

2. Calcula cuántos litros hay en las siguientes cantidades:

a. $\frac{1}{3}$ botellas

b. $\frac{1}{5}$ botellas

c. $\frac{1}{7}$ botellas

d. $\frac{1}{11}$ botellas

¿Sabías que...?

Historia de las fracciones

El origen de las fracciones o quebrados es muy remoto, ya eran conocidas por los babilonios, egipcios y griegos. Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellas la distribución del pan, el sistema de construcción de pirámides y las medidas utilizadas para estudiar la tierra. Esto lo comprobamos en numerosas inscripciones antiguas como el Papiro de Ahmes.

En el siglo VI después de Cristo fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones. En esa época, Aryabhata se preocupó de estas leyes y después lo hizo Bramagupta en el siglo VII.

Las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira (en el siglo IX) y Bháskara (en el siglo XII).

El nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el libro de aritmética de "Al-Juarizmi". Él empleó la palabra "fractio" para traducir la palabra árabe "al-Kasr", que significa quebrar, romper.

Las fracciones se conocen también con el nombre de "quebrados”. El origen de las fracciones apunta a la necesidad de contar, de medir y de repartir, entre otras.

Fuente: *https://sites.google.com/site/cienciasnaturaleslbjb*

3.2 Multiplicación con fracciones

Analiza

¿Cuántos litros hay en $\frac{5}{7}$ botellas?

PO: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$

¿Cómo se puede calcular $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$?

En la clase anterior aprendimos que:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

Soluciona

José

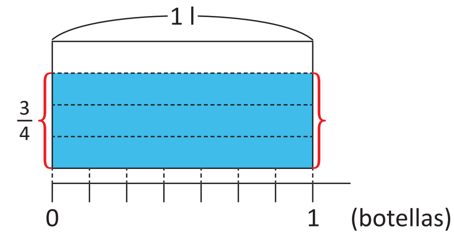
$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$ significa tener $\frac{3}{4}$ repetido $\frac{5}{7}$ veces. Esto equivale a calcular $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$.

En $\frac{5}{7}$ hay **5** veces $\frac{1}{7}$, es decir, $\frac{1}{7} \times$ **5**; calculo primero $\frac{1}{7}$ de $\frac{3}{4}$ y luego multiplico por **5**:

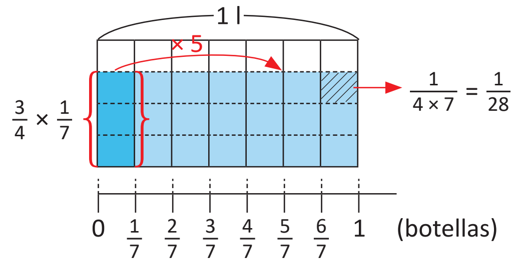
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} &= \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}\right) \times 5 \\ &= \left(\frac{3}{4} \div 7\right) \times 5 \\ &= \frac{3}{4 \times 7} \times 5 \\ &= \frac{3}{28} \times 5 \\ &= \frac{15}{28} \end{aligned}$$

R: $\frac{15}{28}$ litros.

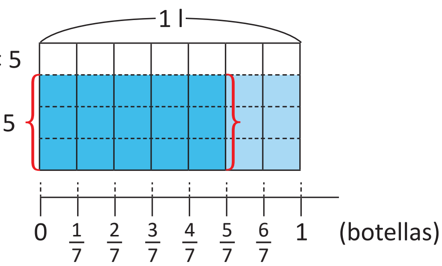
Gráficamente, $\frac{3}{4}$ lo represento así:



Divido $\frac{3}{4}$ en 7 partes para calcular $\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}$; luego, multiplico por 5:



$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} &= \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}\right) \times 5 \\ &= \left(\frac{3}{4} \div 7\right) \times 5 \\ &= \frac{15}{28} \end{aligned}$$



Comprende

Multiplicar una fracción por otra fracción se puede interpretar como calcular una fracción de otra fracción y, para calcular el resultado, se reescribe la multiplicación de la siguiente forma:

$$\frac{▲}{■} \times \frac{◆}{●} = \left(\frac{▲}{■} \times \frac{1}{●}\right) \times ◆$$

▲, ■, ◆, ● representan cualquier número natural.

Resuelve

Efectúa:

a. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \left(\frac{△}{□} \times \frac{1}{○}\right) \times ◇ =$

b. $\frac{4}{9} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{△}{□} \times \frac{1}{○}\right) \times ◇ =$

c. $\frac{1}{7} \times \frac{2}{3}$

d. $\frac{6}{7} \times \frac{2}{7}$

3.3 Algoritmo de la multiplicación

Analiza

El resultado de la multiplicación $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$ es $\frac{15}{28}$ (lo calculaste en la clase anterior). Realiza lo siguiente:

a. Encuentra la fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$, y cuyo denomidador es igual al producto de los denominadores de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$.

b. ¿Es la fracción que encontraste en a. igual al resultado de $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$? ¿Qué puedes concluir sobre el procedimiento para multiplicar fracciones?

Soluciona


Julia

a. Multiplico los numeradores de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$:

$$3 \times 5 = 15$$

Multiplico los denominadores de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$:

$$4 \times 7 = 28$$

Entonces, la fracción buscada es $\frac{15}{28}$.

b. Sí, es igual la fracción encontrada en a. con el resultado de $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$. Esto quiere decir que para multiplicar fracciones debo multiplicar los numeradores y multiplicar los denominadores, o sea:

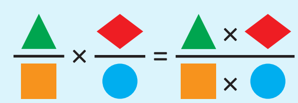
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} &= \frac{3 \times 5}{4 \times 7} \\ &= \frac{15}{28} \end{aligned}$$

Comprende

En resumen, para multiplicar una fracción por otra fracción:

① Se multiplican los numeradores.
② Se multiplican los denominadores.

Si el resultado es una fracción impropia, puede convertirse a número mixto.



 representan cualquier número natural.

Por ejemplo, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} &= \frac{2 \times 2}{3 \times 5} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Para multiplicar números naturales por fracciones, multiplica el número natural por el numerador y deja el mismo denominador.

También, siempre que aparezcan números naturales en una multiplicación con fracciones, puedes escribir un 1 como denominador al número natural y multiplicar como si fuesen dos fracciones. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \times 4 &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{1} \\ &= \frac{3 \times 4}{5} \\ &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Resuelve

Efectúa:

a. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ b. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$ c. $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$

e. $\frac{2}{9} \times \frac{8}{3}$ f. $\frac{7}{5} \times \frac{3}{4}$ g. $\frac{5}{7} \times 3$ h. $5 \times \frac{8}{3}$

3.4 Simplificación de multiplicación de fracciones

Recuerda

¿Cuáles son los pasos para multiplicar fracciones?

Analiza

Calcula el resultado de la siguiente multiplicación (recuerda simplificar):

$$\frac{10}{9} \times \frac{3}{5}$$

Soluciona

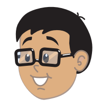
Realizo la multiplicación y simplifico el resultado:


Ana

$$\frac{10}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{10 \times 3}{9 \times 5}$$
$$= \frac{\overset{2}{\cancel{30}}}{\underset{3}{\cancel{45}}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

El MCD de 30 y 45 es 15

Simplifico antes de multiplicar; el MCD de 10 y 5 es 5, mientras que el de 3 y 9 es 3:


Carlos

$$\frac{10}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times \underset{1}{\cancel{5}}}$$
$$= \frac{2 \times 1}{3 \times 1}$$
$$= \frac{2}{3}$$

Comprende

Cuando sea posible, es mejor simplificar antes de multiplicar. Puede simplificarse cualquier numerador con cualquier denominador.

¿Qué pasaría?

También puedes simplificar de la siguiente forma:

$$\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

Resuelve

1. Efectúa (simplifica antes de realizar el cálculo):

a. $\frac{4}{21} \times \frac{7}{10}$

b. $\frac{7}{24} \times \frac{4}{7}$

c. $\frac{12}{35} \times \frac{14}{15}$

d. $\frac{5}{9} \times \frac{7}{15}$

e. $\frac{3}{8} \times \frac{6}{7}$

f. $\frac{11}{7} \times \frac{49}{44}$

2. Si 1 botella equivale a $\frac{3}{4}$ litros, ¿a cuántos litros equivalen $\frac{8}{9}$ botellas?

Desafíate

Utiliza la información del “Qué pasaría” para completar el esquema con los números adecuados:

$$\frac{\bigcirc}{5} \times \frac{3}{\bigcirc} = \frac{\bigcirc}{5} \times \frac{3}{\bigcirc} = \frac{3}{10}$$

3.5 Multiplicación con números mixtos

Recuerda

Efectúa:

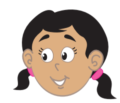
$$2\frac{1}{3} \times 4$$

Analiza

Realiza la siguiente multiplicación:

$$1\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{4}$$

Soluciona


Beatriz

Convierto los números mixtos a fracciones impropias y multiplico:

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 1\frac{2}{3} \times 2\frac{3}{4} &= \frac{5}{3} \times \frac{11}{4} \\ &= \frac{5 \times 11}{3 \times 4} \\ &= \frac{55}{12} \\ &= 4\frac{7}{12} \end{aligned}$$

Comprende

Para multiplicar con números mixtos:

1. Se convierten los números mixtos en fracciones impropias.
2. Si es posible simplificar, se simplifica.
3. Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Si el resultado es una fracción impropia, se puede convertir a número mixto.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4} &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5} \times \frac{21}{\underset{2}{\cancel{4}}} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{21}{2} \\ &= \frac{1 \times 21}{5 \times 2} \\ &= \frac{21}{10} \left(= 2\frac{1}{10}\right) \end{aligned}$$

Resuelve

1. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a. $1\frac{2}{5} \times 2\frac{2}{3}$ b. $2\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3}$ c. $1\frac{1}{6} \times \frac{3}{7}$

d. $\frac{3}{4} \times 2\frac{4}{5}$ e. $2\frac{6}{7} \times 4$ f. $6 \times 2\frac{1}{9}$

2. Si se necesitan $1\frac{1}{3}$ tazas con leche para preparar un vaso de licuado de guineo, ¿cuántas tazas con leche se necesitan para preparar 2 vasos y medio?

3.6 Propiedades conmutativa y asociativa en fracciones

Analiza

En cada literal, calcula los resultados de las multiplicaciones y verifica que son iguales:

a. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ y $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

b. $\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}\right)$

Soluciona

a. Realizo ambas multiplicaciones:


Antonio

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

¡El resultado es el mismo! Es decir:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

b. Calculo el resultado de ambas multiplicaciones:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{8 \times 1}{15 \times 3} = \frac{8}{45}$$

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{15} = \frac{2 \times 4}{3 \times 15} = \frac{8}{45}$$

¡Obtuve el mismo resultado! Es decir:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}\right)$$

Comprende

- Propiedad conmutativa: al multiplicar dos fracciones, no importa en qué orden se haga, el resultado es el mismo. Es decir, si ▲ y ■ representan fracciones entonces:

  ▲ × ■ = ■ × ▲

- Propiedad asociativa: para multiplicar tres o más fracciones se puede ir multiplicando de dos en dos. Es decir, si ▲, ■ y ● representan fracciones, entonces:

  (▲ × ■) × ● = ▲ × (■ × ●)

Resuelve

1. Comprueba la propiedad conmutativa en las siguientes multiplicaciones:

   a. $\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}$ b. $\frac{3}{5} \times 4$

2. Comprueba la propiedad asociativa en las siguientes multiplicaciones:

   a. $\frac{2}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$ b. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{5}$ c. $\frac{5}{7} \times \frac{6}{5} \times \frac{1}{3}$

Desafíate

Realiza la siguiente multiplicación:

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{5}$$

3.7 Aplicaciones de las propiedades conmutativa y asociativa

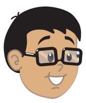
Analiza

Utiliza las propiedades conmutativa y asociativa para simplificar y calcular el resultado de cada multiplicación:

a. $\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{8}{15}$

b. $\frac{4}{11}\times\frac{7}{15}\times\frac{9}{8}$

Soluciona



Carlos

a. Utilizo la propiedad conmutativa para cambiar el orden de las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{8}{15}$:

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}\times\frac{1}{5}$$

Utilizo la propiedad asociativa para calcular el resultado de $\frac{3}{4}\times\frac{8}{15}$ (simplifico antes):

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{8}{15}=\left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}\right)\times\frac{1}{5}$$

$$=\left(\frac{1}{1}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{2}{25}$$

El MCD de 3 y 15 es 3; mientras que el de 4 y 8 es 4.

b. Simplifico $\frac{7}{15}$ y $\frac{9}{8}$ (el MCD de 15 y 9 es 3):

$$\frac{4}{11}\times\frac{7}{\underset{5}{\cancel{15}}}\times\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{8}=\frac{4}{11}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{8}$$

Ahora, puedo simplificar $\frac{4}{11}$ y $\frac{3}{8}$. Si aplico la propiedad conmutativa y asociativa entonces obtendré el mismo resultado que si hago lo siguiente:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{11}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{1}{11}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}$$

¡Puedo simplificar cualquier pareja de numerador y denominador! Ahora, calculo el producto:

$$\frac{1}{11}\times\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{1\times7\times3}{11\times5\times2}$$

$$=\frac{21}{110}$$

Comprende

Las propiedades conmutativa y asociativa se utilizan en las multiplicaciones de tres o más fracciones. El cálculo puede realizarse de las siguientes formas:

- Cambiar el orden de las fracciones y asociar de manera conveniente para evitar realizar cálculos muy grandes y simplificar antes de multiplicar.
- Simplificar las parejas de números (numerador con denominador) para reducir las fracciones a su mínima expresión. Luego, efectuar el producto de los numeradores y el de los denominadores.

Resuelve

Aplica las propiedades conmutativa y asociativa para calcular el resultado de:

a. $\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}\times\frac{8}{21}$

b. $\frac{10}{27}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{5}$

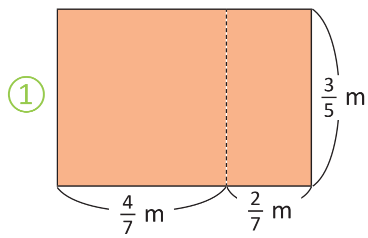
c. $\frac{4}{15}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}$

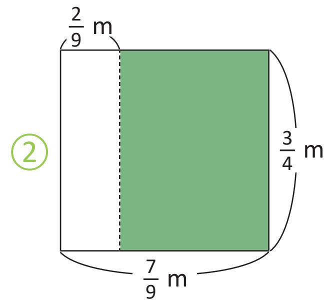
d. $8\times\frac{1}{10}\times\frac{7}{6}$

3.8 Propiedad distributiva

Analiza

Encuentra el área sombreada de los siguientes rectángulos de dos formas diferentes:





Soluciona


Mario

En el rectángulo ①, observo que el largo mide $\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\right)$ m y el ancho $\frac{3}{5}$ m. Entonces, su área es:

$$\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{35}$$

R: $\frac{18}{35}$ m²

También puedo encontrar el área de cada rectángulo por separado, y luego sumarlas. Las áreas son:

$$\left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}\right) \text{m}^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{7} \times \frac{3}{5}\right) \text{m}^2$$

Sumo ambas:

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{35} + \frac{6}{35} = \frac{18}{35}$$

R: $\frac{18}{35}$ m² ¡El resultado es el mismo!


Julia

En el rectángulo ②, observo que el largo mide $\left(\frac{7}{9} - \frac{2}{9}\right)$ m y el ancho $\frac{3}{4}$ m. Entonces, su área es:

$$\left(\frac{7}{9} - \frac{2}{9}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{5}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

R: $\frac{5}{12}$ m²

También puedo encontrar el área, calculando el área total y restándole la del rectángulo blanco. Las áreas son:

$$\left(\frac{7}{9} \times \frac{3}{4}\right) \text{m}^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{9} \times \frac{3}{4}\right) \text{m}^2$$

Realizo la resta:

$$\frac{7}{9} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{12} - \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

R: $\frac{5}{12}$ m² ¡Obtuve el mismo resultado!

Comprende

Propiedad distributiva: Si ▲, ■ y ● representan fracciones se tienen las siguientes igualdades:

- Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma:

$$(■ + ●) \times ▲ = ■ \times ▲ + ● \times ▲$$

$$▲ \times (■ + ●) = ▲ \times ■ + ▲ \times ●$$

- Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la resta:

$$(■ - ●) \times ▲ = ■ \times ▲ - ● \times ▲$$

$$▲ \times (■ - ●) = ▲ \times ■ - ▲ \times ●$$

Resuelve

Encuentra las parejas de cálculos que sean iguales:

a. $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) \times \frac{4}{5}$ b. $\frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)$ c. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$ d. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$

e. $\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) \times \frac{1}{2}$ f. $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)$ g. $\frac{3}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2}$ h. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$

3.9 Relación entre el multiplicador y el producto

Analiza

Un alambre de 1 m de longitud pesa 12 g. Encuentra cuál de los siguientes alambres pesa más de 12 g, exactamente 12 g, y menos de 12 g:

a. $1\frac{1}{4}$ m

PO: $12 \times 1\frac{1}{4}$

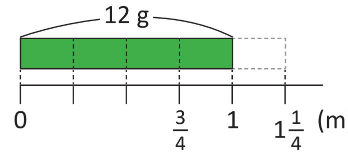
b. 1 m

PO: 12×1

c. $\frac{3}{4}$ m

PO: $12 \times \frac{3}{4}$

Piensa con un gráfico:



Observa que:
Peso de alambre de 1 m × nueva longitud = peso de alambre con nueva longitud.

Soluciona


Ana

a. $12 \times 1\frac{1}{4} = \cancel{12}^{\,3} \times \frac{5}{\cancel{4}_{\,1}}$

$= 3 \times 5$

$= 15$

R: 15 g

b. $12 \times 1 = 12$

R: 12 g

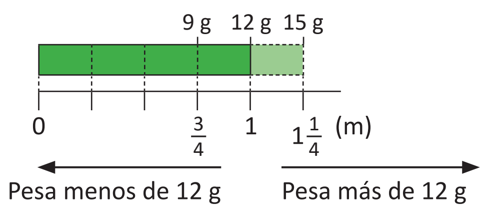
c. $\cancel{12}^{\,3} \times \frac{3}{\cancel{4}_{\,1}} = 3 \times 3$

$= 9$

R: 9 g

Observa que, en $12 \times 1\frac{1}{4}$, el multiplicador es mayor a 1 y el resultado es **mayor** a 12 (multiplicando); mientras que en $12 \times \frac{3}{4}$, el multiplicador es menor a 1 y el resultado es **menor** a 12 (multiplicando).

Observo lo siguiente: el alambre de $1\frac{1}{4}$ m pesa más que 12 g, y el de $\frac{3}{4}$ m pesa menos que 12 g. Sin necesidad de hacer la multiplicación, puedo verificar lo anterior con la gráfica:



multiplicador < 1 → resultado < multiplicando
multiplicador > 1 → resultado > multiplicando

Comprende

En una multiplicación:

- Cuando el multiplicador es menor que 1, el resultado es menor que el multiplicando. Por ejemplo: $60 \times \frac{2}{3} = 40$ y $40 < 60$
- Cuando el multiplicador es igual a 1, el resultado es igual al multiplicando. Por ejemplo: $60 \times 1 = 60$
- Cuando el multiplicador es mayor que 1, el resultado es mayor que el multiplicando. Por ejemplo: $60 \times 1\frac{1}{3} = 80$ y $80 > 60$

Resuelve

1. Estima cuáles de los siguientes productos son menores que 60, iguales que 60 y mayores que 60:

a. $60 \times \frac{1}{3}$ b. $60 \times \frac{5}{3}$ c. 60×1 d. $60 \times \frac{2}{5}$ e. $60 \times 2\frac{1}{2}$ f. $60 \times \frac{4}{4}$

2. Estima cuáles de los siguientes productos son menores a $\frac{4}{5}$, iguales a $\frac{4}{5}$ y mayores a $\frac{4}{5}$:

a. $\frac{4}{5} \times \frac{10}{7}$ b. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ c. $\frac{4}{5} \times 1\frac{1}{3}$ d. $\frac{4}{5} \times 1$ e. $\frac{4}{5} \times 2$ f. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{10}$

3.10 Números recíprocos

Analiza

Si se seleccionan dos de los siguientes números y se multiplican, ¿cuáles parejas dan como producto 1?

$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{3}$ 7 $\frac{5}{2}$

Soluciona


José

Multiplico $\frac{2}{5}$ con $\frac{5}{2}$, y $\frac{1}{7}$ con 7 (puedo simplificar):

$$\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{5}_{1}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = 1 \times 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\cancel{7}_{1}} \times \cancel{7}^{1} = 1 \times 1 = 1$$

R: $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$; también $\frac{1}{7}$ y 7.

Comprende

Cuando el producto de dos números es **1**, a estos números se les llama **recíprocos**. Se dice de cada uno que es el número recíproco del otro. Por ejemplo:

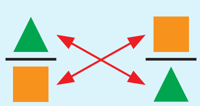
$\frac{2}{5}$ es el número recíproco de $\frac{5}{2}$; y $\frac{5}{2}$ es el número recíproco de $\frac{2}{5}$.

$\frac{1}{7}$ es el número recíproco de 7; y 7 es el número recíproco de $\frac{1}{7}$.

Observa que, los recíprocos de algunas fracciones son números naturales. Por eso, no hablamos de "fracciones recíprocas" sino, de manera más general, de "números recíprocos".

A los **números recíprocos** también se les llama **números inversos.**

Dado un número, su recíproco se encuentra intercambiando numerador con denominador. Si es un número natural, recuerda escribirlo con denominador 1:



Número dado   Número recíproco

Se puede comprobar que dos números son recíprocos, si al multiplicarlos el resultado es 1.

Ejemplo:

a. $\frac{2}{3}$ ⟶ $\frac{3}{2}$

Número dado   Número recíproco

$\frac{3}{2}$ ⟶ $\frac{2}{3}$

Número dado   Número recíproco

b. $\frac{3}{1}$ ⟶ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ ⟶ $\frac{3}{1}$

Comprobación: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$

Resuelve

Encuentra el número recíproco de los siguientes números:

a. $\frac{5}{3}$ b. $\frac{2}{7}$ c. $\frac{5}{7}$

d. 6   e. 2   f. 7

g. $\frac{1}{5}$ h. $\frac{1}{3}$ i. $\frac{1}{4}$

En d, e y f, recuerda colocarles denominador 1 para hallar su número recíproco; y en g, h e i, observa que los números recíprocos de estas fracciones son números naturales.

3.11 Practica lo aprendido

1. Efectúa:

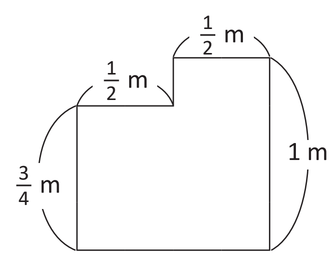
a. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ b. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$ c. $\frac{8}{9} \times \frac{6}{7}$ d. $2\frac{1}{3} \times 1\frac{4}{5}$

e. $2\frac{3}{5} \times \frac{25}{26}$ f. $\left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{5}{6}\right)$ g. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{6}$ h. $\left(\frac{1}{7} \times \frac{6}{11}\right) + \left(\frac{1}{7} \times \frac{8}{11}\right)$

2. Una receta para panecitos de chocolate y vainilla requiere $\frac{3}{4}$ taza de vainilla. Si preparamos $\frac{7}{6}$ de la receta, ¿cuánta vainilla necesitamos?

3. Juan avanza en su bicicleta $\frac{2}{5}$ km por minuto. Si le toma $3\frac{1}{2}$ minutos llegar desde su casa a la casa de su amigo, ¿a qué distancia se encuentran sus casas?

4. Encuentra el área de la siguiente figura:



5. Estima cuál de los siguientes productos es mayor, igual o menor que $\frac{6}{7}$:

a. $\frac{6}{7} \times 1$ b. $\frac{6}{7} \times \frac{4}{3}$ c. $\frac{6}{7} \times \frac{1}{3}$

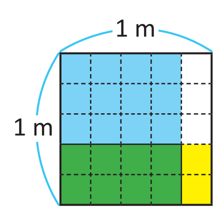
6. Encuentra el número recíproco de los siguientes números y compruébalo:

a. $\frac{4}{7}$ b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{9}{5}$ d. $2\frac{3}{5}$

Desafíate

1. El cabello de Cristina tiene un largo de 60 cm, ella cortó $\frac{2}{3}$ del largo de su cabello y donó $\frac{3}{4}$ de lo que cortó a un taller de pelucas para niñas con cáncer. ¿Cuántos centímetros de su cabello donó Cristina?

2. El cuadrado de abajo tiene área 1 m². Encuentra las fracciones que deben multiplicarse para obtener la áreas sombreadas, y su respectivo resultado en metros cuadrados:



Unidad 2

Cantidades variables y números romanos

En esta unidad aprenderás a

- Distinguir la relación entre dos cantidades presentadas en una tabla
- Escribir en un PO la relación de dos cantidades que varían, con operaciones de suma, resta y multiplicación
- Expresar cantidades que varían mediante las letras x y y
- Encontrar equivalencias entre números en el sistema decimal y números romanos y viceversa

1.1 Relación de suma de un valor constante

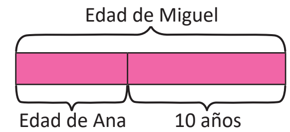
Analiza

Miguel es 10 años mayor que Ana.

a. Encuentra la edad de Miguel, si Ana tuviese las siguientes edades:

Edad de Ana (años)	1	2	3	4	5
Edad de Miguel (años)					

Puedes apoyarte en la gráfica de cintas para calcular la edad de Miguel:



b. Si la edad de Ana se representa con ▲, ¿cómo se representa la edad de Miguel?

Soluciona

a. Para encontrar la edad de Miguel, debo sumar 10 a la edad de Ana en cada caso. Por ejemplo, si Ana tiene 1 año, entonces Miguel tiene 1 + 10 = 11 años:

Edad de Ana (años)	1	2	3	4	5
	+ 10	+ 10	+ 10	+ 10	+ 10
Edad de Miguel (años)	11	12	13	14	15

b. La edad de Miguel la encuentro sumando 10 a la edad de Ana:

edad de Ana + 10

Entonces la edad de Miguel la represento como ▲ + 10.

R: ▲ + 10

Comprende

Se dice que dos cantidades están relacionadas si, conociendo una de ellas, es posible encontrar la otra. Dos cantidades pueden estar relacionadas mediante la suma de un valor constante, y para representar la relación pueden utilizarse figuras como ▲ o ■.

Resuelve

1. En un torneo de baloncesto, el equipo B marcó 8 puntos más que el equipo A.
   a. Encuentra el total de puntos que marcó el equipo B, si el equipo A hubiese marcado los siguientes puntos:

Equipo A (puntos)	10	11	12	13	14
Equipo B (puntos)					

   b. Si el total de puntos marcados por el equipo A se representa con ▲, ¿cómo se representan el total de puntos marcados por el equipo B?

2. Carmen elaboró 7 flores artesanales antes de iniciar vacaciones, y piensa elaborar una flor por día mientras esté de vacaciones.
   a. ¿Cuál es la cantidad total de flores que tendrá en el día 1?, ¿y en el día 2?, ¿y en el día 3?
   b. En el día ■ de vacación, ¿cuántas flores tendrá Carmen?

1.2 Relación de resta de un valor constante

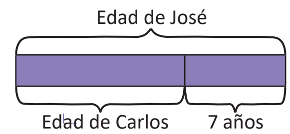
Analiza

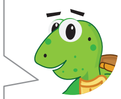
Carlos es 7 años menor que José.

a. Encuentra la edad de Carlos, si José tuviese las siguientes edades:

Edad de José (años)	10	11	12	13	14
Edad de Carlos (años)					

Apóyate en la gráfica de cintas:



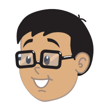


b. Si la edad de José se representa con ▲, ¿cómo se representa la edad de Carlos?

Soluciona

a. Para encontrar la edad de Carlos debo restar 7 a la edad de José. Así, si José tiene 10 años entonces Carlos tiene 10 – 7 = 3 años:

Edad de José (años)	10	11	12	13	14
Edad de Carlos (años)	3	4	5	6	7



Carlos

b. La edad de Carlos la encuentro restando 7 a la edad de José:

edad de José – 7

Entonces la edad de Carlos la puedo representar como ▲ – 7.

R: ▲ – 7

Comprende

Dos cantidades pueden estar relacionadas mediante la resta de un valor constante.

Como en el caso de las edades, el valor constante que se resta es 7; al restar a la edad de José los 7 años, el resultado es la edad de Carlos.

La relación anterior también se puede escribir así:
edad de Carlos + 7 = edad de José

Resuelve

1. La madre de Julia es 5 años menor que su padre.
   a. Encuentra la edad de la madre de Julia, si su padre tuviese las siguientes edades:

Edad del padre (años)	37	38	39	40	41
Edad de la madre (años)					

   b. Si la edad del padre se representa con ▲, ¿cómo se representa la edad de la madre?

2. En un almacén, los zapatos deportivos cuestan $9 menos que los zapatos de vestir.
   a. Si los zapatos de vestir cuestan $35, ¿cuánto cuestan los deportivos? ¿Y si los de vestir cuestan $40?
   b. Si los zapatos de vestir cuestan ■ dólares, ¿cuánto cuestan los deportivos?

1.3 Otras relaciones con dos cantidades

Analiza

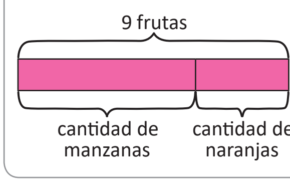
Marta comprará naranjas y manzanas. En total, solamente llevará 9 frutas.

a. Encuentra la cantidad de naranjas, si Marta hubiese comprado las siguientes cantidades de manzanas:

Cantidad de manzanas	3	4	5	6
Cantidad de naranjas				

b. Si la cantidad de manzanas se representa con ▲, ¿cómo se representa la cantidad de naranjas?

En este caso, la gráfica de cintas es la siguiente:



Soluciona

a. Como Marta solo llevará 9 frutas, debo restar del total la cantidad de manzanas. Por ejemplo, si la cantidad de manzanas es 3, entonces la cantidad de naranjas es 9 – 3 = 6:

Cantidad de manzanas	9 − 3	9 − 4	9 − 5	9 − 6
Cantidad de naranjas	6	5	4	3


Carmen

b. La cantidad de naranjas la encuentro restando de 9 la cantidad de manzanas:

9 – cantidad de manzanas

Entonces, la cantidad de naranjas la represento como 9 – ▲.

R: 9 – ▲

Comprende

En la relación de dos cantidades que involucra una resta, el valor constante puede ser el minuendo y el valor que cambia el sustraendo.

Como en el caso de las manzanas y naranjas, el valor constante (minuendo) es 9; al restarle la cantidad de manzanas se obtiene la cantidad de naranjas.

Resuelve

1. Antonio cumple años el 30 de abril, y empieza a contar los días que faltan para esa fecha.
   a. Encuentra la cantidad de días que faltan para la fecha de cumpleaños, si estuviésemos en las siguientes fechas:

Fecha de abril	11	12	13	14
Cantidad de días faltantes				

   b. Si la fecha de abril se representa por ▲, ¿cómo se representa la cantidad de días faltantes?

2. La abuela de Julia cocinó 20 tamales para una cena familiar.
   a. Si los invitados solo se comieron 11 tamales, ¿cuántos sobraron? ¿Y si comieron 15?
   b. Si la cantidad de tamales que comieron los invitados es ■, ¿cuántos tamales sobraron?

1.4 Relación de multiplicación

Analiza

En una llantería, un mecánico hace revisión de todas las llantas de los autos que lo visitan.

a. Encuentra la cantidad de llantas que revisa, si recibe las siguientes cantidades de autos:

Cantidad de autos	1	2	3	4	5
Cantidad de llantas					

b. Si la cantidad de autos se representa con ▲, ¿cómo se representa la cantidad de llantas?

Soluciona

a. Para encontrar la cantidad de llantas que revisa, multiplico 4 por la cantidad de autos que recibe. Por ejemplo, si recibe 1 auto, la cantidad de llantas que revisa es 4 × 1 = 4:


Antonio

Cantidad de autos	4 × 1	4 × 2	4 × 3	4 × 4	4 × 5
Cantidad de llantas	4	8	12	16	20

b. La cantidad de llantas la encuentro al multiplicar 4 por la cantidad de autos:

4 × cantidad de autos

Entonces, la cantidad de llantas la puedo representar como 4 × ▲.

R: 4 × ▲

Comprende

Dos cantidades pueden estar relacionadas mediante una multiplicación, cuyo multiplicando (o multiplicador) es un valor constante.

Como en el caso del mecánico, el valor constante (multiplicando) es 4; al multiplicarlo por la cantidad de autos se obtiene la cantidad de llantas que revisa.

Resuelve

1. Una caja contiene 7 borradores para lápiz.

   a. Encuentra la cantidad total de borradores a partir de la cantidad de cajas, en los siguientes casos:

Cantidad de cajas	1	2	3	4	5
Cantidad de borradores (total)					

   b. Si la cantidad de cajas se representa por ▲, ¿cómo se representa la cantidad total de borradores?

2. En una receta, un panadero utiliza 300 g de harina para hacer un pastel. Si la cantidad total de pasteles elaborados se representa con ■, ¿cómo se representa la cantidad total de harina utilizada?

★ Desafíate

En una panadería hay una promoción de pagar una dona y llevar dos. Si la cantidad de donas canceladas es ▲, ¿cuál es la cantidad de donas obtenidas?

1.5 Expresión de cantidades utilizando la variable x

Analiza

De un carrete de listón de 6 cm de ancho se cortan listoncitos de diferentes largos.

a. Escribe el **PO** que representa las áreas de diferentes listoncitos, de largo ▲ cm y ancho 6 cm.
b. Si en lugar de ▲ se escribe x, ¿cómo queda representada el área de un listoncito de largo x cm y ancho 6 cm?

Coloca los valores de cada dato siempre en el mismo orden y piensa en cada listón como un rectángulo, cuya área se calcula:
largo × ancho

Soluciona

a. Escribo el **PO** que representa el área para ciertas medidas del largo:

Ana

Si el largo fuera 5 cm ⟶ **PO**: △5 × 6

Si el largo fuera 6 cm ⟶ **PO**: △6 × 6

Si el largo fuera 7 cm ⟶ **PO**: △7 × 6

Si el largo fuera 8 cm ⟶ **PO**: △8 × 6

Observo que el área de cada listoncito es igual a multiplicar el largo ▲ cm por el ancho 6 cm.
Entonces:

PO: ▲ × 6

b. Sustituyo el ▲ por la letra x, y el área de un listoncito de largo x cm y ancho 6 cm se escribe $x \times 6$.

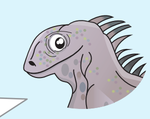
R: $x \times 6$

Recuerda que:
$x \times 6 = 6 \times x$

Comprende

Para expresar cantidades que varían pueden utilizarse letras como la x en lugar de figuras. A estas letras se les llama **cantidades variables** o simplemente **variables**.

Debes diferenciar entre la "x" que representa una variable y la letra "x" que utilizamos en la escritura normal. Ten cuidado también cuando escribes el símbolo de multiplicación "×".



Resuelve

1. Marta comprará naranjas y sabe que por cada dólar le darán cinco naranjas. Escribe el **PO** que representa el número de naranjas obtenidas si gasta x dólares.

2. Una resma de papel bond contiene 500 hojas de papel. Escribe el **PO** que representa la cantidad total de hojas de papel bond en x resmas.

3. Una persona ahorra $10 al mes.
   a. Escribe el **PO** que representa la cantidad ahorrada en x meses.
   b. Si han transcurrido 16 meses, ¿cuánto dinero tiene ahorrado?

1.6 Expresión de suma y resta de variables

Analiza

En un salón de sexto grado hay más niñas que niños. La cantidad de niñas se representa con x, mientras que la de niños se representa con y.

a. Escribe el **PO** que representa la cantidad total de estudiantes en el salón.

b. Escribe el **PO** que representa cuántas niñas hay **más que** niños.

Soluciona


José

a. Para encontrar la cantidad total de estudiantes en el salón debo sumar la cantidad de niñas y de niños.
Si la cantidad de niñas se representa con x y la de niños con y, entonces el **PO** que representa la cantidad total es:

PO: $x + y$

b. Para encontrar cuántas niñas hay más que niños debo restar, de la cantidad de niñas, la cantidad de niños. Entonces:

PO: $x - y$

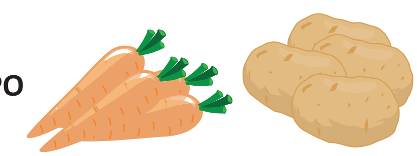
Comprende

Es común utilizar las letras x y y para representar cantidades variables relacionadas con sumas o restas.

Recuerda que, la letras “x” y “y” que se utilizan como variables son diferentes a las letras “x” y “y” que utilizamos en la escritura normal.

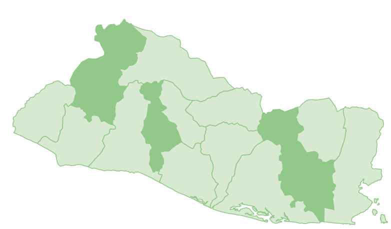
Resuelve

1. José compra x papas y y zanahorias.
   a. Escribe el **PO** que representa la cantidad total de verduras.
   b. Si la cantidad de papas es mayor que la de zanahorias, escribe el **PO** que representa cuántas papas hay **más que** zanahorias.



2. Marta tiene x dólares para comprar queso y y dólares para comprar arroz.
   a. Escribe el **PO** que representa la cantidad total de dinero que tiene Marta.
   b. Si el dinero para comprar queso es mayor que el dinero para comprar arroz, escribe el **PO** que representa cuántos dólares tiene más para comprar queso que para comprar arroz.

3. La distancia desde San Salvador a Santa Ana (x km) es menor que desde San Salvador a San Miguel (y km). Escribe el **PO** que representa cuántos kilómetros hay más de San Salvador a San Miguel que de San Salvador a Santa Ana.



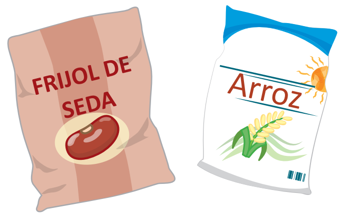
Desafíate

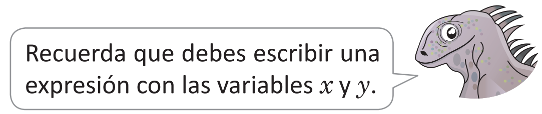
Miguel es 5 años mayor que Julia. Si la edad de Julia se representa por x y la de Miguel por y, ¿cómo se escribe la relación entre las dos cantidades?

1.7 Expresiones con suma, resta y multiplicación

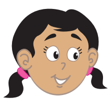
Analiza

En un mercado, el precio de una libra arroz es x dólares, y el de una libra de frijoles es y dólares. Si un cliente compra dos libras de arroz y tres de frijoles, ¿cuánto gastará en total?





Soluciona


Beatriz

Lo que gasta en dos libras de arroz es:

$$2 \times x$$

Mientras que lo que gasta en tres libras de frijoles es:

$$3 \times y$$

Entonces, para encontrar el total, sumo lo que gasta en dos libras de arroz más lo que gasta en tres libras de frijoles:

$$2 \times x + 3 \times y$$

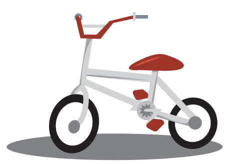
R: $2 \times x + 3 \times y$ dólares

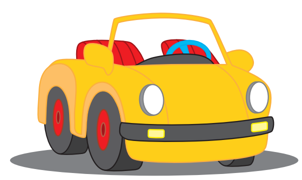
Comprende

En general, las cantidades variables pueden estar relacionadas con operaciones de suma, resta o multiplicación. Además, para representar variables se utilizan letras.

Resuelve

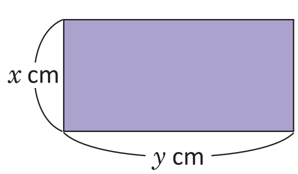
1. En una juguetería hay x cantidad de carros y y cantidad de bicicletas. Si los carros tienen 4 llantas y las bicicletas 2, ¿cuántas llantas hay en total?





2. Beatriz tiene x dólares para comprar crema. Si la botella de crema cuesta y dólares y Beatriz compra 3, ¿cuánto dinero le sobrará?

3. Un rectángulo mide x cm de ancho y y cm de largo. ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo?

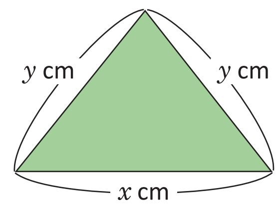


1.8 Valor numérico de una expresión

Analiza

1. El precio de una mochila es x dólares, y Ana tiene \$30 para comprar.
   a. Si lleva dos mochilas, ¿cuánto dinero gastará y cuánto le sobrará?
   b. ¿Qué significado tiene, en el contexto del problema, si sustituyes x por 15? ¿Le sobrará dinero a Ana?

2. La base de un triángulo isósceles mide x cm, y sus lados iguales miden y cm cada uno.
   a. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?
   b. ¿Qué significado tiene, en el contexto del problema, si sustituyes x por 10 y y por 8? ¿Cuál sería el perímetro del triángulo?



Soluciona


Mario

1. a. El precio por dos mochilas es $x \times 2$ dólares. Así, gastará $x \times 2$ dólares y le sobrarán $30 - x \times 2$ dólares.

   b. Si sustituyo x por 15, significa que una mochila cuesta \$15.

   Para encontrar el dinero que le sobra, escribo 15 en lugar de x en la expresión $30 - x \times 2$:

   $$30 - 15 \times 2 = 30 - 30 = 0$$

   R: no le sobrará dinero.

2. a. El perímetro se calcula sumando las longitudes de los tres lados (dos de ellos miden y): $x + y \times 2$.

   b. Si sustituyo x por 10, significa que la base mide 10 cm, y si sustituyo y por 8 significa que los lados iguales miden 8 cm cada uno. El perímetro del triángulo se calcula:

   $$10 + 8 \times 2 = 10 + 16 = 26$$

   R: el perímetro es 26 cm.

Comprende

Al sustituir un número en una variable, el resultado obtenido después de realizar las operaciones indicadas se llama **valor numérico de la expresión**.

Resuelve

1. Una casa tiene x ventanas, y se han construido 5 casas con el mismo diseño.
   a. ¿Cuántas ventanas hay en total?
   b. En el contexto del problema, ¿qué significa $x = 5$? ¿cuántas ventanas habrán?

2. José ahorró x dólares, y decide comprar 3 camisas que cuestan y dólares.
   a. ¿Cuánto dinero le sobrará?
   b. En el contexto del problema, ¿qué significa $x = 50$ y $y = 5$?, ¿le sobrará dinero?

1.9 Igualdades y variables

Analiza

a. Don Antonio cosechó 12 m² más de maíz que de frijol. Representa la relación de la cantidad de metros cuadrados cosechados de frijol (x) y los de maíz (y).

b. En una fábrica de ensamblaje de triciclos desean saber cuántas llantas deben solicitar para armarlos. Representa la relación entre la cantidad de triciclos (x) y las llantas necesarias (y).

Soluciona

a. Escribo algunos ejemplos:

Ana

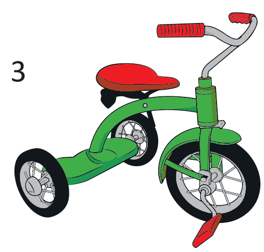
Si cosechó 1 m^2 de frijol, entonces de maíz cosechó 1 + 12 = 13 m^2.
Si cosechó 2 m^2 de frijol, entonces de maíz cosechó 2 + 12 = 14 m^2.
Si cosechó 3 m^2 de frijol, entonces de maíz cosechó 3 + 12 = 15 m^2.

Para encontrar la cantidad de metros cuadrados cosechados de maíz, sumo 12 a la cantidad de metros cuadrados de frijol:

$$\begin{array}{c}\text{cantidad de m}^2\\ \text{de frijol } (x)\end{array} + 12 = \begin{array}{c}\text{cantidad de m}^2\\ \text{de maíz } (y)\end{array}$$

R: $x + 12 = y$

b. Los triciclos tienen 3 llantas. Para encontrar la cantidad de llantas (y) multiplico 3 por la cantidad de triciclos (x):



$$3 \times \begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{triciclos } (x)\end{array} = \begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{llantas} (y)\end{array}$$

R: $3 \times x = y$

Comprende

Cuando dos expresiones con variables representan el mismo valor, se utiliza el símbolo "=" para conectarlas.

Por ejemplo:
$x + 12 = y$, se lee "equis más doce es igual a ye".
$3 \times x = y$, se lee "tres por equis es igual a ye".

¿Qué pasaría?

Antonio tiene 14 trompos; de ellos, x son de color rojo y y son de color verde. La relación entre ambas cantidades se puede escribir de las siguientes formas:

$$x + y = 14$$
$$14 - x = y$$
$$14 - y = x$$

Resuelve

1. Beatriz y Carlos coleccionan monedas de diferentes países. Si Beatriz tiene 8 monedas **más que** Carlos, representa la relación de la cantidad de monedas de Carlos (x) y la cantidad de monedas de Beatriz (y).

2. En una reserva forestal hay 15 torogoces menos que lechuzas. Representa la relación entre la cantidad de lechuzas (x) y la cantidad de torogoces (y).

3. Una caja con plumones para pizarra contiene 12 unidades.
   a. Representa la relación entre la cantidad de cajas (x) y la cantidad de plumones (y).
   b. Si en una escuela se entregan 8 cajas, ¿cuántos plumones tendrán en total?

1.10 Practica lo aprendido

1. El reloj de Julia está 15 minutos adelantado con respecto al reloj de José.
   a. Encuentra los minutos que marca el reloj de Julia, si el de José marca los siguientes:

Minutos del reloj de José	15	16	17	18
Minutos del reloj de Julia				

   b. Si los minutos del reloj de José se representan por ▲, ¿cómo se representan los del reloj de Julia?

2. Un albañil debe colocar 8 ladrillos rojos **menos que** ladrillos grises.
   a. Encuentra la cantidad de ladrillos rojos, si el albañil coloca las siguientes cantidades de ladrillos grises:

Cantidad de ladrillos grises	20	21	22	23
Cantidad de ladrillos rojos				

   b. Si la cantidad de ladrillos grises se representan por ■, ¿cómo se representa la cantidad de ladrillos rojos?

3. El abuelo de Marta tiene vacas a las que ordeña para vender su leche; cada vaca produce 5 litros.
   a. Encuentra la cantidad total de litros que obtiene, si tuviese las siguientes cantidades de vacas:

Cantidad de vacas	4	5	6	7
Total de litros obtenidos				

   b. Si ■ representa la cantidad de vacas, ¿cómo se representa la cantidad total de litros obtenidos?

4. Miguel compra en la tienda 3 aguacates por un dólar. Escribe el **PO** que representa la cantidad de aguacates obtenidos con x dólares.

5. En la sección A de sexto grado hay x estudiantes; mientras que en la sección B hay y estudiantes.
   a. Escribe el **PO** que representa la cantidad total de estudiantes de sexto grado.
   b. Si en la sección A hay más estudiantes, escribe el **PO** que representa cuántos estudiantes más hay en la sección A que en la B.

6. El precio de una yarda de tela es x dólares. Si Mario compra 5 yardas y tiene para gastar y dólares, ¿cuánto dinero le sobrará?

7. Antonio tardó x minutos en llegar a la escuela, mientras que Carmen tardó y minutos. Si Carmen tardó el doble de tiempo que tardó Antonio, ¿cómo se representa la relación entre ambas cantidades?

Desafíate

En una lotificación, informan que para adquirir un lote de $20,000 (incluye intereses), deberá pagarse cada mes una cuota de $250.

a. Escribe la relación entre la cantidad de dinero pagado en x meses y la cantidad y de dinero que falta por pagar.
b. ¿Cuántos meses deberán pagarse para completar el precio del lote?

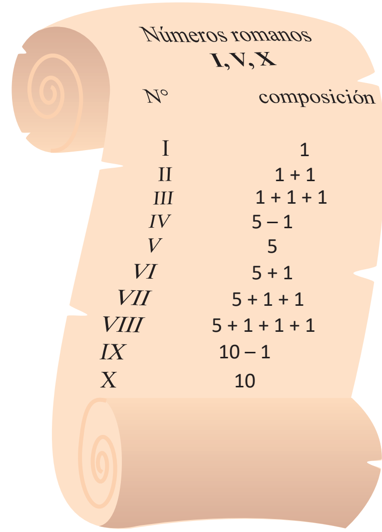
2.1 Números romanos

Analiza

En el Imperio Romano se utilizó un sistema numérico conformado por letras mayúsculas, entre ellas las siguientes:

Letra	I	V	X
Número natural	1	5	10

Observa el pergamino, en el que se muestran los primeros 10 números del sistema romano, junto con su equivalente número natural. ¿A qué número equivale el número XXI?



Soluciona

Cada letra representa un número natural, entonces, debo sumar todas las cantidades que representan las letras del número romano XXI.


Carmen

X equivale a 10 y I equivale a 1:

$$\text{XXI} \longrightarrow 10 + 10 + 1 = 21$$

R: 21

Comprende

El sistema de numeración romano consta de siete letras mayúsculas:

Letra	I	V	X	L	C	D	M
Número natural	1	5	10	50	100	500	1 000

Suelen llamarse simplemente **números romanos**. Para encontrar el número natural equivalente a un número romano, pueden sumarse las cantidades que equivalen a cada símbolo.

¿Sabías que...?

Actualmente, los números romanos se utilizan, en la mayoría de los casos, con valor ordinal para:

- Indicar dinastías en ciertas culturas.
- En las series de papas, emperadores y reyes de igual nombre.
- En la numeración de volúmenes, tomos, capítulos o cualquier otra división de una obra.
- En la denominación de congresos, campeonatos, festivales, etc.
- Para indicar siglos (aquí se utiliza el valor cardinal).

Fuente: *https://goo.gl/2CajdH*

Resuelve

1. En cada caso, escribe el número natural equivalente al número romano:
   a. VI b. XIII c. XVII d. XX

2. ¿Cuáles de los siguientes símbolos no representan números romanos? Explica el porqué.
   a. III b. XA c. XXY d. MCV

2.2 Significado de la posición en los números romanos

Analiza

Observa los siguientes números romanos y su equivalente número natural:

①

VI	→ 5 + 1 = 6
IV	→ 5 – 1 = 6

②

XI	→ 10 + 1 = 11
IX	→ 10 – 1 = 9

¿Qué sucede cuando se cambia el orden de los símbolos?

Soluciona

En ①, las letras utilizadas son I (equivale a 1) y V (equivale a 5); V es mayor que I:

- Al colocar I a la derecha de V (VI), el número natural equivalente se obtiene sumando 5 y 1.
- Al colocar I a la izquierda de V (IV), el número natural equivalente se obtiene restando 1 de 5.

En ②, las letras utilizadas son I (equivale a 1) y X (equivale a 10); X es mayor que I:

- Para XI, el número natural equivalente se obtiene sumando 10 y 1.
- Para IX, el número natural equivalente se obtiene restando 1 de 10.

Comprende

En la numeración romana:

- Un número menor colocado a la derecha de otro mayor indica suma.
- Un número menor colocado a la izquierda de uno mayor indica resta.

El símbolo I únicamente puede anteceder a V y X.
El símbolo X únicamente puede anteceder a L y C.
El símbolo C únicamente puede anteceder a D y de M.

¿Qué pasaría?

Los siguientes números XV y VX se forman por la composición:

XV → 10 + 5 = 15
VX → 10 – 5 = 5

La segunda representación no es correcta (VX), pues ya existe un símbolo para representar el número 5.

Resuelve

1. Escribe los siguientes números romanos en su equivalente número natural:
   a. XXI　　b. XL　　c. XIV

2. Explica si las siguientes representaciones son correctas:
   a. VV　　b. LC　　c. DM

2.3 Números naturales y números romanos

Analiza

Escribe el número romano equivalente a:

a. 23 b. 19

Soluciona

a. Los números romanos solo tienen símbolos equivalentes para los números 1, 5, 10, 50, 100, 500 y 1, 000; el número romano equivalente a 23 debe contener los símbolos para 1 y 10.

Julia

Descompongo 23 como suma, usando las cantidades 10 y 1:

$$23 = \boxed{20} + \boxed{3}$$
$$= \boxed{10 + 10} + \boxed{1 + 1 + 1}$$

Entonces, $23 = 10 + 10 + 1 + 1 + 1 \rightarrow$ XXIII

R: XXIII

b. Observo que, $19 = 10 + 9$. El número 9 lo descompongo como resta:

$$19 = 10 + \boxed{9}$$
$$= 10 + \boxed{10 - 1}$$

Recuerda que, un número menor colocado a la izquierda de uno mayor indica resta; entonces $10 - 1$ equivale a IX.

Entonces, $19 = 10 + 10 - 1 \rightarrow$ XIX

R: XIX

Comprende

Para encontrar el número romano equivalente a un número natural, se descompone el número natural usando los números 1, 5, 10, 50, 100, 500 o 1, 000. En la descomposición, pueden aparecer tanto sumas como restas.

Resuelve

Escribe, en cada caso, el número romano equivalente al número natural:

a.


b.


c.


d.


e.


Recuerda que en la descomposición debes restar, en algunas cantidades.

2.4 Reglas de la numeración romana

Analiza

1. ¿Cuál es la forma correcta de escribir 25 en numeración romana?

a. XVVV b. XXIIIII c. XXV

2. ¿Cómo se debe escribir 39 en su numeración romana?

a. IXL b. XXXIX

Soluciona

Antonio

1. Encuentro en número natural equivalente en cada caso.

a. XVVV ⟶ 10 + 5 + 5 + 5

10 + 10 + 5

XVVV no es correcta, porque existe un símbolo para 10 en lugar de escribir 5 + 5.

b. XXIIIII ⟶ 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

10 + 10 + 5

XXIIIII no es correcta, porque existe un símbolo para 5 en lugar de escribir 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

c. XXV ⟶ 10 + 10 + 5

Esta representación resume los valores que corresponden.

R: c. XXV

2. Encuentro la representación en números romanos, descomponiendo 39:

$$39 = 30 + 9$$
$$= 10 + 10 + 10 + 10 - 1$$

Así, 39 = 10 + 10 + 10 + 10 – 1 ⟶ XXXIX

R: b. XXXIX

Comprende

En general, en la numeración romana:

- Los símbolos que se pueden repetir hasta tres veces son I, X, C y M, y los símbolos V, L y D se usan solo una vez, combinados con otros símbolos.
- Un número menor colocado a la derecha de otro mayor indica suma.
- Los números I, X o C, colocados a la izquierda de uno mayor indican resta:
  a. El símbolo I únicamente se puede restar de V y de X.
  b. El símbolo X únicamente se puede restar de L y C.
  c. El símbolo C únicamente se puede restar de D y de M.

Resuelve

Indica qué números cumplen con las reglas de los números romanos y corrige las representaciones incorrectas:

a. XXX b. XVVC c. IIIX d. LLLI

2.5 Practica lo aprendido

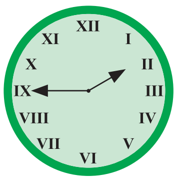
1. ¿Cuáles de las siguientes representaciones no corresponden a un número romano? Explica el porqué.

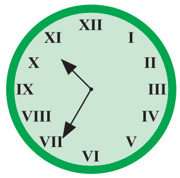
a. 

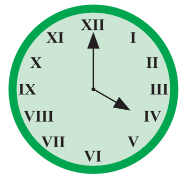
b. 

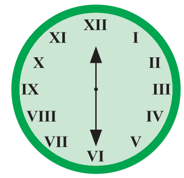
c. 

2. Expresa qué horas marcan los siguientes relojes:

a. 

b. 

c. 

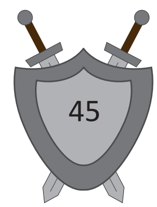
d. 

3. Escribe el número romano equivalente, en cada caso:

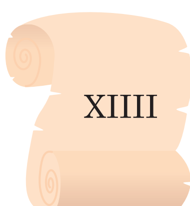
a. 

b. 

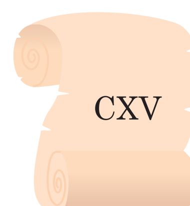
c. 

d. 

4. Indica qué números cumplen con las reglas de los números romanos, y corrige las representaciones incorrectas:

a. 

b. 

c. 

Desafíate

1. Reescribe el párrafo utilizando números naturales (u ordinales):

Marta participó en el XXVI certamen de poesía, que se realizó en el año MMXVI. Al jurado le gustó tanto su poema que decidió incluirlo en el capítulo IX del tomo II de un libro.

2. Ordena los siguientes números romanos, de menor a mayor:

a. XXIX, XXXIX, XXXVI, XLV

b. XCVII, LXXXIX, CLXX, LXVI

Unidad 3

División de fracciones y operaciones combinadas

En esta unidad aprenderás a

- Dividir números naturales entre fracciones
- Dividir fracciones entre fracciones
- Realizar operaciones combinadas con números naturales, números decimales, fracciones y números mixtos
- Desarrollar operaciones combinadas utilizando paréntesis

1.1 Practica lo aprendido

- Dos números son recíprocos si, al multiplicarlos, el resultado es 1. Para hallar el recíproco de un números, si es una fracción, se intercambia numerador y denominador; si es un número natural, se escribe con denominador 1 y se procede como una fracción.

Ejemplos:

Número	Número recíproco	Comprobación
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$
$7 = \frac{7}{1}$	$\frac{1}{7}$	$7 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times 7 = 1$

- Cualquier número dividido entre 1, da como resultado el mismo número.

$$4 \div 1 = 4;\ 0.3 \div 1 = 0.3;\ \frac{2}{3} \div 1 = \frac{2}{3};\ \text{etc.}$$

- Propiedad de la división: al multiplicar el dividendo y el divisor por un mismo número, el resultado no cambia.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & \div & 3 & = & 4 \\ \downarrow \times 5 & & \downarrow \times 5 & & \uparrow \\ 60 & \div & 15 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2,400 & \div & 300 & = & 8 \\ \downarrow \times \frac{1}{100} & & \downarrow \times \frac{1}{100} & & \uparrow \\ 24 & \div & 3 & = & 8 \end{array}$$

1. Encuentra, en cada caso, el número recíproco:

a. $\frac{5}{6}$ b. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{6}{7}$ d. $\frac{5}{7}$ e. $\frac{1}{3}$

f. $\frac{1}{4}$ g. 2 h. 5 i. $1\frac{2}{3}$ j. $\frac{9}{2}$

2. Efectúa:

a. $8 \div 1$ b. $22 \div 1$ c. $\frac{1}{3} \div 1$

d. $\frac{2}{3} \div 1$ e. $\frac{5}{4} \div 1$ f. $3\frac{4}{5} \div 1$

3. Escribe en los recuadros los datos faltantes para comprobar la propiedad de la división:

a. $\begin{array}{ccccc} 6 & \div & 3 & = & 2 \\ \downarrow \times \square & & \downarrow \times \square & & \uparrow \\ 60 & \div & 30 & = & 2 \end{array}$

b. $\begin{array}{ccccc} 45 & \div & 9 & = & 5 \\ \downarrow \times 2 & & \downarrow \times 2 & & \uparrow \\ \square & \div & \square & = & \square \end{array}$

c. $\begin{array}{ccccc} 80 & \div & 8 & = & 10 \\ \downarrow \times \frac{1}{8} & & \downarrow \times \frac{1}{8} & & \uparrow \\ \square & \div & \square & = & \square \end{array}$

d. $\begin{array}{ccccc} 63 & \div & 9 & = & 7 \\ \downarrow \times \frac{1}{9} & & \downarrow \times \frac{1}{9} & & \uparrow \\ \square & \div & \square & = & \square \end{array}$

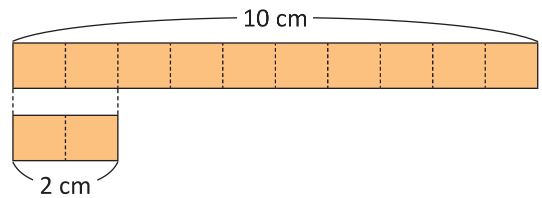
e. $\begin{array}{ccccc} 27 & \div & \square & = & \square \\ \downarrow \times \square & & \downarrow \times \square & & \uparrow \\ 81 & \div & 9 & = & \square \end{array}$

Observa que, en las divisiones c. y d., cada una de ellas se ha transformado en otra donde el divisor es 1.

1.2 División de la unidad entre una fracción unitaria

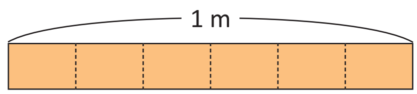
Recuerda

Si un listón de 10 cm de longitud se corta en listoncitos de 2 cm, ¿cuántos listoncitos se obtienen?, ¿qué operación realizaste para saberlo?



Analiza

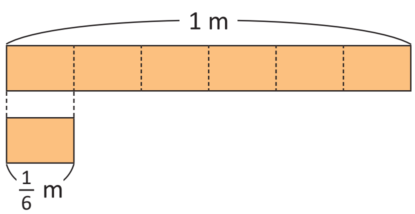
Un listón de 1 m de longitud se cortará en listoncitos de $\frac{1}{6}$ m. ¿Cuántos listoncitos se obtendrán? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.



Soluciona

PO: $1 \div \frac{1}{6}$

En la gráfica observo que el listón de 1 m se dividió en 6 partes iguales y la longitud de cada una es $\frac{1}{6}$ m:



En 1 m cabe 6 veces $\frac{1}{6}$ m.

R: 6 listoncitos.

Resuelvo utilizando la propiedad de la división y obtengo una división entre 1, multiplicando el dividendo y el divisor por 6:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \div & \frac{1}{6} & = & \boxed{6} \\ \downarrow \times 6 & & \downarrow \times 6 & & \uparrow \\ 6 & \div & 1 & = & 6 \end{array}$$

Entonces, $1 \div \frac{1}{6} = 6$

R: 6 listoncitos.

Comprende

El resultado de dividir la unidad entre una fracción unitaria es igual al denominador de la fracción.

$$1 \div \frac{1}{d} = d$$

d representa cualquier número natural.

Por ejemplo, $1 \div \frac{1}{7}$:

$$1 \div \frac{1}{7} = 7$$

Resuelve

1. Efectúa:

a. $1 \div \frac{1}{3}$ b. $1 \div \frac{1}{5}$ c. $1 \div \frac{1}{8}$

d. $1 \div \frac{1}{10}$ e. $1 \div \frac{1}{12}$ f. $1 \div \frac{1}{100}$

2. De 1 kg de frijoles se quieren hacer bolsitas de $\frac{1}{5}$ kg. ¿Cuántas bolsitas se obtendrán? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

1.3 División de la unidad entre una fracción

Recuerda

Efectúa:

a. $1 \div \frac{1}{13}$ b. $1 \div \frac{1}{20}$

Analiza

Calcula el resultado de la división:

$$1 \div \frac{2}{5}$$

¿Qué número debe multiplicarse por el dividendo y el divisor para que el nuevo divisor sea 1?

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \div & \frac{2}{5} & = & \boxed{} \\ \downarrow \times \boxed{} & & \downarrow \times \boxed{} & & \uparrow \\ \boxed{} & \div & 1 & = & \boxed{} \end{array}$$

Soluciona

Utilizo la propiedad de la división, para obtener una división entre 1, multiplicando el dividendo y el divisor por el recíproco de $\frac{2}{5}$, o sea, $\frac{5}{2}$:


José

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \div & \frac{2}{5} & = & \boxed{\frac{5}{2}} \\ \downarrow \times \frac{5}{2} & & \downarrow \times \frac{5}{2} & & \uparrow \\ \frac{5}{2} & \div & 1 & = & \frac{5}{2} \end{array}$$

Entonces, $1 \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$. ¡Dividir la unidad entre una fracción es igual al recíproco de la fracción!

Comprende

El resultado de dividir la unidad entre una fracción es igual al recíproco de la fracción.

$$1 \div \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$$

c y d representan cualquier número natural.

Por ejemplo, $1 \div \frac{3}{4}$:

$$1 \div \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$$

Resuelve

1. Efectúa:

a. $1 \div \frac{2}{3}$ b. $1 \div \frac{3}{5}$ c. $1 \div \frac{2}{7}$

d. $1 \div \frac{3}{11}$ e. $1 \div \frac{5}{14}$ f. $1 \div \frac{13}{100}$

2. Un litro de agua se reparte en botellas de capacidad $\frac{3}{4}$ litros. ¿Cuántas botellas se obtendrán? Escribe el **PO** y calcula la respuesta.

1.4 División de números naturales entre fracciones

Analiza

Ana tiene 2 listones, a. uno de 3 m de longitud que cortará en listoncitos de $\frac{1}{4}$ m, y b. otro de 4 m de longitud que cortará en listoncitos de $\frac{2}{5}$ m.
¿Cuántos listoncitos obtendrá en cada caso?

a. **PO:** $3 \div \frac{1}{4}$

b. **PO:** $4 \div \frac{2}{5}$

Soluciona


Beatriz

a. Utilizo la propiedad de la división y multiplico el dividendo y el divisor por 4:

$$\begin{array}{ccc} 3 & \div & \frac{1}{4} \\ \downarrow{\scriptstyle \times 4} & & \downarrow{\scriptstyle \times 4} \\ 3 \times 4 & \div & 1 \end{array}$$

Observo lo siguiente: $3 \times 4 \div 1 = 3 \times 4$ ¡La división la transformé en una multiplicación!

$$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$$

R: 12 listoncitos.

b. Multiplico el dividendo y el divisor por el recíproco de $\frac{2}{5}$:

$$\begin{array}{ccc} 4 & \div & \frac{2}{5} \\ \downarrow{\scriptstyle \times \frac{5}{2}} & & \downarrow{\scriptstyle \times \frac{5}{2}} \\ 4 \times \frac{5}{2} & \div & 1 \end{array}$$

De lo anterior obtengo: $4 \times \frac{5}{2} \div 1 = 4 \times \frac{5}{2}$
Entonces:

$$\begin{aligned} 4 \div \frac{2}{5} &= \overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}} \\ &= 2 \times 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

R: 10 listoncitos.

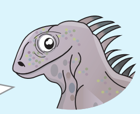
Comprende

Dividir un número natural entre una fracción es igual a multiplicar el número natural por el recíproco de la fracción.

$$a \div \frac{c}{d} = a \times \frac{d}{c}$$

a, c y d representan cualquier número natural.

Recuerda simplificar antes de realizar el cálculo.



Por ejemplo, $9 \div \frac{3}{7}$:

$$\begin{aligned} 9 \div \frac{3}{7} &= \overset{3}{\cancel{9}} \times \frac{7}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ &= 3 \times 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Resuelve

1. Efectúa (simplifica cuando sea posible):

a. $3 \div \frac{1}{2}$

b. $2 \div \frac{1}{4}$

c. $5 \div \frac{1}{3}$

d. $4 \div \frac{2}{3}$

e. $3 \div \frac{3}{5}$

f. $6 \div \frac{2}{9}$

2. Si 4 gal de sorbete se reparten en porciones de $\frac{1}{4}$ gal, ¿cuántas porciones se obtienen? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

1.5 División de fracciones entre fracciones unitarias

Analiza

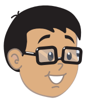
Resuelve lo siguiente:

a. ¿Cuántos listoncitos de $\frac{1}{8}$ m se pueden obtener de $\frac{1}{4}$ m de listón?

b. ¿Cuántos listoncitos de $\frac{1}{8}$ m se pueden obtener de $\frac{3}{4}$ m de listón?

Escribe los **PO** y encuentra las respuestas.

Soluciona


Carlos

a. **PO**: $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$

Multiplico el dividendo y el divisor por el recíproco de $\frac{1}{8}$, o sea, 8:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & \div & \frac{1}{8} \\ \downarrow{\scriptstyle \times 8} & & \downarrow{\scriptstyle \times 8} \\ \frac{1}{4} \times 8 & \div & 1 \end{array}$$

Así, $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times 8$; como en la clase anterior, transformé la división en una multiplicación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \div \frac{1}{8} &= \frac{1}{\cancel{4}_{1}} \times \cancel{8}^{2} \\ &= 1 \times 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

R: 2 listoncitos.

b. **PO**: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$

Como en el caso anterior, multiplico el dividendo y el divisor por 8:

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \div & \frac{1}{8} \\ \downarrow{\scriptstyle \times 8} & & \downarrow{\scriptstyle \times 8} \\ \frac{3}{4} \times 8 & \div & 1 \end{array}$$

Entonces, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times 8$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \div \frac{1}{8} &= \frac{3}{\cancel{4}_{1}} \times \cancel{8}^{2} \\ &= 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

R: 6 listoncitos.

Comprende

Dividir una fracción entre una fracción unitaria es igual a multiplicar la fracción por el denominador de la fracción unitaria.

$$\frac{a}{b} \div \frac{1}{d} = \frac{a}{b} \times d$$

a, b y d representan cualquier número natural.

¿Qué pasaría?

¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{6} \div \frac{1}{3}$?

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \div \frac{1}{3} &= \frac{1}{\cancel{6}_{2}} \times \cancel{3}^{1} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El resultado de la división de una fracción entre una fracción unitaria puede ser otra fracción.

Resuelve

Efectúa (simplifica cuando sea posible):

a. $\frac{1}{7} \div \frac{1}{14}$

b. $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$

d. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5}$

e. $2 \div \frac{1}{8}$

f. $5 \div \frac{1}{4}$

1.6 División de fracciones entre fracciones

Analiza

Resuelve lo siguiente:

a. ¿Cuántos listoncitos de $\frac{3}{8}$ m se pueden obtener de $\frac{3}{4}$ m de listón?

b. ¿Cuántos listoncitos de $\frac{3}{10}$ m se pueden obtener de $\frac{4}{5}$ m de listón?

Escribe los **PO** y encuentra las respuestas.

Soluciona


Ana

a. **PO**: $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$

Multiplico el dividendo y el divisor por $\frac{8}{3}$:

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \div & \frac{3}{8} \\ \big\downarrow \times\frac{8}{3} & & \big\downarrow \times\frac{8}{3} \\ \frac{3}{4}\times\frac{8}{3} & \div & 1 \end{array}$$

De lo anterior, observo que $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \div \frac{3}{8} &= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \\ &= 1 \times 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

R: 2 listoncitos.

b. **PO**: $\frac{4}{5} \div \frac{3}{10}$

Multiplico el dividendo y el divisor por $\frac{10}{3}$:

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{5} & \div & \frac{3}{10} \\ \big\downarrow \times\frac{10}{3} & & \big\downarrow \times\frac{10}{3} \\ \frac{4}{5}\times\frac{10}{3} & \div & 1 \end{array}$$

Observo que $\frac{4}{5} \div \frac{3}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{10}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \div \frac{3}{10} &= \frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{3} \\ &= \frac{4 \times 2}{1 \times 3} \\ &= \frac{8}{3} \left(= 2\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

R: 2 listoncitos completos y $\frac{2}{3}$ del tercero.

Comprende

En general, dividir una fracción entre otra fracción equivale a multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

a, b, c y d representan cualquier número natural.

¡Recuerda simplificar antes de realizar el cálculo!

Por ejemplo, $\frac{4}{7} \div \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} \div \frac{2}{3} &= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \\ &= \frac{2 \times 3}{7 \times 1} \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Resuelve

1. Efectúa (simplifica cuando sea posible):

a. $\frac{3}{5} \div \frac{3}{10}$ b. $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8}$ c. $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$

d. $\frac{6}{7} \div \frac{5}{3}$ e. $\frac{4}{5} \div \frac{3}{8}$ f. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5}$

2. Si $\frac{4}{5}$ litros de jugo se reparten en vasos de $\frac{2}{15}$ litros de capacidad, ¿cuántos vasos se obtienen? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

1.7 División con números mixtos

Analiza

Una ambulancia tiene que atender una emergencia a $13\frac{1}{2}$ km de distancia del hospital. Si recorre $1\frac{1}{2}$ km por minuto, ¿cuántos minutos tardará en llegar?

PO: $13\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2}$

Si calculas cuántos $1\frac{1}{2}$ hay en $13\frac{1}{2}$, eso te dará los minutos que tardará en llegar la ambulancia.

¿Cómo se puede calcular $13\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2}$?

Soluciona

Para calcular el resultado de la división, convierto los números mixtos en fracciones impropias:

Mario

$$13\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} = \frac{27}{2} \div \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= 9 \times 1$$

R: 9 minutos.

Comprende

Para dividir números mixtos, se convierten estos a fracciones impropias, y se utiliza el procedimiento para dividir una fracción entre otra fracción.

Por ejemplo, $2\frac{2}{3} \div 2\frac{2}{5}$:

$$2\frac{2}{3} \div 2\frac{2}{5} = \frac{8}{3} \div \frac{12}{5}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{3} \times \frac{5}{\underset{3}{\cancel{12}}}$$

$$= \frac{2 \times 5}{3 \times 3}$$

$$= \frac{10}{9} \left(= 1\frac{1}{9}\right)$$

Resuelve

1. Efectúa (simplifica cuando sea posible):

   a. $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ b. $3\frac{4}{7} \div \frac{1}{7}$ c. $7 \div 2\frac{4}{5}$

¡Ten cuidado cuando identifiques el dividendo y el divisor!

2. Se quieren repartir los $1\frac{1}{3}$ litros de una botella de perfume en frascos de $\frac{1}{9}$ litros de capacidad. ¿Cuántos frascos se pueden llenar? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

3. ¿Cuántos dólares vale un metro de alambre, si $5\frac{2}{3}$ m valen $8\frac{1}{2}$ dólares? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

1.8 Relación entre el divisor y el cociente

Analiza

Resuelve lo siguiente:

a. Si un alambre de cobre delgado, de $1\frac{1}{3}$ m de longitud pesa 12 g, ¿cuánto pesará un alambre del mismo tipo pero de longitud 1 m?
PO: $12 \div 1\frac{1}{3}$

b. Si un alambre de cobre grueso, de $\frac{2}{3}$ m de longitud pesa 12 g, ¿cuánto pesará un alambre del mismo tipo pero de longitud 1 m?
PO: $12 \div \frac{2}{3}$

Soluciona


Carmen

a. Transformo el número mixto a fracción impropia, y efectúo la división:

$$\begin{aligned} 12 \div 1\tfrac{1}{3} &= 12 \div \tfrac{4}{3} \\ &= \overset{3}{\cancel{12}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

R: 9 g

b. Efectúo la división:

$$\begin{aligned} 12 \div \tfrac{2}{3} &= \overset{6}{\cancel{12}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \\ &= 6 \times 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

R: 18 g

En la división de a. el divisor es mayor que 1 y el resultado es menor que 12. En la división de b. el divisor es menor que 1 y el resultado es mayor que 12.

Comprende

En una división:

- Cuando el divisor es menor que 1, el resultado es mayor que el dividendo. Por ejemplo:
$$40 \div \frac{1}{4} = 160 \text{ y } 160 > 40$$
- Cuando el divisor es mayor que 1, el resultado es menor que el dividendo. Por ejemplo:
$$40 \div 1\frac{2}{3} = 24 \text{ y } 24 < 40$$

Resuelve

1. Estima cuáles de los siguientes cocientes son menores que 60 y cuáles son mayores que 60:

a. $60 \div \frac{1}{3}$ b. $60 \div \frac{5}{3}$ c. $60 \div \frac{2}{5}$ d. $60 \div 2\frac{1}{2}$ e. $60 \div \frac{3}{4}$

2. Estima cuáles de los siguientes cocientes son menores que $\frac{4}{5}$ y cuáles son mayores que $\frac{4}{5}$:

a. $\frac{4}{5} \div \frac{10}{7}$ b. $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$ c. $\frac{4}{5} \div 1\frac{1}{3}$ d. $\frac{4}{5} \div 2$ e. $\frac{4}{5} \div \frac{3}{10}$

1.9 Practica lo aprendido

1. Efectúa (simplifica cuando sea posible):

a. $1 \div \frac{1}{7}$ b. $1 \div \frac{5}{9}$ c. $1 \div \frac{10}{7}$

d. $3 \div \frac{1}{5}$ e. $4 \div \frac{2}{3}$ f. $\frac{3}{7} \div \frac{1}{5}$

g. $\frac{5}{8} \div \frac{10}{11}$ h. $1\frac{1}{6} \div \frac{5}{14}$ i. $1\frac{7}{9} \div 1\frac{1}{3}$

2. Andrés compró 5 libras de clavos y los quiere repartir en grupos de $\frac{1}{3}$ libras cada uno. ¿Cuántos grupos de $\frac{1}{3}$ libras obtendrá? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

3. Marta pinta $2\frac{1}{2}$ m^2 de una pared con $\frac{1}{4}$ gal de pintura. ¿Cuántos metros cuadrados pintará con 1 gal de pintura? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

1.10 Practica lo aprendido

1. Un vehículo consume $\frac{5}{24}$ gal de combustible para recorrer $6\frac{1}{4}$ km. ¿Cuántos kilómetros recorre con 1 gal de combustible? Escribe el **PO** y encuentra la respuesta.

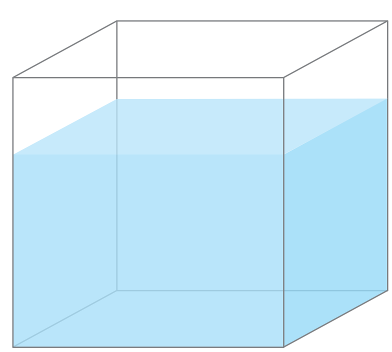
2. José utiliza $2\frac{4}{5}$ litros de agua para regar un área de $1\frac{1}{2}$ m^2 de un terreno. ¿Cuántos litros de agua necesita para regar un área de 1 m^2?

3. Estima cuáles de los siguientes cocientes son menores que 20 y cuáles son mayores que 20:

a. $20 \div \frac{2}{3}$ b. $20 \div \frac{10}{3}$ c. $20 \div \frac{5}{6}$

Desafíate

$\frac{5}{7}$ de un recipiente con forma de prisma se llenan con 65 litros de agua. ¿Con cuántos litros de agua se llena el recipiente completo?



2.1 Suma o resta de fracciones y números decimales, parte 1

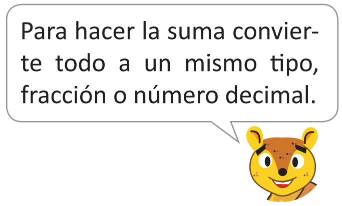
Recuerda

Convierte 0.45 a fracción.

Analiza

Carlos y Antonio recorren primero $\frac{1}{4}$ km y luego 0.2 km. ¿Cuántos kilómetros recorren en total?

PO: $\frac{1}{4} + 0.2$



Soluciona

José

Convierto el número decimal a fracción:

$$0.2 = \frac{1}{5}$$

Ahora, puedo sumar ambas cantidades:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + 0.2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\\ &= \frac{5}{20} + \frac{4}{20}\\ &= \frac{9}{20}\end{aligned}$$

R: $\frac{9}{20}$ km

Julia

Convierto la fracción a número decimal:

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

Ahora, sumo ambas cantidades:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + 0.2 &= 0.25 + 0.2\\ &= 0.45\end{aligned}$$

R: 0.45 km

Comprende

Para sumar o restar fracciones con números decimales se puede convertir todo a fracción o a número decimal.

Por ejemplo, $\frac{3}{4} - 0.65$:

Convirtiendo a fracción: $0.65 = \frac{13}{20}$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} - 0.65 &= \frac{3}{4} - \frac{13}{20}\\ &= \frac{15}{20} - \frac{13}{20}\\ &= \frac{2}{20}\\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Convirtiendo a decimal: $\frac{3}{4} = 0.75$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} - 0.65 &= 0.75 - 0.65\\ &= 0.1\end{aligned}$$

Resuelve

1. Efectúa:

a. $0.6 + \frac{1}{5}$ b. $\frac{2}{5} - 0.25$ c. $1.8 - 1\frac{1}{2}$

d. $0.75 + 2\frac{1}{4}$ e. $\frac{5}{4} - 1.2$ f. $2.12 - 2\frac{1}{10}$

2. Marina bebió 0.4 litros de jugo; luego bebió $\frac{3}{4}$ litros de jugo. ¿Cuántos litros de jugo bebió en total?

2.2 Suma o resta de fracciones y números decimales, parte 2

Analiza

Si Antonio y José recorren primero 0.7 km y luego $\frac{1}{3}$ km, ¿cuántos kilómetros recorrerán en total?

Escribe el **PO** y calcula la respuesta.

Al igual que en la clase anterior, para hacer la suma convierte todo a un mismo tipo: fracción o decimal.

Soluciona

PO: $0.7 + \frac{1}{3}$

Ana

Si convierto $\frac{1}{3}$ a decimal obtengo que $\frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0.3333....$ ¡El tres se repite sin parar!
Convierto, entonces, 0.7 a fracción:

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

Efectúo la suma:

$$\begin{aligned} 0.7 + \frac{1}{3} &= \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{21}{30} + \frac{10}{30} \\ &= \frac{31}{30} \left(= 1\frac{1}{30}\right) \end{aligned}$$

R: $\frac{31}{30} \left(= 1\frac{1}{30}\right)$ km

Comprende

Si se suman o restan fracciones y el número decimal que corresponde a una fracción no es exacto entonces se escriben los decimales como fracciones.

Recuerda que cuando redondeamos perdemos exactitud en la respuesta.

Por ejemplo, $\frac{1}{6} - 0.1$:

$$\frac{1}{6} = 0.1666...$$

Así que es mejor convertir a fracción:

$$0.1 = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} - 0.1 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{5}{30} - \frac{3}{30} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{15}{\cancel{30}}} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Resuelve

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a. $\frac{5}{6} + 0.5$ b. $\frac{4}{9} + 2.5$ c. $\frac{6}{7} - 0.5$

d. $1.2 + \frac{1}{3}$ e. $1.25 - \frac{7}{6}$ f. $3.5 - \frac{4}{9}$

2. Marina bebió $\frac{2}{9}$ litros de jugo; luego bebió 0.5 litros de jugo. ¿Cuántos litros de jugo bebió en total?

3. Andrés tiene una botella con 1.6 litros de agua. Si bebe $1\frac{1}{3}$ litros, ¿cuántos litros de agua le quedan en la botella?

2.3 Multiplicación o división de fracciones y números decimales

Analiza

Encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a. $\frac{3}{4} \times 0.8$

b. $0.9 \div \frac{3}{4}$

En cada literal, convierte todo a fracción.

Soluciona

Antonio

a. Convierto el decimal a fracción y luego multiplico las dos fracciones:

$$0.8 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{4} \times 0.8 = \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{5}$$

$$= 3 \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

b. Similar al literal anterior, convierto el decimal a fracción y luego efectúo la división:

$$0.9 = \frac{9}{10}$$

$$0.9 \div \frac{3}{4} = \frac{9}{10} \div \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{3}{5} \times 2$$

$$= \frac{6}{5} \left(= 1\frac{1}{5}\right)$$

Comprende

Para multiplicar o dividir fracciones y números decimales se realiza lo siguiente:

① Se convierten los números decimales y mixtos a fracciones propias o impropias.
② Se efectúa la multiplicación o división (se simplifica si es posible).

Resuelve

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a. $0.2 \times \frac{5}{8}$

b. $\frac{3}{5} \div 1.5$

c. $3\frac{1}{3} \times 1.7$

d. $0.4 \div 2\frac{2}{3}$

e. $1.05 \times 1\frac{1}{7}$

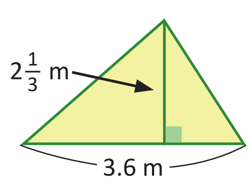
f. $2\frac{2}{5} \div 0.07$

2. En cada uno de los siguientes problemas, escribe el **PO** y encuentra la respuesta:

a. Un galón de gasolina tiene un costo de \$3.50. Si Marcos quiere comprar $\frac{2}{5}$ gal de gasolina, ¿cuánto pagará?

b. El timbre de la escuela de Felipe se atrasa $\frac{3}{4}$ min cada día. ¿Cuántos días deberán pasar para que el atraso sea de 37.5 min?

c. Encuentra el área del siguiente triángulo:



Unidad 3

2.4 Combinación de multiplicación y división

Analiza

Encuentra el resultado de:

$$\frac{3}{10} \times 7 \div 0.6$$

Soluciona

Primero, convierto el número decimal a fracción:

Carmen

$$0.6 = \frac{6}{10} \longrightarrow \frac{3}{10} \times 7 \div 0.6 = \frac{3}{10} \times 7 \div \frac{6}{10}$$

Escribo la división como multiplicación y efectúo (simplifico antes de realizar el cálculo):

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} \times 7 \div \frac{6}{10} &= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{10}}} \times 7 \times \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} \\ &= 1 \times 7 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2} \left(= 3\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Observa que la fracción $\frac{6}{10}$ no se simplificó al inicio del proceso; pero hay un paso en que sí debe realizarse la simplificación.

Comprende

En operaciones combinadas de multiplicación y división con números decimales y fracciones:

① Se convierten los números decimales a fracciones.

② Las divisiones se escriben como multiplicación (por el recíproco), y se simplifica si es posible.

③ Se efectúa la multiplicación de izquierda a derecha.

Por ejemplo, $\frac{2}{9} \div \frac{11}{6} \div 0.4$:

$$0.4 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{2}{5} \longrightarrow \frac{2}{9} \div \frac{11}{6} \div 0.4 = \frac{2}{9} \div \frac{11}{6} \div \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} \div \frac{11}{6} \div \frac{2}{5} &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{11} \times \frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{11} \times 5 \\ &= \frac{10}{33} \end{aligned}$$

Resuelve

1. Efectúa:

a. $5 \times 0.1 \div \frac{1}{2}$

b. $3.5 \div \frac{3}{5} \times 1.2$

c. $4.5 \div 1.8 \times \frac{5}{6}$

d. $\frac{3}{2} \div \frac{4}{5} \times 1.2$

2. Efectúa:

a. $\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} \div \frac{3}{5}$

b. $\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{2} \div \frac{5}{6}$

c. $\frac{2}{5} \div \frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$

d. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

e. $\frac{3}{4} \div 6 \times \frac{4}{7}$

f. $2\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} \div \frac{6}{7}$

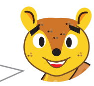
2.5 Operaciones combinadas

Analiza

Encuentra el resultado de:

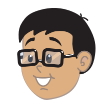
$$0.6 - 1\frac{2}{3} \div 5$$

Recuerda que debes realizar primero las multiplicaciones o divisiones, luego las sumas o restas.



Soluciona

Escribo el número decimal y el mixto como fracciones (propias o impropias):



Carlos

$$0.6 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5};\quad 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \longrightarrow 0.6 - 1\frac{2}{3} \div 5 = \frac{3}{5} - \frac{5}{3} \div 5$$

Efectúo la operación, realizando primero el cálculo de la división:

$$\begin{aligned} 0.6 - 1\frac{2}{3} \div 5 &= \frac{3}{5} - \frac{5}{3} \div 5 \\ &= \frac{3}{5} - \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{3} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{5}}} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{15} - \frac{5}{15} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Comprende

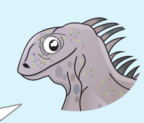
Para efectuar operaciones combinadas (suma, resta, multiplicación y división) que involucran números decimales, mixtos y fracciones, se realiza lo siguiente:

1. Se convierten los números naturales, decimales y mixtos a fracción.
2. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones (simplificar si es posible).
3. Por último, realizar las sumas y restas de izquierda a derecha.

Por ejemplo $\frac{3}{4} \div 1.5 + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \div 1.5 + 1 &= \frac{3}{4} \div \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} + 1 \\ &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En el paso ① se omite convertir a fracción aquellos números naturales que no participan en alguna multiplicación o división. En el paso ③ será necesario convertir los números naturales a fracción sólo si hay restas que realizar.



Resuelve

Efectúa las siguientes operaciones:

a. $8 + \frac{1}{3} \times 0.3$

b. $5.4 - \frac{1}{2} \times 4$

c. $\frac{4}{5} \div 0.75 + 3$

d. $1.3 \div 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

e. $25 \times 0.1 + 1\frac{1}{5}$

f. $1.25 \div \frac{3}{4} - 1$

2.6 Operaciones con paréntesis

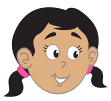
Analiza

Encuentra el resultado de:

$$\frac{1}{4} \div \left(1\frac{2}{5} - 0.2\right) \times 3$$

Lo primero es escribir todos los números como fracción. Luego, se hace la operación dentro del paréntesis aunque no sea la de mayor jerarquía.

Soluciona



Beatriz

Escribo cada número como fracción:

$$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5};\quad 0.2 = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{10}_{\,5}} = \frac{1}{5} \longrightarrow \frac{1}{4} \div \left(1\frac{2}{5} - 0.2\right) \times 3 = \frac{1}{4} \div \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\right) \times 3$$

Realizo las operaciones, comenzando por la resta que se encuentra dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \div \left(1\frac{2}{5} - 0.2\right) \times 3 &= \frac{1}{4} \div \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\right) \times 3 \\
&= \frac{1}{4} \div \frac{6}{5} \times 3 \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{5}{\cancel{6}_{\,2}} \times \cancel{3}^{\,1} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \times 1 \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Comprende

En operaciones combinadas que incluyan paréntesis:

① Se convierten todos los números decimales y mixtos a fracción.

② Se realiza la operación dentro del paréntesis. Cuando se tiene el resultado, los paréntesis se quitan.

③ Se efectúan las multiplicaciones y divisiones (se simplifica si es posible).

④ Se realizan las sumas y restas de izquierda a derecha. Si en este paso hay números naturales, convertirlos a fracción, solo si hay restas que realizar.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
0.3 + \left(1\frac{1}{4} - 1\right) \div \frac{5}{2} &= \frac{3}{10} + \frac{1}{4} \div \frac{5}{2} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{1}{\cancel{4}_{\,2}} \times \frac{\cancel{2}^{\,1}}{5} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{10}_{\,5}} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Resuelve

Efectúa las siguientes operaciones:

a. $\frac{5}{9} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{5}$

b. $\frac{1}{6} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \div \frac{1}{3}$

c. $0.7 \times \frac{1}{7} \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)$

d. $2.5 \div \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 0.4$

e. $1 + \left(0.75 - \frac{1}{6}\right) \div \frac{7}{2}$

f. $1\frac{1}{2} + 0.3 \div \left(\frac{3}{4} + 1.5\right)$

2.7 Operaciones con varios paréntesis

Analiza

Encuentra el resultado de:

$$7-\left(1\tfrac{2}{5}+0.2\right)\div\left(\tfrac{7}{10}-0.3\right)$$

Realiza la operación dentro de cada uno de los dos paréntesis.

Soluciona

Convierto los números decimales y mixtos a fracciones propias e impropias:

Mario

$$1\tfrac{2}{5}=\tfrac{7}{5};\quad 0.2=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}_{5}}=\tfrac{1}{5};\quad 0.3=\tfrac{3}{10}\longrightarrow 7-\left(1\tfrac{2}{5}+0.2\right)\div\left(\tfrac{7}{10}-0.3\right)=7-\left(\tfrac{7}{5}+\tfrac{1}{5}\right)\div\left(\tfrac{7}{10}-\tfrac{3}{10}\right)$$

Efectúo las operaciones, comezando por las que están dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned}
7-\left(1\tfrac{2}{5}+0.2\right)\div\left(\tfrac{7}{10}-0.3\right)&=7-\left(\tfrac{7}{5}+\tfrac{1}{5}\right)\div\left(\tfrac{7}{10}-\tfrac{3}{10}\right)\\
&=7-\frac{8}{5}\div\frac{4}{10}\\
&=7-\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{5}_{1}}\times\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{4}_{1}}\\
&=7-2\times 2\\
&=7-4\\
&=3
\end{aligned}$$

Comprende

Así como en la clase anterior, en operaciones combinadas (suma, resta, multiplicación o división) con números naturales, decimales o fracciones que incluyen paréntesis, se realiza lo siguiente:

① Se convierten todos números decimales y mixtos a fracción.

② Se realizan las operaciones dentro de los paréntesis.

③ Se efectúan las multiplicaciones y divisiones (se simplifica si es posible).

④ Se realizan las sumas y restas de izquierda a derecha. Si en este paso hay números naturales, convertirlos a fracción, solo si hay restas que realizar.

Resuelve

Efectúa las siguientes operaciones:

a. $\left(0.25+1\tfrac{1}{4}\right)\times\left(1-\tfrac{1}{2}\right)$

b. $\left(\tfrac{19}{27}-\tfrac{5}{9}\right)\div\left(1+\tfrac{1}{3}\right)$

c. $\left(3-\tfrac{5}{6}\right)\div\left(2\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}\right)$

d. $\left(1\tfrac{1}{2}+0.5\right)\div\left(\tfrac{5}{4}+1.75\right)-\tfrac{1}{6}$

2.8 Practica lo aprendido

1. Efectúa:

a. $\frac{3}{10} + 0.7$

b. $0.3 + \frac{2}{3}$

c. $\frac{1}{5} - 0.15$

d. $\frac{4}{5} \times 0.25$

e. $\frac{1}{2} \times 4 \div 0.2$

f. $\frac{2}{3} \div \frac{7}{9} + \frac{2}{5}$

g. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$

h. $\frac{4}{5} \div 1\frac{1}{7} - 0.4 + 2$

i. $\frac{4}{3} \times \left(\frac{7}{10} - \frac{2}{5}\right)$

j. $\left(2\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \div \left(2.3 + \frac{2}{5}\right)$

2. En cada problema, escribe el **PO** y encuentra el resultado:

a. Si Carmen tiene $1\frac{1}{2}$ litros de agua y Miguel tiene 2.2 litros, ¿cuántos litros de agua tienen en total?

b. José compró 5 bolsas de queso, cada una con 2.25 lb. Si del total regaló $\frac{3}{4}$ lb de queso a su abuela, ¿cuántas libras le quedaron? Escribe la operación en un solo **PO.**

Desafíate

Antonio pintó $3\frac{4}{7}$ m² de una pared con 1 litro de pintura. Luego, compró 2.5 litros para continuar pintando y solamente utilizó $1\frac{1}{7}$ litros. ¿Cuántos metros cuadrados pintó en total? Exprésalo en un mismo **PO** y resuelve.

Unidad 4

Razones y porcentajes

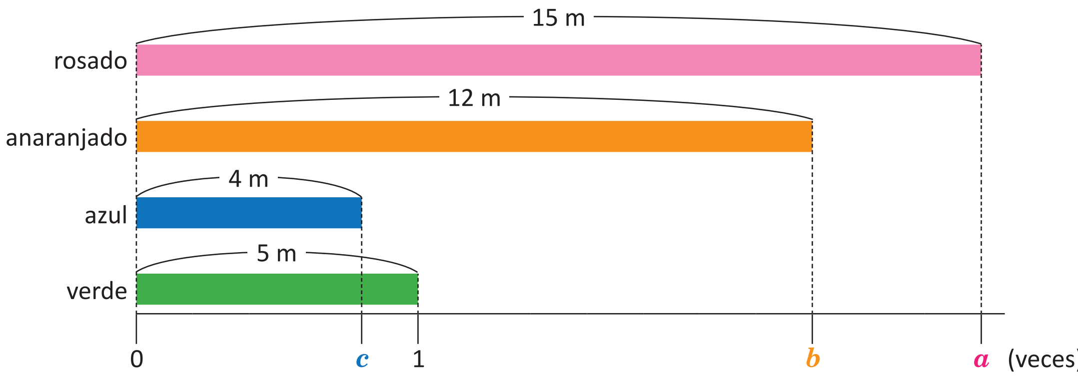
En esta unidad aprenderás a

- Determinar la razón entre dos cantidades
- Calcular el valor de la razón
- Utilizar diferentes notaciones para expresar razones
- Resolver problemas que involucran el cálculo de porcentajes

1.1 Comparación entre cantidades: cantidad de veces

Analiza

Observa las cintas y la recta numérica.



a. ¿Cuántas veces es el largo de la cinta rosada con respecto al largo de la cinta verde?
b. ¿Cuántas veces es el largo de la cinta anaranjada con respecto al largo de la cinta verde?
c. ¿Cuántas veces es el largo de la cinta azul comparado con el largo de la cinta verde?

Soluciona

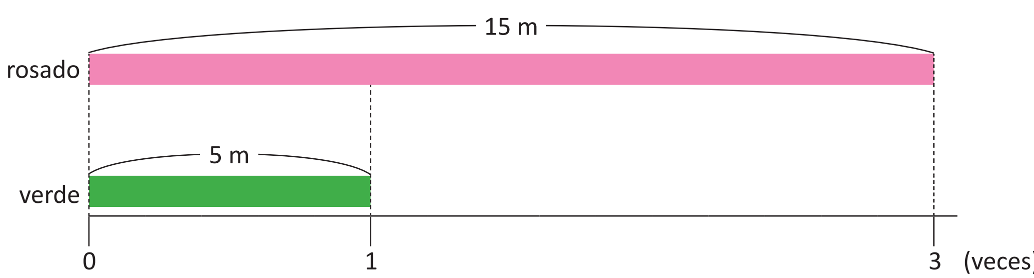
a. **PO:** 15 ÷ 5

$$15 \div 5 = 3$$


Julia

El largo de la cinta rosada es 3 veces el largo de la cinta verde.
R: 3 veces.

En el esquema, la cantidad de veces que es la cinta rosada con respecto a la cinta verde se ha representado con ***a***. Entonces, ***a*** es igual a 3.



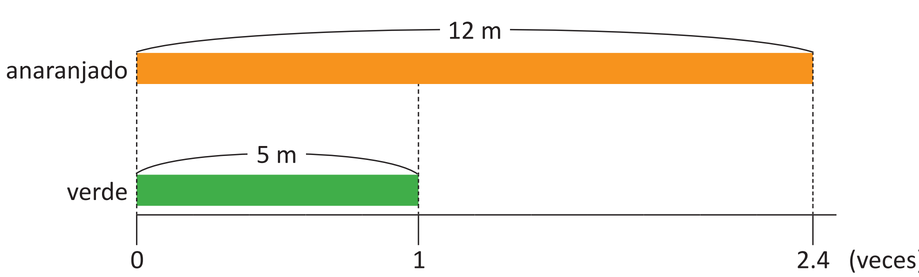
b. **PO:** 12 ÷ 5

$$12 \div 5 = 2.4$$

El largo de la cinta anaranjada es 2.4 veces el largo de la cinta verde.

R: 2.4 veces.

En el esquema, la cantidad de veces que es la cinta anaranjada con respecto a la cinta verde se ha representado con ***b***. Entonces, ***b*** es igual a 2.4.



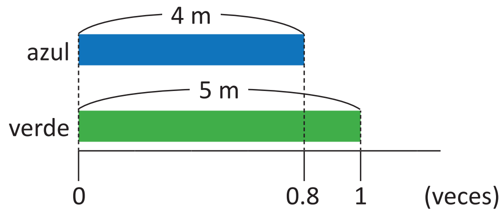
c. **PO:** 4 ÷ 5

$$4 \div 5 = 0.8$$

El largo de la cinta azul es 0.8 veces el largo de la cinta verde.

R: 0.8 veces.

En el esquema, c es igual a 0.8.



Comprende

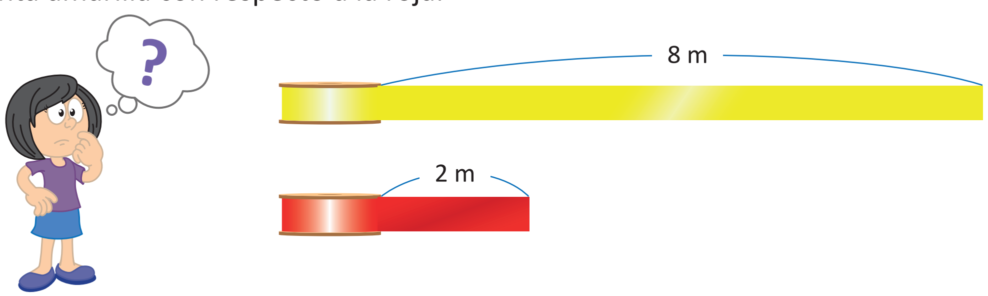
Una cantidad de veces también es una comparación entre cantidades, a través del cociente entre estas; puede ser un número natural, un número decimal o una fracción.

La cantidad de veces que es una cantidad con respecto a otra se calcula:

cantidad de veces = cantidad a comparar ÷ cantidad base

Resuelve

1. Marta tiene una cinta roja que mide 2 m y una amarilla que mide 8 m. Encuentra la cantidad de veces que es la cinta amarilla con respecto a la roja.



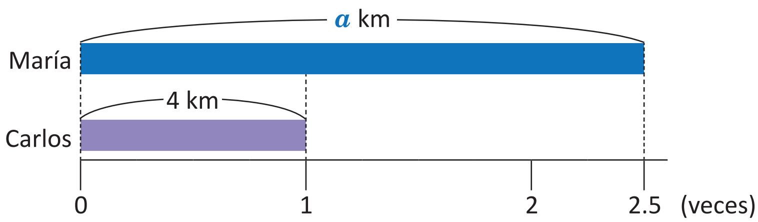
2. Antonio tiene 10 años y su papá tiene 42 años. ¿Cuántas veces es la edad del papá con respecto a la edad de Antonio?

3. En un torneo de fútbol, Jorge anotó 12 goles y Javier 9. Encuentra la cantidad de veces que es el número de goles de Javier con respecto al número de goles de Jorge.

1.2 Cálculo de la cantidad a comparar

Analiza

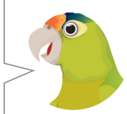
Carlos y María salieron a correr juntos. Carlos recorrió 4 km, mientras que María recorrió 2.5 veces lo que recorrió Carlos. ¿Cuántos kilómetros recorrió María?



Recuerda que:

cantidad de veces = cantidad a comparar ÷ cantidad base

¿Cómo puedes calcular la cantidad a comparar, si solo conoces la cantidad base y la cantidad de veces?



Soluciona

PO: 4 × 2.5

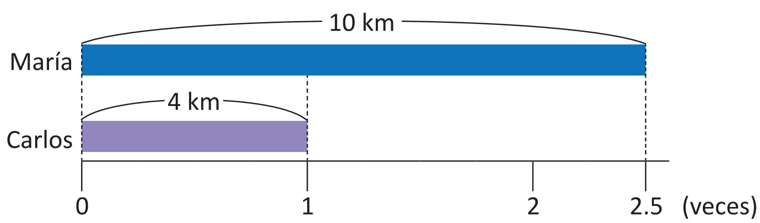
Efectúo la multiplicación, para encontrar la cantidad de kilómetros que recorrió María:

$$4 \times 2.5 = 10$$

Entonces, María recorrió 10 km.

R: 10 km

En el esquema, la cantidad de kilómetros recorridos por María se representa con a. Así, a = 10:



Puedo comprobar además que, al dividir la cantidad a comparar (10 km) entre la cantidad base (4 km) se obtiene la cantidad de veces (2.5).

Comprende

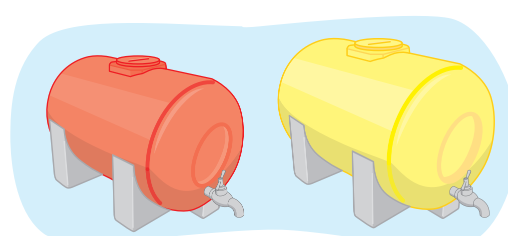
Cuando se conoce la cantidad base y la cantidad de veces, entonces la cantidad a comparar se calcula:

cantidad a comparar = **cantidad base** × **cantidad de veces**

Resuelve

Recuerda que la cantidad base puede ser mayor que la cantidad a comparar.

1. José pesa 45 kg, mientras que Marta pesa 0.8 veces lo que pesa José. ¿Cuánto pesa Marta?



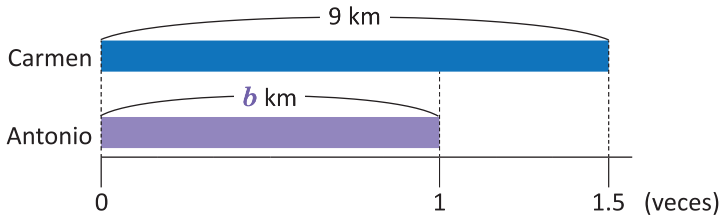
2. Un tanque rojo tiene capacidad de 300 litros; mientras que un tanque amarillo tiene 1.75 veces la capacidad del tanque rojo. ¿Cuál es la capacidad del tanque amarillo?

3. Carmen y Beatriz compitieron en salto largo. Carmen saltó 2 m y Beatriz saltó 0.75 veces lo que saltó Carmen. ¿Cuántos metros saltó Beatriz?

1.3 Cálculo de la cantidad base

Analiza

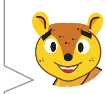
En cierto día, Carmen recorrió 1.5 veces lo que recorrió Antonio. Si Carmen recorrió 9 km, ¿cuántos kilómetros recorrió Antonio?



Si:

cantidad a comparar = cantidad base × cantidad de veces

¿Cómo puedes calcular la cantidad base, si solo conoces la cantidad a comparar y la cantidad de veces?



Soluciona

PO: 9 ÷ 1.5

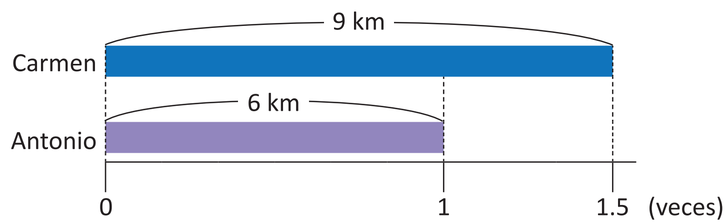
Efectúo la división, para encontrar la cantidad de kilómetros que recorrió Antonio:

$$9 \div 1.5 = 6$$

Entonces, Antonio recorrió 6 km.

R: 6 km

En el esquema, la cantidad de kilómetros recorridos por Antonio se representa con b. Así, b = 6:



Puedo comprobar además que, al dividir la cantidad a comparar (9 km) entre la cantidad base (6 km) se obtiene la cantidad de veces (1.5).

Comprende

Cuando se conoce la cantidad a comparar y la cantidad de veces, entonces la cantidad base se calcula:

cantidad base = **cantidad a comparar** ÷ **cantidad de veces**

Resuelve

1. En una clase de natación, Marta nadó 3 veces lo que nadó Ana. Si Marta nadó 1.5 km, ¿cuántos kilómetros nadó Ana?

2. En un salón, la cantidad de niños es 1.4 veces la cantidad de niñas. Si hay 21 niños, ¿cuántas niñas hay en el salón?

3. En un rectángulo, la longitud del largo es 3.5 veces la del ancho. Si el largo mide 42 cm, ¿cuánto mide el ancho?

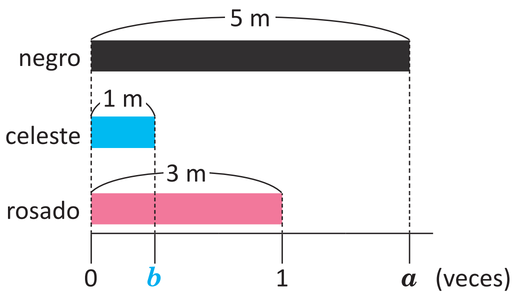
4. En una reunión de padres de familia, la cantidad de hombres era 0.4 veces la cantidad de mujeres. Si asistieron 32 hombres, ¿cuántas mujeres asistieron?

Recuerda simplificar antes de realizar el cálculo.

1.4 Razón y valor de razón

Analiza

Observa las cintas y la recta numérica:

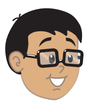


a. ¿Cuántas veces es la cinta negra con respecto a la rosada?

b. ¿Cuántas veces es la cinta celeste con respecto a la rosada?

Soluciona

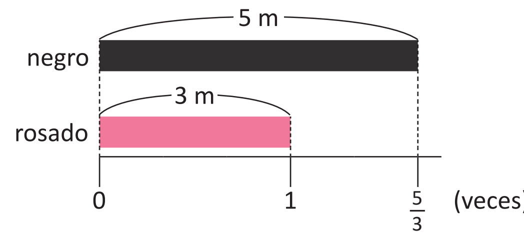
a. **PO**: 5 ÷ 3



Carlos

Si calculo el cociente obtengo: 5 ÷ 3 = 1.66666... Pero, la división 5 ÷ 3 también la puedo escribir como $5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

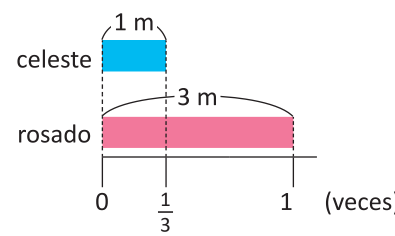
R: $\frac{5}{3}$ veces.



b. **PO**: 1 ÷ 3

Similar al caso anterior: 1 ÷ 3 = 0.33333... Entonces, escribo la división 1 ÷ 3 como $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

R: $\frac{1}{3}$ veces.



Comprende

En general, a la comparación entre dos cantidades utilizando el cociente entre ellas se le llama **razón**. Si se tienen dos cantidades a y b, **la razón entre a y b** (en ese orden) se representa como $\boldsymbol{a : b}$.

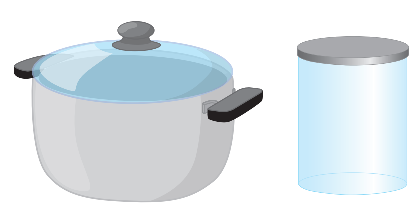
Al número que resulta de calcular el cociente $a \div b$ se le llama **valor de la razón**, este puede ser un número natural, un número decimal o una fracción (si se escribe como $\frac{a}{b}$).

Cuando las cantidades que se comparan tienen la misma unidad, entonces el valor de la razón indica la cantidad de veces que es una respecto a la otra.

Resuelve

1. José ahorró \$8 y Julia \$3. Escribe la razón entre la cantidad ahorrada por José y la cantidad ahorrada por Julia, y calcula el valor de la razón. ¿Qué interpretación tiene este resultado, utilizando cantidad de veces?

2. Un depósito tiene capacidad de 2 litros, y una olla tiene capacidad de 7 litros. Escribe la razón entre la capacidad del depósito y la capacidad de la olla, luego calcula el valor de la razón. ¿Qué interpretación tiene este resultado, utilizando cantidad de veces?



1.5 Razón entre cantidades heterogéneas

Analiza

En una carrera, Miguel recorrió 33 m en 6 segundos, mientras que Juan recorrió 51 m en 10 segundos.

a. ¿Cuántos metros recorrió cada uno en un segundo?
b. ¿Quién avanzaba más rápido?

Soluciona

a. Para calcular la cantidad de metros que recorrió Miguel en 1 segundo, divido los 33 m entre los 6 segundos:

Carmen

$$33 \div 6 = 5.5$$

Miguel recorrió 5.5 m en 1 segundo. De forma similar, divido en el caso de Juan, los 51 m entre 10 segundos:

$$51 \div 10 = 5.1$$

Juan recorrió 5.1 m en 1 segundo.

Observa que se está comparando la distancia recorrida (en metros) y el tiempo que se tardaron en recorrerla (en segundos). Esto también representa una razón.

b. Del literal anterior, observo que Miguel avanzaba más rápido, porque recorrió más metros en 1 segundo.

R: Miguel avanzó más rápido.

Comprende

Las cantidades que se comparan en una razón también pueden estar en diferentes unidades de medida. Cuando las unidades de la cantidad a y la cantidad b son diferentes, el valor de la razón $a : b$ indica cuántas unidades hay de la cantidad a por cada unidad de la cantidad b, es decir, cuántos elementos hay de a por cada unidad de b (cantidad por unidad).

Por ejemplo, si Miguel recorrió 33 m en 6 segundos entonces, la razón entre los metros recorridos y el tiempo es 33 : 6, mientras que el valor de la razón es 33 ÷ 6 = 5.5; esto indica que Miguel recorrió 5.5 metros por cada segundo.

Resuelve

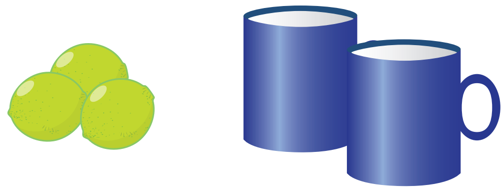
1. Un automóvil recorre 298 km en 4 horas.
   a. Escribe la razón entre los kilómetros que recorre y el tiempo en horas, y calcula el valor de la razón.
   b. ¿Cómo se interpreta este resultado?

2. En un salón de clases hay 20 niñas y 10 niños.
   a. Escribe la razón entre la cantidad de niñas y la cantidad de niños, y calcula el valor de la razón.
   b. ¿Cómo se interpreta este resultado?

1.6 Antecedente y consecuente

Analiza

En cierta receta para preparar limonada, la cantidad de limones y la cantidad de tazas de agua se encuentra a una razón de 3 : 2. Si se utilizan 6 tazas de agua, ¿cuántos limones se deben usar?



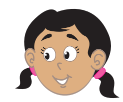
Soluciona

José

El valor de la razón es $\frac{3}{2}$ (o 1.5). Entonces, por cada taza de agua se necesitan $\frac{3}{2}$ limones. Y, para 6 tazas de agua, se usarán $6 \times \frac{3}{2}$ limones:

$$\overset{3}{\cancel{6}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 3 \times 3 = 9$$

R: 9 limones.



Beatriz

La razón 3 : 2 indica que, por cada 3 limones se utilizan 2 tazas de agua. Entonces:

- Para 6 limones se usan 4 tazas de agua (ambas cantidades aumentan el doble).
- Para 9 limones se usan 6 tazas de agua (ambas cantidades aumentan el triple).

R: 9 limones.

Comprende

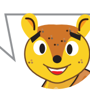
En una razón $a : b$, a la cantidad a se le llama antecedente y a la cantidad b se le llama consecuente. Además, se cumple que:

antecedente = **consecuente** × **valor de la razón**

Observa que, calcular el antecedente es similar a calcular la cantidad a comparar:

cantidad a comparar = cantidad base × cantidad de veces

En lugar de la cantidad base se escribe el consecuente, y en lugar de la cantidad de veces se escribe el valor de la razón.



Resuelve

1. En una rifa se colocan 20 papeles dentro de una bolsa. La cantidad de papeles premiados y el total de papeles colocados en la bolsa se encuentran a una razón de 1 : 4. ¿Cuántos papeles premiados hay?

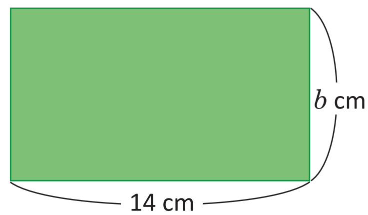
2. Antonio practica baloncesto. Cierto día realizó 15 lanzamientos. Si la razón entre los tiros acertados y la cantidad total de lanzamientos fue 4 : 5, ¿cuántos tiros acertó?

3. Un restaurante estimó que la razón entre la cantidad de personas atendidas en una noche y la ganancia obtenida fue 1 : 10. Si la ganancia del restaurante fue de $300 esa noche, ¿a cuántas personas atendieron?

1.7 Cálculo del consecuente

Analiza

Las longitudes del largo y ancho de un rectángulo se encuentran a una razón de 7 : 4. Si el largo mide 14 cm, ¿cuánto mide el ancho?



Soluciona


Mario

El valor de la razón es $\frac{7}{4}$ (o 1.75); o sea que el largo es $\frac{7}{4}$ veces el ancho. Divido entonces la longitud del largo entre $\frac{7}{4}$ y el resultado será la longitud del ancho:

$$14 \div \frac{7}{4} = \overset{2}{\cancel{14}} \times \frac{4}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 2 \times 4 = 8$$

R: 8 cm


Julia

La razón 7 : 4 indica que, por cada 7 cm del largo se tienen 4 cm del ancho. Entonces:

- Para 14 cm del largo se tienen 8 cm de ancho (ambas cantidades aumentan el doble).

R: 8 cm

Comprende

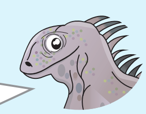
En una razón se cumple que:

consecuente = **antecedente** ÷ **valor de la razón**

Calcular el consecuente es similar a calcular la cantidad base:

cantidad base = cantidad a comparar ÷ cantidad de veces

En lugar de la cantidad a comparar se escribe el antecedente; y en lugar de la cantidad de veces se escribe el valor de la razón.



Resuelve

1. En cada caso, calcula el consecuente:

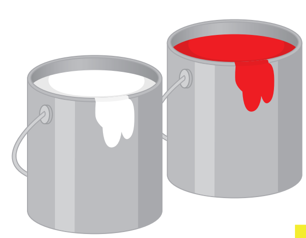
   a. Antecedente = 1, valor de la razón = $\frac{1}{2}$

   b. Antecedente = 6, valor de la razón = $\frac{3}{4}$

   c. Antecedente = 10, valor de la razón = 2

   d. Antecedente = 12, valor de la razón = $\frac{4}{3}$

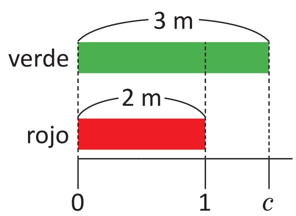
2. Carlos preparó pintura rosada, donde la razón entre la cantidad de mililitros de pintura de color blanco y la de color rojo fue 4 : 5. Si utilizó 12 ml de color blanco, ¿cuántos utilizó de color rojo?



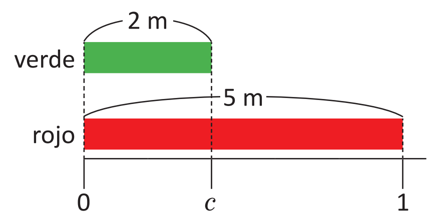
1.8 Practica lo aprendido

1. Escribe la razón entre la longitud de la cinta verde y la de la cinta roja. Luego, calcula el valor de la razón:

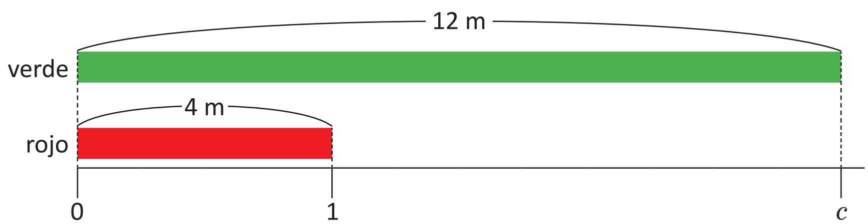
a.



b.



c.



Resuelve los siguientes problemas:

2. En la dieta salvadoreña, dos tortillas aportan 31 g de carbohidratos, 1 g de grasas, 3 g de proteínas y 150 calorías.
   a. Escribe las razones y calcula el valor de las razones entre: la cantidad de carbohidratos y la cantidad de tortillas, la cantidad de grasas y la cantidad de tortillas.
   b. ¿Cómo interpretas los resultados anteriores?

3. Antonio ahorró $15 y de estos gastó $5. ¿Cuál es la razón y el valor de la razón entre el dinero gastado y el dinero ahorrado?, ¿cómo interpretas este resultado?

4. La razón entre la longitud del largo y el ancho de un rectángulo es 3 : 2. Si el ancho mide 10 cm, ¿cuánto mide el largo?

5. En un autobús, la razón entre la cantidad de asientos ocupados y la cantidad de desocupados es 6 : 5; si hay 24 asientos ocupados, ¿cuántos asientos desocupados hay?

6. La razón entre la cantidad de calorías que quema una persona y el tiempo (en minutos) que dedica a correr es 10 : 1. Si una persona quemó 150 calorías, ¿cuántos minutos dedicó a correr?

7. Cierto equipo de fútbol determinó que la razón entre el total de partidos de un campeonato y la cantidad de partidos en los que ganó fue 5 : 3. Si ganó 6 partidos, ¿cuántos partidos se realizaron durante el campeonato?

2.1 Tanto por ciento o porcentaje

Analiza

La siguiente tabla contiene los apuntes del número de goles y la cantidad de intentos que hizo Juan en sus dos últimos entrenos de fútbol:

Entrenamiento	Goles	Intentos
primero	5	10
segundo	9	12

¿En cuál entrenamiento se puede decir que Juan tuvo más éxito?

Soluciona

Las razones entre el número de goles y el número de intentos son, para el primero 5 : 10, mientras que para el segundo es 9 : 12. Calculo los valores de las razones:

Primer entrenamiento

$5 \div 10 = 0.5$

Segundo entrenamiento

$9 \div 12 = 0.75$

En el primer entrenamiento, Juan tuvo éxito en la mitad de los intentos. En el segundo entrenamiento, tuvo éxito 0.75 veces la cantidad de intentos.

R: En el segundo entrenamiento.

Comprende

El **tanto por ciento** o **porcentaje** se obtiene multiplicando el valor de una razón por 100, es decir:

porcentaje = **valor de razón** × **100**

Al final del número que indica el porcentaje, se escribe el símbolo "**%**". Por ejemplo, si el valor de la razón entre el número de goles y el número de intentos (en el primer entrenamiento) se multiplica por 100, se obtiene:

porcentaje = 0.5 × 100 = 50

Se escribe "50 %" y se lee "cincuenta por ciento". Este número indica que se aciertan 50 de cada 100 intentos.

Resuelve

1. La siguiente tabla contiene los resultados de Miguel en los dos últimos juegos de baloncesto.

Juego	Canastas	Lanzamientos
primero	12	16
segundo	9	15

   a. Encuentra el valor de la razón entre número de canastas y el total de lanzamientos.
   b. ¿Qué porcentaje de canastas obtuvo en cada juego?, ¿cómo se interpreta este resultado?

2. José anotó los resultados que obtuvo al jugar capirucho el lunes, martes y miércoles:

Día	Éxito	Intentos
lunes	8	20
martes	10	25
miércoles	8	16

   a. Entre lunes y miércoles, ¿qué día obtuvo mejores resultados? Explica usando porcentajes.
   b. Entre lunes y martes, ¿qué día obtuvo mejores resultados? Explica usando porcentajes.

Unidad 4

2.2 Relación entre razones y porcentajes

Recuerda

Efectúa:

a. 0.01×100 b. 0.2×100

Analiza

En el salón de clases de Marta hay un total de 20 alumnos, de los cuales 7 son niños. ¿Cuál es el porcentaje de niños en este salón?

Soluciona

La razón entre la cantidad de niños y el total de alumnos es 7 : 20. Calculo el valor de la razón, y luego obtengo el porcentaje:

Valor de la razón: $7 \div 20 = 0.35$
Porcentaje: $0.35 \times 100 = 35$


Carmen

El valor de la razón, 0.35, es equivalente al 35 %.

R: 35% de los alumnos en el salón de clases son niños.

Comprende

En general:

- Al multiplicar por 100 el valor de razón, se obtiene el porcentaje:
  porcentaje = valor de razón × 100
- Al dividir entre 100 el porcentaje, se obtiene el valor de la razón:
  valor de razón = porcentaje ÷ 100

Resuelve

1. Encuentra el porcentaje que representan los siguientes valores de razones:
   a. 0.01 b. 0.07
   c. 0.75 d. 1
2. Encuentra el valor de la razón que corresponde a cada uno de los siguientes porcentajes:
   a. 5 % b. 9 %
   c. 12 % d. 54 %
3. El área total de un centro escolar es $1,200\ m^2$, y el área de la cancha es $252\ m^2$.
   a. ¿Cuál es el valor de la razón entre el área de la cancha y el área total del centro escolar?
   b. ¿Qué porcentaje del terreno ocupa la cancha?

¿Sabías que...?

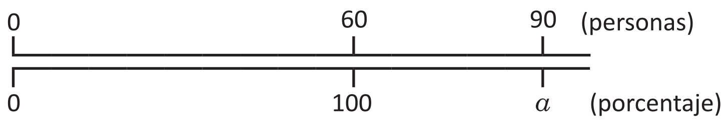
Es muy usual utilizar los porcentajes cuando las cantidades que se comparan son muy grandes. Por ejemplo, según las Proyecciones de la Dirección General de Estadísticas y Censos, se espera que en el año 2020 la población salvadoreña sea de 6, 601, 409 habitantes, de los cuales 3, 520, 577 sean mujeres.

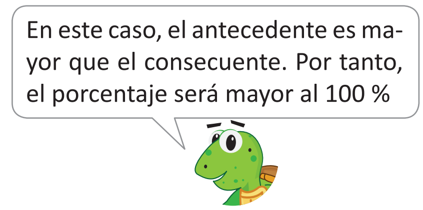
Al calcular el valor de la razón entre el número de mujeres y la población total se obtiene, aproximadamente 0.53; mientras que el porcentaje correspondiente es 53 %. Por lo tanto, se espera que de la población estimada para el 2020, el 53 % sean mujeres, es decir, 53 de cada 100 personas salvadoreñas en el año 2020 serán mujeres.

2.3 Porcentajes mayores al 100 %

Analiza

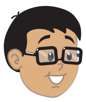
Un restaurante tiene capacidad para atender a 60 personas. Si el sábado atendieron a 90 personas, ¿qué porcentaje de personas con respecto a la capacidad del restaurante atendieron?





Soluciona

Calculo el valor de la razón de la cantidad de personas atendidas y la capacidad del restaurante, y su respectivo porcentaje:


Carlos

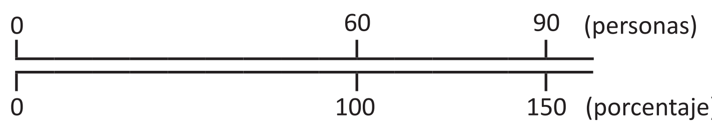
Valor de la razón = 90 ÷ 60 = 1.5

Porcentaje = 1.5 × 100 = 150

Entonces, el porcentaje de personas atendidas en el restaurante fue del 150 %.

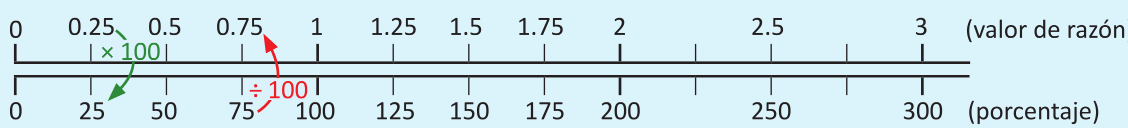
R: 150 %

En el gráfico, el porcentaje se ha representado como a; entonces, a = 150.



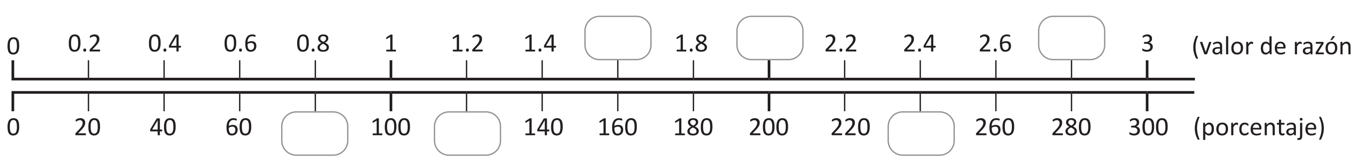
Comprende

Cuando el antecedente es mayor que el consecuente, el porcentaje que se obtiene es mayor al 100 %. Esto se debe a que el valor de la razón es mayor que 1. La siguiente gráfica muestra algunas relaciones entre el valor de la razón y el porcentaje correspondiente:



Resuelve

1. Completa los recuadros de razón o porcentajes faltantes en el gráfico:



2. Se recomienda que un adulto beba 2 litros de agua diariamiente. Si María consume 2.5 litros, ¿qué porcentaje de agua consume respecto a la cantidad sugerida?

3. La Organización Mundial de la Salud (OMS) recomienda a los niños un consumo máximo de 4 g de sal diarios; si un niño consume 6 g diarios podría enfermarse. ¿Qué porcentaje de sal respecto a la cantidad recomendada puede hacer enfermar a un niño?

Organización Mundial de la Salud

Unidad 4

2.4 Cálculo del antecedente usando porcentajes menores al 100 %

Recuerda

1. ¿Cómo se calcula el antecedente utilizando el consecuente y el valor de la razón?
2. Encuentra el valor de razón correspondiente a:
   a. 35 %   b. 100 %

Analiza

María prepara 200 ml de refresco de naranja. Si el 35 % del contenido del refresco es zumo de naranja, ¿a cuántos mililitros de zumo equivale? Represента la cantidad de mililitros de zumo como a.

La cantidad total de refresco (200 ml) corresponde al 100 %, y la cantidad desconocida de zumo de naranja (a ml) corresponde al 35 % del total de refresco.

Soluciona

Julia

Calculo el valor de la razón, que es igual a dividir el porcentaje entre 100:

Valor de la razón = 35 ÷ 100 = 0.35

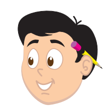
Este número corresponde al valor de la razón a : 200; y como:

antecedente = **consecuente** × **valor de razón**

entonces,

$$a = 200 \times 0.35 = 70$$

R: 70 ml



José

35 % de zumo de naranja significa que, si fuesen 100 ml de refresco entonces 35 ml serían de zumo de naranja. Al aumentar el refresco al doble (200 ml) la cantidad de zumo de naranja también aumenta al doble, o sea, 70 ml.

Compruebo calculando cuánto es (en porcentaje) 70 ml de 200 ml:

Valor de la razón = 70 ÷ 200 = 0.35

Porcentaje = 0.35 × 100 = 35

R: 70 ml

Comprende

En general:

- Calcular el valor correspondiente al porcentaje de una cantidad es equivalente a calcular el antecedente de la razón.
- Cuando se conoce el consecuente y el porcentaje, y se quiere encontrar el antecedente, se pueden seguir los siguientes pasos:
  ① Encontrar el valor de la razón a partir del porcentaje: valor de razón = porcentaje ÷ 100.
  ② Encontrar el antecedente: antecedente = consecuente × valor de razón.

Resuelve

1. Calcula:
   a. 20 % de 80 litros.   b. 90 % de 120 litros.

2. De una sección de 30 alumnos, el 80 % de los estudiantes aprobaron la asignatura de Matemática. ¿Cuántos alumnos aprobaron la materia?

3. En un estacionamiento hay 80 vehículos de los cuales, el 5 % son verdes. ¿Cuántos vehículos verdes hay en el estacionamiento?

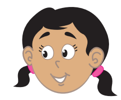
2.5 Cálculo del antecedente usando porcentajes mayores al 100 %

Analiza

Los padres de Marta deben abonar $250 mensuales para la cuota de una casa. Si además se tiene que pagar un 4 % de interés fijo sobre la cuota, ¿cuánto deben pagar cada mes?

Soluciona

El 100 % de la cuota es $250; "4 % sobre la cuota" indica que se agrega el 4 % de $250. Entonces, debo calcular el pago de cada mes, incluyendo el interés sobre la cuota.


Beatriz

① El porcentaje total es: 100 % + 4 % = 104 %

Utilizo lo de la clase anterior:

② Calculo el valor de la razón (porcentaje ÷ 100): 104 ÷ 100 = 1.04

③ Calculo el 104 % de 250 (consecuente × valor de razón): 250 × 1.04 = 260

Los padres de Marta deben pagar cada mes $260, que corresponde a la cuota mensual más el 4 % de interés fijo sobre la cuota.

R: $260 mensuales.

Comprende

En situaciones que involucran incrementos al porcentaje, y se quiere encontrar el antecedente de la razón, se realiza lo siguiente:

① Encontrar el porcentaje total: 100 % + porcentaje de incremento.

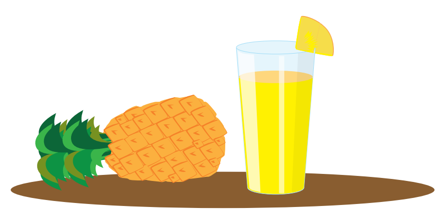
② Calcular el valor de la razón: porcentaje ÷ 100.

③ Calcular el antecedente: antecedente = consecuente × valor de la razón.

Unidad 4

Resuelve

1. Un jugo de piña que normalmente contiene 800 ml está en oferta, con un 20 % más del contenido normal. ¿Cuántos mililitros de jugo contiene cuando está en oferta?



2. Una pequeña imprenta desea comprar un lote de papel que cuesta $720; como desea importarlo desde otro país debe pagar un impuesto del 5 % por derechos arancelarios de importación, adicional al precio original. ¿Cuántos dólares debe pagar la imprenta por el lote de papel, incluyendo los impuestos?

3. En un restaurante se paga el 9 % del consumo en calidad de propina. Si alguien consume $30, ¿cuánto deberá pagar incluyendo la propina?

2.6 Cálculo de precios con IVA

Analiza

El papá de Julia comprará un juego de comedor que cuesta $160 dólares. El vendedor le dijo que este precio no incluye IVA, que es el 13 % del precio original. ¿Cuánto le costará el juego de comedor con el IVA incluido?

Observa que:
- El precio del juego de comedor sin IVA corresponde al 100 %.
- El precio del comedor con IVA incluido corresponde al 113 %.

Soluciona


Antonio

En este caso hay un incremento del 13% al precio del comedor. Aplico los pasos aprendidos en la clase anterior:

① Porcentaje total = 100 % + 13 % = 113 %

② Valor de la razón = 113 ÷ 100 = 1.13

③ Antecedente = 160 × 1.13 = 180.8

R: $180.80


Carmen

Encuentro la cantidad de dinero que pagará de IVA y lo sumo a los $160 (precio original del comedor):

① Cantidad de dinero que corresponde al 13 %:
valor de razón = 13 ÷ 100 = 0.13
antecedente = 160 × 0.13 = 20.8

② Sumo la cantidad correspondiente al IVA ($20.80) al precio original:

160 + 20.8 = 180.8

R: $180.80

Comprende

El Impuesto al Valor Agregado (IVA) es un impuesto que se paga al momento de realizar una compra. En El Salvador, el IVA corresponde al 13 % sobre el precio original, y puede calcularse de dos maneras:

Primera forma:
① Calcular el valor de la razón correspondiente al 113 % (este porcentaje se encontró sumándole al 100 % el 13 % de IVA).
② Calcular el nuevo precio, multiplicando el precio original por el valor de la razón).

Segunda forma:
① Calcular el 13 % del precio original.
② Sumar, al precio original, la cantidad encontrada en el paso ①.

En la primera forma, el valor de la razón correspondiente al 113 % es 1.13; entonces, puedes realizar un solo paso multiplicando el precio original por 1.13.

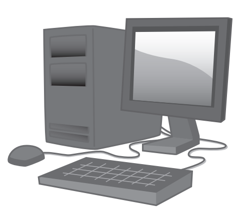
Resuelve

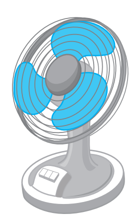
Calcula el precio de los siguientes artículos incluyendo el IVA, utilizando las dos maneras mostradas.

a. Una computadora que cuesta $525.

b. Un ventilador que cuesta $30.

c. Un televisor que cuesta $449.



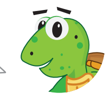


2.7 Cálculo de precios con descuentos

Analiza

María compró una mochila con el 25 % de descuento. Si el precio normal era de $8, ¿cuánto pagó María por la mochila?

El precio, aplicándole el descuento, es igual al 75 % del precio original.



Soluciona


Mario

① Como la mochila tenía el 25 % de descuento, entonces María solo canceló el 100 % – 25 % del precio original, o sea, el 75 %.

② El 75 % corresponde a un valor de razón de 0.75 (75 ÷ 100).

③ Precio a cancelar: $8 \times 0.75 = 6$

R: $6


Ana

① Calculo el 25 % de $8, multiplicando por 0.25 (valor de razón correspondiente al 25 %):

$$8 \times 0.25 = 2$$

② Resto de la cantidad original, el valor correspondiente al descuento:

$$8 - 2 = 6$$

R: $6

Comprende

Para encontrar el precio luego de aplicar descuentos, se pueden realizar dos procedimientos:

Primera forma:

① Calcular el porcentaje del precio con descuento:
100 % – porcentaje de descuento

② Calcular el valor de la razón correspondiente al porcentaje encontrado en ①.

③ Encontrar el precio con descuento, multiplicando el valor de la razón por el precio original.

Segunda forma:

① Calcular el valor de la razón correspondiente al porcentaje de descuento.

② Calcular la cantidad correspondiente al descuento.

③ Restar la cantidad encontrada en ② del precio original.

Resuelve

En la tienda de ropa "LA GANGA" la ropa tiene descuento. Encuentra el precio de las siguientes prendas al aplicarles el descuento que se indica:

a. Vestido para niña
Precio normal: $20
30 % de descuento

b. Suéter para caballero
Precio normal: $15
20 % de descuento

c. Camisa para niño
Precio normal: $5
5 % de descuento

2.8 Cálculo del consecuente usando porcentajes

Recuerda

Julia leyó 200 páginas de un libro en vacaciones. Esta cantidad es 5 veces la cantidad de páginas que leyó José. ¿Cuántas páginas leyó José?

Analiza

Una jirafa de un mes de vida mide 260 cm; esta estatura corresponde al 130 % de su estatura justo al nacer. ¿Cuál fue la estatura de la jirafa inmediatamente después del nacimiento? Representa esta cantidad como b cm.

Observa que:
- La estatura de la jirafa al nacer corresponde al 100 % (consecuente, b cm).
- La estatura de la jirafa después de un mes, la cual es 260 cm, corresponde al 130 % (antecedente).

Soluciona


Carlos

Calculo el valor de la razón, que es igual a dividir el porcentaje entre 100:

valor de la razón = 130 ÷ 100 = 1.3

Este número corresponde al valor de la razón 260 : b; y como:

consecuente = **antecedente** ÷ **valor de razón**

entonces,

b = 260 ÷ 1.3 = 200

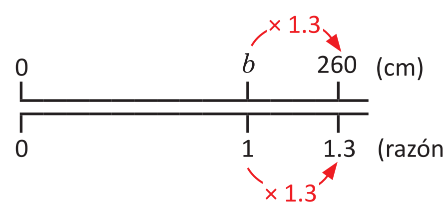
R: 200 cm

¿Sabías que...?

En la gráfica de doble recta numérica, para que la razón aumente de 1 a 1.3, se efectúa 1 × 1.3; entonces, para que los centímetros aumenten de b a 260 debe efectuarse b × 1.3, y:

b × 1.3 = 260

1.3 veces b es igual a 260, por lo que b = 260 ÷ 1.3 = 200



Comprende

Cuando se conoce la cantidad cuyo porcentaje es mayor al 100 % (antecedente) y se desea encontrar la cantidad original (consecuente), se realiza lo siguiente:

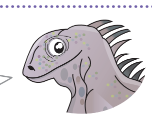
① Calcular el valor de la razón: **valor de la razón** = **porcentaje** ÷ **100**

② Calcular el consecuente, que es la cantidad original: **consecuente** = **antecedente** ÷ **valor de la razón**

Resuelve

1. Un televisor cuesta $678 con IVA incluido. ¿Cuál es el precio del televisor sin incluir el IVA?

Observa que los $678 corresponden al 113 %



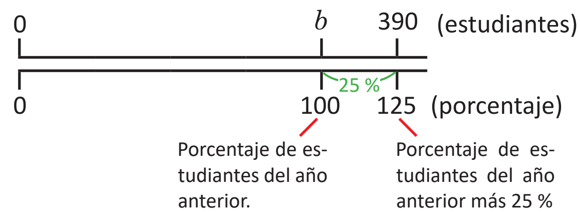
2. Marta pesa 60 kg y esto corresponde al 120 % de lo que pesaba hace un año. ¿Cuánto pesaba Marta hace un año?

2.9 Cálculo del porcentaje y del consecuente

Analiza

Este año en la escuela de Ana hay 390 estudiantes. Si esta cantidad es 25 % más que la cantidad de estudiantes del año anterior, ¿cuántos estudiantes habían el año pasado? Represente el número de estudiantes del año pasado como b.

Observa el siguiente gráfico:



Soluciona


Julia

"25 % más que la cantidad de estudiantes del año pasado" indica que el número de estudiantes del año pasado (b estudiantes) representa el 100 %. En este año hay 100 % + 25 % = 125 % de estudiantes respecto al año pasado.

Los 390 estudiantes de este año corresponden al 125 %, y el valor de la razón 390 : b es igual a:

$$125 \div 100 = 1.25$$

Aplico lo visto en la clase anterior, **consecuente** = **antecedente** ÷ **valor de la razón**:

$$b = 390 \div 1.25 = 312$$

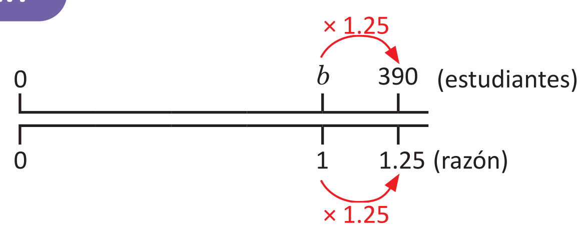
R: 312 estudiantes.

¿Sabías que...?

Para que la razón aumente de 1 a 1.25, se efectúa 1 × 1.25; entonces, para que la cantidad de estudiantes aumente de b a 390 debe efectuarse b × 1.25, y:

$$b \times 1.25 = 390$$

1.25 veces b es igual a 390, por lo que $b = 390 \div 1.25 = 312$



Comprende

En los problemas donde el porcentaje aumenta, se conoce la cantidad correspondiente a ese aumento (antecedente) y se desconoce la cantidad original (consecuente), se realiza lo siguiente:

① Encontrar el porcentaje total correspondiente al aumento: 100 % + porcentaje de aumento.
② Calcular el valor de la razón: porcentaje total ÷ 100
③ Calcular la cantidad original (consecuente): **consecuente** = **antecedente** ÷ **valor de la razón**

Resuelve

1. La estatura de José es 156 cm, 20 % más que la estatura de su hermana Julia. ¿Cuál es la estatura de Julia en centímetros?

2. Después de recibir un aumento del 10 % a su salario anterior, el salario de don Juan es $440. ¿Cuál era el salario anterior?

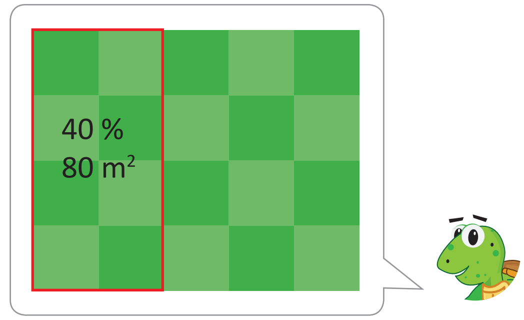
3. Un perrito pesa 168 g una semana después de haber nacido, esta cantidad es un 60 % más, que el peso del perrito al nacer. ¿Cuántos gramos pesaba al nacer?

Unidad 4

2.10 Cálculo del consecuente usando porcentajes menores al 100 %

Analiza

El propietario de un terreno decide venderlo en parcelas para obtener mayores ganancias. Hasta el momento ha vendido una parcela de 80 m^2, que representa el 40 % del total del terreno. ¿Cuál es el área total del terreno? Representa el área total como b m^2.



Soluciona


José

El valor de la razón 80 : b es igual a:

$$40 \div 100 = 0.4$$

Para calcular la cantidad b utilizo:

consecuente = antecedente ÷ valor de la razón

$$b = 80 \div 0.4 = 200$$

R: 200 m^2

Recuerda que el antecedente puede ser mayor que el consecuente.


Carmen

El área total (b m^2) representa al 100 %. Como 100 % = 40 % + 40 % + 20 %, entonces puedo encontrar b sumando las áreas correspondientes al 40 % y 20 %.

- 40 % → 80 m^2
- 20 % → 40 m^2 (es la mitad de lo que representa el 40 %)

$$b = 80 + 80 + 40 = 200$$

R: 200 m^2

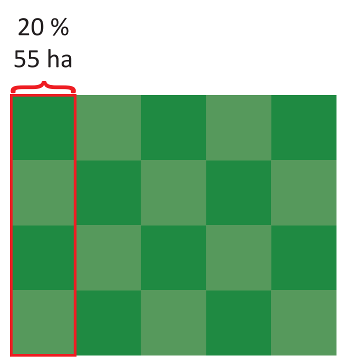
Comprende

Aunque el porcentaje sea menor al 100 %, el consecuente siempre se calcula con la fórmula:

consecuente = antecedente ÷ valor de la razón

Resuelve

1. Un agricultor planta 55 ha de maíz que representan el 20 % de su terreno. ¿De cuántas hectáreas es el terreno?



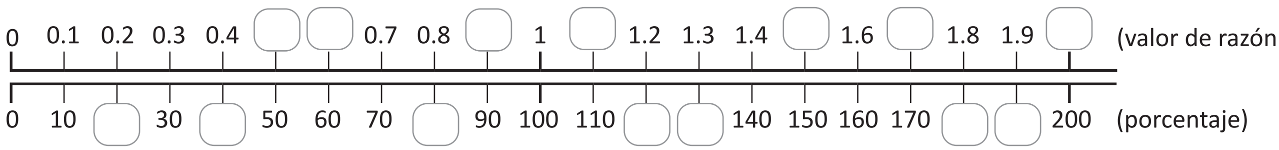
2. Una señora ahorra $56, que representa el 10 % de su salario mensual. ¿De cuánto es su salario mensual?

2.11 Practica lo aprendido

1. En el examen de Matemática, Marta acertó en 8 de un total de 10 preguntas. ¿Cuál es el porcentaje de respuestas correctas?

2. En una sala del cine, se ocupan 42 butacas de las 120 disponibles. ¿Cuál es el porcentaje de butacas ocupadas?

3. Completa los valores de razón y porcentajes faltantes:



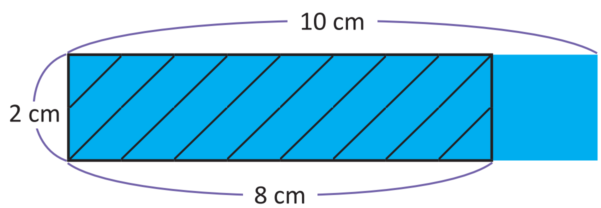
4. Un balneario atendió a 250 personas el 5 de agosto, y a 300 personas el 6 de agosto.
   a. Calcula el valor de la razón entre la cantidad de personas que atendieron el 6 de agosto y las que atendieron el 5.
   b. ¿Cuál es el porcentaje de personas que asistieron el 6 respecto a las que asistieron el 5?

5. En el vivero de don Juan hay 420 plantas de las cuales, el 25 % son rosas. ¿Cuántas rosas hay en el vivero?

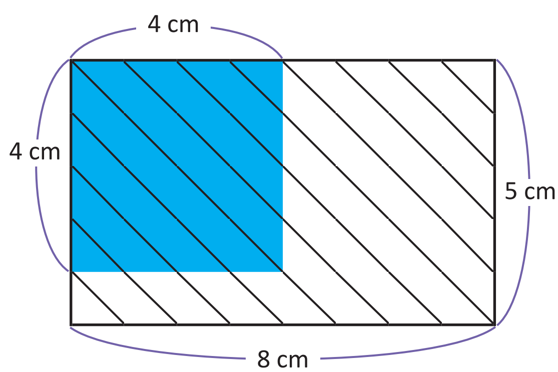
6. Mientras espera la descarga de una carpeta de fotografías en su computadora, Juan observa que hasta el momento, se ha descargado el 30 % de 50 megabytes. ¿Cuántos megabytes se han descargado hasta ese momento?

★Desafíate

1. Calcula el porcentaje que representa el área del rectángulo sombreado con líneas, respecto al área del rectángulo de color azul.



2. Calcula el porcentaje que representa el área del rectángulo sombreado con líneas, respecto al área del cuadrado de color azul.



2.12 Practica lo aprendido

1. Un oso pardo (que vive en las montañas de Cantabria, España) al cabo de unos meses de nacer alcanza el 150 % de su peso inicial. Se sabe que el peso al nacer de ese tipo de osos es de 350 gramos, aproximadamente. ¿A cuántos gramos equivale el 150 % de su peso?

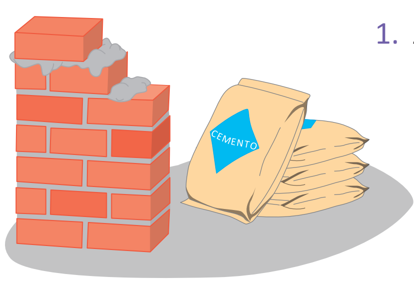
2. Una camisa que cuesta $40 está en oferta con el 15 % de descuento. ¿Cuántos dólares cuesta la camisa al aplicarle el descuento?

3. Al final del año, Juan logró ahorrar $70 y esto representa un 140 % de lo planificado. ¿Cuántos dólares había planificado ahorrar?

4. Ana vendió un televisor a $240, esta cantidad es un 20 % más que el precio por el cual ella adquirió el televisor. ¿Cuántos dólares pagó Ana al adquirir el televisor?

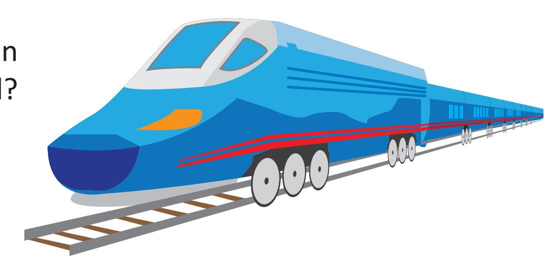
5. Cuando un oso grizzly (subespecie del oso pardo que habita en Norteamérica) hiberna, su frecuencia cardíaca desciende a 10 latidos por minuto, que es un 20 % de su valor normal. ¿Cuál es la frecuencia cardíaca normal del oso grizzly?

Desafíate



1. Antonio está construyendo un muro para el cual necesita 8 bolsas de cemento. Si cada bolsa cuesta $5 sin IVA, ¿cuánto deberá pagar por las 8 bolsas después de agregar el 13 % de IVA?

2. Un tren ha cubierto el 65 % de su recorrido. Si aún le quedan 70 km de viaje, ¿de cuántos kilómetros es el recorrido total?



Unidad 5

Proporcionalidad

En esta unidad aprenderás a

- Identificar si dos razones forman una proporción
- Aplicar las propiedades de las proporciones para encontrar razones equivalentes
- Encontrar la cantidad desconocida en una proporción
- Identificar cantidades directamente proporcionales
- Identificar cantidades inversamente proporcionales

1.1 Variación de cantidades para obtener la misma razón

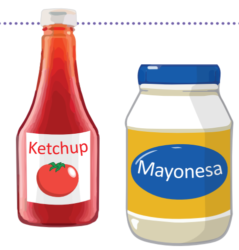
Recuerda

Completa escribiendo la razón y el valor de razón según el siguiente el ejemplo:

Situación	Razón ($a : b$)	Valor de razón
1. Juan mezcló 6 cucharadas de café y 2 de azúcar. ¿Cuál es la razón entre café y azúcar?	6 : 2	$\frac{6}{2} = 3$
2. De 5 tiros libres Juan logra anotar 3 goles. ¿Cuál es la razón entre tiros libres y goles?		
3. En un salón hay 10 niñas y 13 niños. ¿Cuál es la razón entre niñas y niños?		

Analiza

Según la receta de María, para aderezar un tazón de ensalada con salsa rosada se deben mezclar 2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa. ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se deben mezclar para obtener el mismo sabor, si se utilizan 6 cucharadas de ketchup? Representa la cantidad de cucharadas de mayonesa como x.



Soluciona


Ana

Represento en una tabla la cantidad de cucharadas de cada ingrediente relacionadas con la cantidad de tazones de ensalada que se pueden aderezar:

Para aderezar 1 tazón:

Ketchup		Mayonesa	
2			3

2 cucharadas de ketchup y 3 cucharadas de mayonesa.

× 2   × 2

Para aderezar 2 tazones:

Ketchup		Mayonesa	
4			6

4 cucharadas de ketchup y 6 cucharadas de mayonesa.

× 3   × 3

Para aderezar 3 tazones:

Ketchup		Mayonesa	
6			x

6 cucharadas de ketchup y x cucharadas de mayonesa.

Ketchup: 6 cucharadas son 3 veces 2 cucharadas.
Mayonesa: 9 cucharadas son 3 veces 3 cucharadas. Es decir que $x = 9$.
R: Se necesitan 9 cucharadas de mayonesa.

Comprende

Cuando se tiene una razón entre dos cantidades $a : b$, la cual se quiere mantener para conservar el mismo sabor, tono, consistencia etc., se pueden aumentar los números a y b en la misma cantidad de veces hasta encontrar las cantidades que se necesitan.

Ejemplo: ¿Cuántas cucharadas de mayonesa se necesitan si se utilizan 10 cucharadas de ketchup?

Recuerda que, en una razón $a : b$, a la cantidad a se le llama antecedente y a la cantidad b se le llama consecuente.

	Ketchup	Mayonesa	
	2 cucharadas	3 cucharadas	
× 5	10 cucharadas	x cucharadas	× 5

En 10 cucharadas de ketchup hay 5 veces 2 cucharadas. Entonces de mayonesa son 5 veces 3 cucharadas, es decir, $x = 15$.

R: 15 cucharadas.

Resuelve

1. En cada literal, encuentra la cantidad x para que la receta tenga el mismo sabor.

a.

	Chocolate	Leche	
	3 tazas	2 tazas	
× ☐	12 tazas	x tazas	× ☐

b.

	Café	Leche	
	2 tazas	1 taza	
× ☐	x tazas	7 tazas	× ☐

c.

	Agua	Jugo de limón	
	7 vasos	2 vasos	
× ☐	14 vasos	x vasos	× ☐

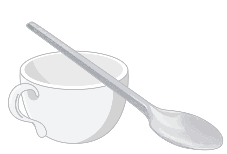
d.

	Ketchup	Mayonesa	
	2 cucharadas	5 cucharadas	
× ☐	x cucharadas	15 cucharadas	× ☐

2. Cierta receta indica que la relación entre las tazas de agua y harina es 1 : 3
   a. Por 6 tazas de agua, ¿cuántas tazas de harina se deben utilizar?
   b. Por 15 tazas de harina, ¿cuántas tazas de agua se deben utilizar?

Desafíate

Para preparar café con leche el abuelo José dice: "por cada 2 tazas de café hay que agregar 1 taza de leche y 3 cucharadas de azúcar". Para preparar café con leche con el mismo sabor utilizando 8 tazas de café, ¿cuántas tazas de leche y cuántas cucharadas de azúcar se deben mezclar?




Unidad 5

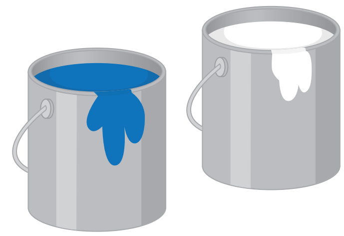
1.2 Razones equivalentes y proporciones

Analiza

Ana y Carlos mezclaron pintura azul y blanca para obtener un tono celeste. Ana utilizó 3 botes de pintura azul y 4 botes de pintura blanca; mientras que Carlos utilizó 6 botes de pintura azul y 8 botes de pintura blanca.

a. Encuentra el valor de razón entre los botes de pintura azul y blanca que utilizó cada uno.

b. ¿Obtuvieron el mismo tono de celeste?



Soluciona

a. La razón entre las cantidades de botes de pintura azul y blanca para el caso de Ana es 3 : 4, mientras que para Carlos es 6 : 8. Al calcular los valores de las razones obtengo:

$$\text{Ana} \longrightarrow \frac{3}{4} \qquad \text{Carlos} \longrightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{3}{4}$$


José

R: El valor de la razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75).

b. Sí, obtuvieron el mismo tono de celeste, porque en cada caso se obtuvo el mismo valor de razón $\frac{3}{4}$.

Comprende

- Cuando dos razones tienen el mismo valor de la razón se les llama **razones equivalentes**.
- A la igualdad entre dos razones equivalentes se le llama **proporción**. Es decir, si la razón $a : b$ es equivalente a la razón $c : d$ entonces la proporción se escribe:

$$\boldsymbol{a : b = c : d}$$

y se lee "a es a b como c es a d"; a, b, c y d representan cualquier número.

Por ejemplo, las razones 3 : 4 y 6 : 8 son equivalentes porque su valor de razón es $\frac{3}{4}$ (o 0.75). Puede escribirse la proporción 3 : 4 = 6 : 8.

¿Sabías que...?

Una proporción también puede escribirse utilizando el símbolo "::" en lugar del símbolo "=". Así, 3 : 4 :: 6 : 8 representa una proporción.

Resuelve

1. ¿Son equivalentes las razones dadas en cada literal? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.

   a. 2 : 3 y 6 : 9   b. 16 : 12 y 4 : 3   c. 4 : 5 y 8 : 15

2. Carlos y Daniel prepararon salsa rosada. Escribe la razón de ketchup y mayonesa de cada una de las recetas y explica si tienen el mismo sabor.

Carlos	
Ketchup	Mayonesa
4 cucharadas	6 cucharadas

Daniel	
Ketchup	Mayonesa
6 cucharadas	9 cucharadas

3. Para preparar charamuscas de café con leche, la mamá de Beatriz utiliza 4 vasos de café y 3 vasos de leche.

   a. Encuentra el valor de la razón de café y leche.

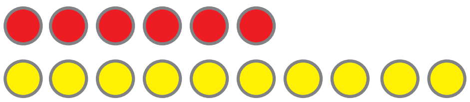
   b. Beatriz decidió preparar charamuscas y mezcló 12 vasos de café con 9 vasos de leche. ¿El sabor de estas charamuscas será el mismo de las que prepara su mamá?

1.3 Razón equivalente más simple

Analiza

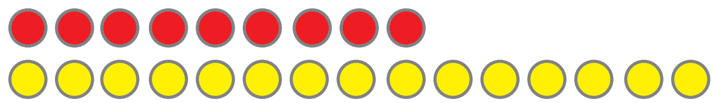
Carlos hizo una mezcla con 6 botes de pintura roja y 10 botes de pintura amarilla, y Beatriz con 9 botes de pintura roja y 15 botes de pintura amarilla. ¿Obtuvieron el mismo tono de anaranjado?

Carlos



6 : 10

Beatriz



9 : 15

Soluciona

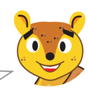
Será el mismo tono de anaranjado si las razones son equivalentes. Calculo el valor de la razón para cada caso:

Carlos → $\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{10}_{\,5}} = \frac{3}{5}$ Beatriz → $\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{15}_{\,5}} = \frac{3}{5}$

Entonces, las razones son equivalentes, es decir, 6 : 10 = 9 : 15.

R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Esto significa que por cada 3 botes de pintura roja se utilizan 5 botes de pintura amarilla.



Calculo el valor de la razón en ambos casos:

Carlos → 6 ÷ 10 = 0.6

Beatriz → 9 ÷ 15 = 0.6

Como el valor de la razón es el mismo, son razones equivalentes, 6 : 10 = 9 : 15

R: Carlos y Beatriz obtienen el mismo tono de anaranjado.

Comprende

Encontrar una razón equivalente con números menores es **simplificar el valor de la razón**; cuando se obtiene la razón equivalente con los números naturales menores posibles se obtiene la **razón equivalente más simple** o **simplificada**.

Por ejemplo, para las razones 6 : 10 y 9 : 15, su razón equivalente más simple es 3 : 5, pues si se simplifican los valores de las razones $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{15}$ se obtiene $\frac{3}{5}$, que corresponde a la razón 3 : 5

¿Qué pasaría?

Para calcular la razón equivalente más simple de 12: 30, se simplifica el valor de la razón hasta su mínima expresión:

$$\frac{\cancel{12}^{\,\cancel{6}^{\,2}}}{\cancel{30}_{\,\cancel{15}_{\,5}}} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la razón equivalente más simple de 12 : 30 es 2 : 5

Resuelve

1. Para cada razón, encuentra la razón equivalente más simple.
   a. 6 : 4 b. 16 : 20 c. 30 : 18 d. 10 : 35 e. 12 : 8

2. Juan y Ana quieren saber quién de ellos hace más goles al cobrar tiros libres. Juan hizo 14 tiros libres y de estos 6 fueron goles, y Ana logró 9 goles de 21 tiros libres. ¿Quién hace más goles?

1.4 Proporciones que incluyen números decimales

Analiza

Juan quiere preparar una receta de pan dulce y otra de atol, por lo que utiliza las siguientes recetas:

Receta A
0.5 libras de azúcar
0.6 libras de harina

Receta B
2.4 cucharadas de canela molida
3 cucharadas de maicena

Juan quiere obtener el mismo sabor pero solo puede medir libras y cucharadas completas. ¿Qué cantidades debe usar para preparar las recetas?

Soluciona


Julia

En la receta A, la razón entre libras de azúcar y libras de harina es 0.5 : 0.6

Para mantener el mismo sabor puedo aumentar el antecedente y el consecuente en la misma cantidad de veces (¡esto lo ví en la primera clase!).

Multiplico el antecedente y consecuente por 10

$$\begin{aligned} 0.5 : 0.6 &= (0.5 \times 10) : (0.6 \times 10) \\ &= 5 : 6 \end{aligned}$$

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta A utilizando 5 libras de azúcar y 6 libras de harina.

En la receta B, la razón entre cucharadas de canela y cucharadas de maicena es 2.4 : 3

Como en la receta A, multiplico el antecedente y consecuente por 10

$$\begin{aligned} 2.4 : 3 &= (2.4 \times 10) : (3 \times 10) \\ &= 24 : 30 \end{aligned}$$

La razón equivalente más simple de 24 : 30 es 4 : 5

R: Juan puede obtener el mismo sabor de la receta B utilizando 4 cucharadas de canela y 5 cucharadas de maicena.

Juan obtendrá el mismo sabor, lo que cambiará es la cantidad de porciones de pan y de atol para los cuales se preparará la receta; por lo que obtendrá más porciones.

Comprende

Una razón expresada con números decimales, se puede convertir en una razón equivalente con números naturales. Cuando los números solo tienen una cifra decimal se realiza lo siguiente:

① Multiplicar el antecedente y el consecuente por 10, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
② Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en ①, si es posible.

Resuelve

1. Encuentra la razón equivalente más simplificada donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.
   a. 0.4 : 0.9   b. 0.9 : 1.5   c. 1.5 : 3   d. 2 : 3.5

2. Encuentra una razón equivalente donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.
   a. 0.56 : 0.31   b. 1.25 : 6

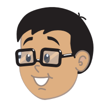
1.5 Proporciones que incluyen fracciones

Analiza

Una receta para elaborar crema de mantequilla para postres utiliza $\frac{6}{5}$ taza de mantequilla y $\frac{1}{2}$ onzas de queso crema.

a. Expresa la razón entre la cantidad de tazas de mantequilla y onzas de queso crema.
b. Si solo se tienen depósitos que pueden medir tazas y onzas completas, ¿cuántas tazas de mantequilla y queso crema se deben utilizar para mantener el mismo sabor?

Soluciona


Carlos

a. La razón entre las cantidades de mantequilla y queso crema es: $\frac{6}{5} : \frac{1}{2}$

b. Para conservar el sabor puedo aumentar el antecedente y el consecuente en la misma cantidad de veces y obtener tazas y onzas completas.

Multiplico el antecedente y el consecuente por el mcm de 5 y 2, que es 10.

$$\frac{6}{5} : \frac{1}{2} = \left(\frac{6}{\cancel{5}_{1}} \times \cancel{10}^{2}\right) : \left(\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times \cancel{10}^{5}\right)$$
$$= (6 \times 2) : (1 \times 5)$$
$$= 12 : 5$$

R: Se deben utilizar 12 tazas de mantequilla y 5 onzas de queso crema.

Comprende

Una razón expresada con fracciones se puede convertir en una razón equivalente con números naturales siguiendo los pasos:

1. Multiplicar el antecedente y el consecuente por el mcm de los denominadores, para encontrar una razón equivalente con números naturales.
2. Encontrar la razón equivalente más simple de la razón obtenida en 1, si es posible.

Resuelve

Encuentra la razón equivalente más simple, donde el antecedente y el consecuente sean números naturales.

a. $\frac{1}{7} : \frac{3}{4}$ b. $\frac{4}{5} : \frac{7}{5}$ c. $\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$ d. $\frac{2}{3} : \frac{5}{3}$

e. $\frac{3}{4} : \frac{9}{4}$ f. $\frac{2}{7} : \frac{4}{7}$ g. $\frac{3}{7} : 4$ h. $2 : \frac{4}{5}$

Recuerda que un número natural puede convertirse en fracción con el denominador 1, por ejemplo, $3 = \frac{3}{1}$.

Desafíate

Miguel preparó su café con una razón entre azúcar y café $\frac{2}{5} : \frac{4}{3}$; Carmen preparó su café a una razón de $\frac{1}{2} : \frac{5}{3}$, ¿obtuvieron ambos el mismo sabor del café?

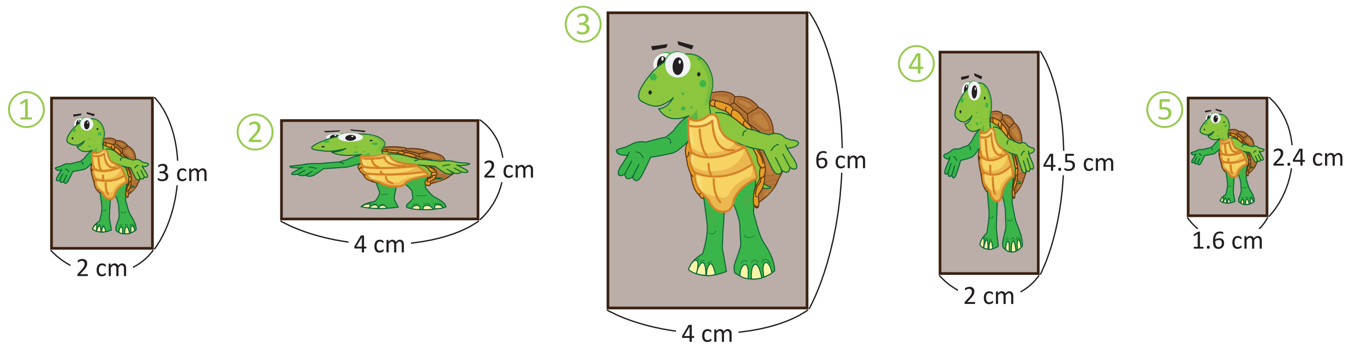
1.6 Relación de aspecto

Analiza

Observa las siguientes fotografías:

a. Para cada una encuentra el valor de la razón entre las medidas de la base y la altura, después simplifícalas.

b. Encuentra en cuáles de las fotografías la imagen se ve de la misma forma y contesta, ¿qué relación hay entre el valor de razón de estas fotografías?



Soluciona

a. Calculo los valores de las razones en cada caso:

Fotografía	Base (cm)	Altura (cm)	Valor de razón
1	2	3	$\frac{2}{3}$
2	4	2	$\frac{4}{2} = 2$
3	4	6	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
4	2	4.5	$\frac{20}{45} = \frac{4}{9}$
5	1.6	2.4	$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

b. Las imágenes se ven de la misma forma en 1, 3 y 5. El valor de la razón entre las medidas de la base y la altura de estas fotografías es igual a $\frac{2}{3}$ lo que significa que la base es $\frac{2}{3}$ veces la altura.

Puedo escribir las relaciones en forma de proporción:

1 y 3 ⟶ 2 : 3 = 4 : 6
1 y 5 ⟶ 2 : 3 = 1.6 : 2.4
3 y 5 ⟶ 4 : 6 = 1.6 : 2.4

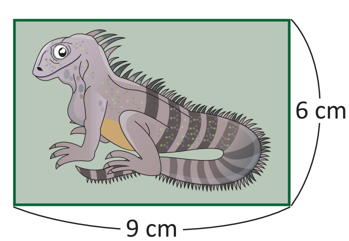
Comprende

Se llama **relación de aspecto de una imagen** a la razón entre las medidas de su base y su altura. Dos imágenes tienen **la misma forma** si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

Aunque las dimensiones en los televisores sean distintas, la imagen se ve igual ya que la relación de aspecto es la misma. En televisiones tradicionales, la relación de aspecto es 4 : 3, y en los panorámicos es 16 : 9

Resuelve

Carlos quiere imprimir la siguiente fotografía con otras dimensiones, manteniendo la misma forma. ¿Cuál o cuáles de los siguientes tamaños se pueden elegir?



a. Base 18 cm, altura 12 cm

b. Base $\frac{1}{2}$ cm, altura $\frac{1}{3}$ cm

c. Base 20 cm, altura 16 cm

d. Base 1.8 cm, altura 1.2 cm

1.7 Propiedad de las proporciones

Analiza

En cada caso, encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $3 : 5 = 24 : x$ b. $6 : 12 = 2 : x$

Recuerda que en las proporciones, las razones son equivalentes.

Soluciona

a. En la primera clase aprendí que el antecedente y consecuente de una razón pueden aumentarse la misma cantidad de veces para conservar la razón:

Mario

	Antecedente	Consecuente	
	3	5	
× 8	24	x	× 8

Como el antecedente aumentó 8 veces, el consecuente también debe aumentar 8 veces. Así:

$$x = 5 \times 8 = 40$$

R: 40

b. En $6 : 12 = 2 : x$ observo que $6 \times \frac{1}{3} = 2$. Entonces, 6 aumentó $\frac{1}{3}$ veces para obtener 2 y, por lo tanto, 12 también debe aumentar $\frac{1}{3}$ veces:

$$x = \overset{4}{\cancel{12}} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 4$$

R: 4

Comprende

Cuando el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por el mismo número se obtiene una razón equivalente, y por tanto, una proporción.

Resuelve

1. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $1 : 5 = 5 : x$ b. $6 : 2 = 3 : x$ c. $3 : 1 = 30 : x$

d. $8 : 16 = 1 : x$ e. $12 : 15 = 24 : x$ f. $20 : 35 = 4 : x$

2. Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $5 : 2 = x : 6$ b. $18 : 8 = x : 4$ c. $11 : 13 = x : 130$

Desafíate

Dos números se encuentran a una razón 1 : 4; si uno de ellos es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?

1.8 Proporciones con un dato desconocido

Analiza

Para preparar galletas de chocolate, la razón entre la cantidad de harina y chocolate (en gramos) es 5 : 3 Si Beatriz utiliza un paquete de 150 g de harina, ¿cuántos gramos de chocolate debe utilizar? Representa esta cantidad como x gramos.

Soluciona


Carmen

La razón 5 : 3 significa que, por cada 5 gramos de harina se necesitan 3 gramos de chocolate. Coloco los datos en una tabla:

Harina (g)	Chocolate (g)
5	3
150	x

× 30 × 30

Para mantener el sabor, 5 : 3 = 150 : x; observo que los 5 g de harina aumentaron 30 veces para obtener 150 g (5 × 30 = 150). Entonces:

$$x = 3 \times 30$$
$$x = 90$$

R: 90 gramos.


Antonio

El valor de la razón de 5 : 3 es $\frac{5}{3}$. Como debe conservarse el sabor, este valor de razón debe ser el mismo para la razón 150 : x

Utilizo la relación:

consecuente = antecedente ÷ valor de razón

$$x = 150 \div \frac{5}{3}$$
$$x = \overset{30}{\cancel{150}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{5}}}$$
$$x = 30 \times 3$$
$$x = 90$$

R: 90 gramos.

La ventaja del primer procedimiento es que no necesitas identificar antecedente o consecuente, o calcular el valor de la razón. Pero recuerda que debes mantener la correspondencia entre harina y chocolate.

Comprende

Para encontrar un dato desconocido en una proporción se puede utilizar la propiedad de las proporciones, identificando la cantidad de veces que se ha aumentado uno de los datos.

Resuelve

Encuentra el valor de la cantidad que hace falta.

a.

Harina (g)	Chocolate (g)
3	2
120	x

b.

Harina (g)	Chocolate (g)
14	10
140	x

c.

Harina (g)	Chocolate (g)
7	3
x	120

d.

Harina (g)	Chocolate (g)
50	40
x	200

Desafíate

Las dimensiones de la bandera salvadoreña son 3.25 m de largo por 1.89 m de ancho. Si Ana elabora una versión más pequeña con 1 m de largo, ¿cuánto debe medir el ancho?

1.9 Propiedad fundamental de las proporciones

Recuerda

Encuentra el valor del número x para que se forme una proporción.

a. $4 : 9 = 20 : x$ b. $11 : 10 = x : 100$

Analiza

Usando la proporción $6 : 10 = 9 : 15$, realiza lo siguiente:

a. Multiplica el antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda.
b. Multiplica el consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.
c. ¿Cómo son los resultados de a. y b.? ¿Qué puedes concluir sobre las proporciones?

Soluciona

a. El antecedente de la primera razón es 6 y el consecuente de la segunda razón es 15. Efectuando la multiplicación obtengo:

$$6 \times 15 = 90$$

b. El consecuente de la primera razón es 10 y el antecedente de la segunda razón es 9. Realizando la multiplicación obtengo:

$$10 \times 9 = 90$$

c. Observo que: ¡los resultados de a. y b. son iguales!
Esto quiere decir que en una proporción el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda.

Comprende

Propiedad fundamental de las proporciones
En una proporción, el producto del antecedente de la primera razón por el consecuente de la segunda es igual al producto del consecuente de la primera razón por el antecedente de la segunda. Es decir, para la proporción $a : b = c : d$ se cumple

$$a \times d = b \times c$$

a, b, c y d representan cualquier número.

¿Sabías que...?

En una proporción $a : b = c : d$, a los números a y d también se les conoce como "extremos" y, a b y c como "medios". Entonces, la propiedad de las proporciones indica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, refiriéndose a que $a \times d = b \times c$.

Resuelve

Comprueba la propiedad fundamental de las proporciones en los siguientes casos.

a. $2 : 3 = 6 : 9$ b. $5 : 3 = 20 : 12$ c. $4 : 6 = 8 : 12$ d. $10 : 8 = 30 : 24$

Desafíate

Encuentra el valor de c para que se forme una proporción.

$$25 : 50 = c : 10$$

Unidad 5

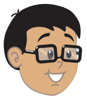
1.10 Resolución de problemas aplicando proporciones

Analiza

En una rifa, por cada 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados. Si se reduce la cantidad de papeles no premiados a 30, ¿cuántos papeles premiados deben colocarse?

Soluciona

Si al colocar 60 papeles premiados se colocan 100 no premiados, entonces la razón es 60 : 100. Escribo los datos en una tabla (x representará la cantidad desconocida).


Carlos

Cantidad de premiados	Cantidad de no premiados
60	100
x	30

Como debe mantenerse la razón, entonces 60 : 100 = x : 30. En esta ocasión, no es fácil identificar por cuánto debe multiplicarse 100 para obtener 30, entonces uso la propiedad de las proporciones.

$$60 \times 30 = 100 \times x$$
$$1,800 = 100 \times x$$

Esto quiere decir que 100 veces x es igual a 1, 800. Por lo tanto,

$$x = 1,800 \div 100 = 18$$

R: 18 papeles premiados.

Comprende

Para resolver problemas de proporciones donde se desconoce algún dato y no es fácil identificar la cantidad de veces que aumenta una de las cantidades, se puede utilizar la propiedad fundamental de las proporciones.

Resuelve

1. Para elaborar una receta de salsa agridulce se utilizaron 20 ml de salsa inglesa y 30 ml de salsa de tomate. Si ahora se utilizarán 50 mililitros de salsa inglesa, ¿cuántos mililitros de salsa de tomate deben usarse para mantener el mismo sabor?

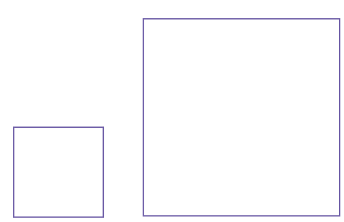
2. Una fotografía mide 10 cm de base y 15 cm de altura. Si se amplía para que la base sea 12 cm, ¿cuánto medirá la altura?

Recuerda que dos imágenes tienen la misma forma si sus relaciones de aspecto forman una proporción.

3. Según un estudio, 500 ml de leche entera aportan 290 calorías. Si una persona consume 200 ml de leche entera, ¿cuántas calorías aporta esta cantidad?

Desafíate

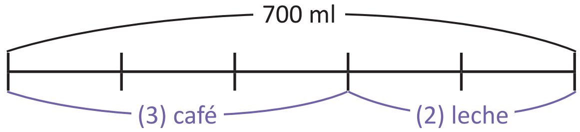
Las longitudes de los lados de dos cuadrados es 2 : 5, si el perímetro de uno de ellos es 24 cm, ¿cuál es la longitud del lado del otro cuadrado?



1.11 Reparto proporcional

Analiza

Antonio quiere preparar 700 ml de café con leche. Si la razón entre las cantidades de mililitros de café y leche debe ser 3 : 2, ¿cuántos mililitros de café necesita?

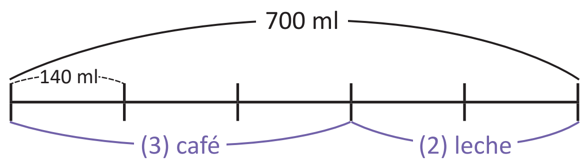


La razón 3 : 2 significa que por cada 3 ml de café se usan 2 ml de leche. El segmento representa el total (700 ml), se divide en 5 partes iguales donde tres de ellas representan los mililitros de café y las dos restantes los mililitros de leche.

Soluciona

El total de partes son 5, y representan 700 ml. Entonces, cada parte representa 700 ÷ 5 = 140 mililitros.


Ana



Como lo que corresponde al café tiene 3 partes entonces la cantidad de mililitros de café necesarios son:

$$140 \times 3 = 420$$

R: 420 ml

La cantidad de leche utilizada sería 700 – 420 = 280 mililitros. Entonces la razón entre café y leche es 420 : 280, y su equivalente más simple 3 : 2

Comprende

Para resolver problemas donde una cantidad debe repartirse en una razón determinada $a : b$, se puede utilizar un segmento dividido en $a + b$ partes iguales, encontrar el valor que representa cada parte y encontrar, ya sea a o b.

Resuelve

1. Doña María tiene un terreno de 300 m^2 de área. Ella quiere sembrar maíz y maicillo de manera que, la razón entre el área de maíz y maicillo sea 2 : 1; ¿cuántos metros cuadrados medirá el área para la siembra de maíz?

2. La razón entre la cantidad de niñas y niños en un salón es 5 : 3; si en total hay 32 alumnos, ¿cuántas niñas hay en el salón?

3. Para una rifa se han colocado 120 papelitos en una caja. Si la razón entre papeles premiados y no premiados es 1 : 7, ¿cuántos papeles no premiados hay en la caja?

Desafíate

1. María y Luis invirtieron dinero para la venta de yuca frita; María aportó $16 y Luis aportó $14. El dinero recolectado después de la venta fue de $60 y quieren repartirlo proporcionalmente según lo aportado. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

2. La razón entre la cantidad de dulces de Juan y Ana es 3 : 5 y la diferencia entre las cantidades es 8 dulces. ¿Cuántos dulces tiene cada uno?

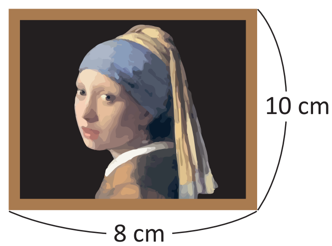
1.12 Practica lo aprendido

1. ¿Son equivalentes las razones dadas? En caso de serlo, escríbelas en forma de proporción.
   a. 2 : 5 y 8 : 20
   b. 4 : 5 y 16 : 30

2. Encuentra la razón equivalente más simple de 30 : 50

3. Encuentra razones equivalentes a las siguientes, que involucren únicamente números naturales.
   a. 0.6 : 0.3
   b. $\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$

4. ¿Cuáles de las siguientes dimensiones se pueden utilizar para imprimir la siguiente fotografía y conservar la forma de ella?
   a. Base 4 cm, altura 5 cm.
   b. Base 16 cm, altura 30 cm.



5. Encuentra el número x para que se forme una proporción.
   a. 2 : 5 = 12 : x
   b. 10 : 6 = 15 : x

1.13 Practica lo aprendido

1. Doña Beatriz es la dueña de una pupusería; considera que la razón entre la cantidad (en libras) de harina y queso es 5 : 3; si para vender pupusas el sábado en la tarde comprará 9 libras de queso, ¿cuántas libras de harina necesita?

2. En una rifa, el organizador quiere que la razón entre papelitos premiados y no premiados sea 2 : 7; si se colocan 16 papelitos premiados, ¿cuántos papelitos no premiados se deben colocar?

3. Juan y Marta observan que doña Julia utiliza 9 cucharadas de azúcar y 21 cucharadas de harina para preparar atol de maíz tostado. Analiza el comentario de cada uno y explica si es falso o verdadero.

   Juan: se obtiene el mismo sabor si se utilizan 12 cucharadas de azúcar y 28 cucharadas de harina.
   Marta: se obtiene el mismo sabor si se utilizan 15 cucharadas de azúcar y 30 cucharadas de harina.

4. Don Juan quiere preparar 120 libras de mezcla para pegar ladrillos, manteniendo una razón entre las cantidades (en libras) de cemento y arena de 1 : 3. ¿Qué cantidades de cemento y arena debe usar?

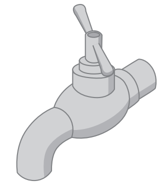
Desafíate

Don Miguel quiere repartir $100 entre sus tres hijos, quienes tienen las edades de 10, 15 y 25 años. Si el dinero lo repartirá proporcionalmente a las edades de sus hijos, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

2.1 Relación de proporcionalidad directa

Analiza

Antonio abre un chorro y vierte agua en un recipiente; toma nota de la altura del agua al pasar 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, etc., y escribe los datos en una tabla.



Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

a. Partiendo de 1 minuto, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica o triplica?
b. Partiendo de 2 minutos, ¿qué sucede con la altura, si el tiempo se duplica?
c. De acuerdo a los datos en la tabla, ¿cuál sería la altura del agua al pasar 5 minutos?

Soluciona


José

a. Usando la tabla, me ubico en la columna con tiempo 1 min y altura 5 cm. Duplicar o triplicar el tiempo significa efectuar 1 × 2 = 2 o 1 × 3 = 3. Observo que, si el tiempo se duplica o triplica, ¡la altura también se duplica o triplica!

× 3
× 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2
× 3

b. Duplicar el tiempo a partir de 2 min significa efectuar 2 × 2 = 4. Observo que, si el tiempo se duplica a 4 minutos entonces la altura se duplica a 20 minutos.

× 2

Tiempo (min)	1	2	3	4	...
Altura (cm)	5	10	15	20	...

× 2

c. De 1 a 5 minutos el tiempo ha aumentado 5 veces, entonces la altura también aumentará 5 veces, es decir, será igual a 5 × 5 = 25 cm.

Comprende

Cuando dos cantidades a y b cumplen que al multiplicarse a por 2, por 3, etc., la cantidad b también se multiplica por 2, por 3, etc., respectivamente, entonces se dice que las cantidades son **directamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad directa**.

El tiempo transcurrido y la altura del agua en un recipiente son cantidades directamente proporcionales.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de papayas y el precio. Estas cantidades son directamente proporcionales. Completa los precios que hacen falta.

Número de papayas	1	2	3	4	5	...
Precio ($)	2	4				...

2. Un automóvil recorre una carretera con una rapidez de 40 km por hora.
   a. Completa la tabla escribiendo la cantidad de kilómetros recorridos al variar la cantidad de horas.

Tiempo transcurrido (horas)	1	2	3	4	5	...
Distancia recorrida (km)						...

   b. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al transcurrir 6 horas?

2.2 Propiedad de la proporcionalidad directa

Analiza

Antonio anotó la relación entre el tiempo y la altura del agua en un depósito.

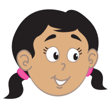
a. Encuentra el cociente de la altura entre el tiempo. ¿Cuánto resulta?

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente							

b. ¿Cuánto aumenta la altura del agua cada minuto?

Soluciona

a. Calculo el cociente en cada caso. Por ejemplo, si el tiempo es 1 min y la altura es 5 cm, el cociente es $5 \div 1 = 5$:


Beatriz

$5 \div 1 = 5$
$10 \div 2 = 5$
$15 \div 3 = 5$
$20 \div 4 = 5$
$25 \div 5 = 5$
$30 \div 6 = 5$

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	5	10	15	20	25	30	...
Cociente	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	

¡El resultado del cociente es igual a 5 en todos los casos!

b. Como el cociente siempre resulta 5, significa que la altura aumenta 5 cm cada minuto.

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad directa
Cuando dos cantidades son directamente proporcionales, el cociente siempre resulta el mismo número.

Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la longitud y el peso de un tipo de alambre:

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6	...
Peso (g)	7	14	21	28	35	42	...

   a. Encuentra el cociente del peso entre la longitud.
   b. ¿Cuál es el peso por metro de este tipo de alambre?

2. La siguiente tabla muestra el área (en hectáreas) sembrada de maíz y el peso cosechado.

Área (ha)	1	2	3	4	5	6	...
Peso (ton)	3	6	9	12	15	18	...

   a. Encuentra el cociente del peso entre el área sembrada.
   b. ¿Cuál es el peso del maíz cosechado por hectárea?

2.3 Identificación de cantidades directamente proporcionales

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son directamente proporcionales?

a. La longitud y el peso de una varilla de hierro.

Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

b. El número de dulces de Ana y el número de dulces de Julia al repartirse 9 dulces.

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...

Soluciona

a. Verifico si al aumentar la longitud cierta cantidad de veces, el peso aumenta en esa misma cantidad de veces:

Mario

Longitud (m)	1	2	3	4	5	...
Peso (lb)	3	6	9	12	15	...

× 2 × 2 × 5

¡Sí cumple con lo anterior!

R: La longitud y el peso de una varilla de hierro son directamente proporcionales.

b. Calculo en cada caso el cociente de la cantidad de dulces de Julia entre los de Ana:

Dulces de Ana	1	2	3	4	5	...
Dulces de Julia	8	7	6	5	4	...
Cociente	**8**	**3.5**	**2**	**1.25**	**0.8**	...

¡El cociente no es igual en todos los casos! Es decir, no cumple la propiedad de la proporcionalidad directa.

R: Las cantidades de dulces de Ana y de Julia no son directamente proporcionales.

Comprende

Para identificar si dos magnitudes son directamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, etc., la otra también se multiplica por 2, por 3, por 4 respectivamente.
- El cociente entre las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad directa).

Resuelve

Identifica si las cantidades son directamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son directamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son; justifica tu respuesta.

a. La cantidad de hojas de papel y su peso:

Cantidad de hojas	1	2	3	4	5	...
Peso (g)	2	4	6	8	10	...

b. La cantidad de galones de gasolina y el costo de la compra:

Cantidad (gal)	1	2	3	4	5	...
Costo ($)	3	6	9	12	15	...

c. La cantidad de cortes en una tira y el número de trozos obtenidos:

Número de cortes	1	2	3	4	5	...
Número de trozos	2	3	4	5	6	...

d. La base y altura de un rectángulo de 24 cm de perímetro:

Base (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura (cm)	11	10	9	8	2	...

Unidad 5

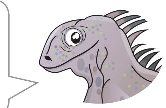
2.4 Otras cantidades directamente proporcionales

Analiza

a. Completa la tabla escribiendo los valores del área de un rectángulo de base 5 cm cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	5×1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

> Recuerda que el área de un rectángulo se calcula:
> **área = base × altura**



b. ¿Son la altura del rectángulo y su área cantidades directamente proporcionales?

c. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, representa la relación entre la altura (x) y el área (y).

Soluciona

a. Completo la tabla, utilizando la fórmula del área del rectángulo (**área = base × altura**):

Julia

Altura x (cm)	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...

b. Si para calcular el área realicé 5 × altura entonces el cociente área ÷ altura es igual a 5 en todos los casos. ¡Las cantidades son directamente proporcionales!

c. Como área = base × altura entonces la relación entre el área y y la altura x es:

$$y = 5 \times x$$

Comprende

La expresión $y = 5 \times x$ representa la relación entre dos cantidades directamente proporcionales; en este caso se dice que y **es directamente proporcional a** x, o simplemente que y **es proporcional a** x. Otros ejemplos de relaciones entre cantidades directamente proporcionales son $y = 2 \times x$, $y = 3 \times x$, etc.

Resuelve

1. La longitud de la base de un paralelogramo es 4 cm.

   a. Completa la tabla escribiendo los valores del área cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

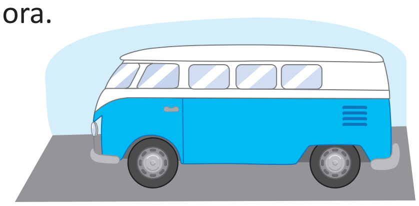
Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área del paralelogramo, representa la relación entre la altura x y el área y.

2. Un automóvil transita por una carretera a una rapidez de 60 km por hora.

   a. Completa la tabla:

Tiempo transcurrido x (horas)	1	2	3	4	5	...
Distancia recorrida y (km)						...



   b. Tomando en cuenta que **distancia = rapidez × tiempo**, representa la relación entre el tiempo transcurrido x con la distancia recorrida y.

2.5 Expresión y = constante × x

Analiza

La siguiente tabla muestra los datos de la clase anterior, sobre el área de un rectángulo de base 5 cm al variar su altura:

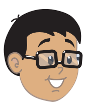
Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$						...

a. Completa la última fila de la tabla con el cociente del área entre la altura ($y \div x$). ¿Qué resultado obtuviste?

b. ¿Qué relación hay entre el número calculado en a. y la expresión $y = 5 \times x$?

Soluciona

a. Calculo el cociente:


Carlos

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$	$5 \div 1 = 5$	$10 \div 2 = 5$	$15 \div 3 = 5$	$20 \div 4 = 5$	$25 \div 5 = 5$	...

b. El cociente siempre es 5; esto significa que el área aumenta 5 cm^2 por cada centímetro que aumenta la altura.

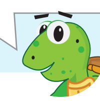
c. El cociente 5 es el número que se encuentra en la expresión $y = 5 \times x$, es decir, el número de la expresión se obtiene calculando el cociente $y \div x$.

Comprende

Cuando y es directamente proporcional a x, el cociente de $y \div x$ es siempre el mismo valor; a este valor se le llama **constante**. Cuando esto sucede, la relación entre x y y se puede expresar:

$$y = \textbf{constante} \times x$$

Algunas relaciones entre cantidades son de la forma x + constante = y, constante − x = y; pero estas cantidades no son directamente proporcionales.



Resuelve

1. La siguiente tabla muestra la cantidad de dinero que Juan acumula al ahorrar mensualmente:

Tiempo transcurrido x (meses)	1	2	3	4	5	...
Dinero ahorrado y ($)	4	8	12	16	20	...
Cociente $y \div x$						...

   a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.

   b. Representa la relación entre el tiempo transcurrido en meses (x) y la cantidad de dinero ahorrado (y).

2. La siguiente tabla muestra el impuesto a las telefonías que se aplica según el monto de la recarga en El Salvador:

Monto de la recarga x ($)	1	2	3	4	5	...
Impuesto y (centavos)	5	10	15	20	25	...
Cociente $y \div x$						...

   a. Completa la fila con el cálculo del cociente $y \div x$.

   b. Representa la relación entre el monto de la recarga (x) y el impuesto (y).

2.6 Aplicaciones de cantidades directamente proporcionales

Analiza

¿Cómo se puede empacar un paquete de 300 hojas de papel bond sin contarlas una a una? Utiliza la estrategia y la información de María y Antonio:

El peso es directamente proporcional a la cantidad de hojas. Puedo resolver utilizando el peso de un paquete de 10 hojas.

La altura es directamente proporcional a la cantidad de hojas. Puedo resolver utilizando la altura de un paquete de 100 hojas.

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	a

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	b

Soluciona

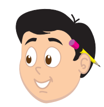

Ana

Utilizo la estrategia de María, que encontró el peso de un paquete de 10 hojas. Con eso puedo calcular el peso de una hoja, y luego el de las 300:

Peso de una hoja (g): $40 \div 10 = 4$
Peso de 300 hojas (g): $4 \times 300 = 1,200$

n.° de hojas	10	300
Peso (g)	40	1, 200

R: Se prepara un paquete que pese 1, 200 g.


José

Utilizo la estrategia de Antonio, que encontró la altura de un paquete de 100 hojas. Así, puedo calcular la altura de las 300 hojas.

Si la cantidad de hojas se triplica de 100 a 300, el peso también se triplica:

× 3

n.° de hojas	100	300
Altura (cm)	1	3

× 3

R: Se prepara un paquete de 3 cm de altura.

Comprende

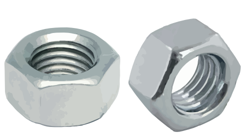
Se puede preparar la cantidad aproximada de papel utilizando lo siguiente:

- El peso es directamente proporcional al número de hojas.
- La altura es directamente proporcional al número de hojas.

Así, no es necesario contar todas las hojas.

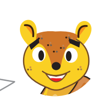
Resuelve

1. Al pesar 15 tuercas del mismo tipo se obtiene como resultado 32 g. ¿Cómo se pueden preparar 120 tuercas sin contarlas una a una?



n.° de tuercas	15	120
Peso (g)	32	a

¿El peso de las tuercas es directamente proporcional a la cantidad de tuercas? ¿Cuántas veces cabe 15 en 120?



2. En la librería “Papelitos” preparan paquetes de 750 pliegos de cartulina. Un paquete de 150 pliegos de cartulina mide 3 cm. ¿Cómo se puede preparar cada paquete de 750 pliegos sin contarlos uno a uno?

n.° de pliegos	150	750
Altura (cm)	3	b

¿La altura es directamente proporcional al número de pliegos?

2.7 Proporcionalidad directa con un dato desconocido

Analiza

Al pesar 90 clavos del mismo tipo en una báscula pesan 180 g; en la misma báscula se coloca un puñado de estos clavos y pesan 20 g. ¿Cuántos clavos hay sobre la báscula?

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

Soluciona

El peso es directamente proporcional al número de clavos. Utilizo la propiedad de la proporcionalidad directa: 180 ÷ 90 = 2, es decir, 2 × 90 = 180.


Carmen

n.° de clavos	2 × a	2 × 90
Peso (g)	20	180

Como es constante, 2 × a = 20, es decir, a = 20 ÷ 2 = 10.

R: 10 clavos.

Encuentro el cambio en el peso de los clavos: 180 ÷ 20 = 9, es decir, 20 × 9 = 180.


Antonio

× 9

n.° de clavos	a	90
Peso (g)	20	180

× 9

Como el peso aumenta 9 veces, el número de clavos también aumenta 9 veces, a × 9 = 90, o sea:

$$a = 90 \div 9 = 10$$

R: 10 clavos.

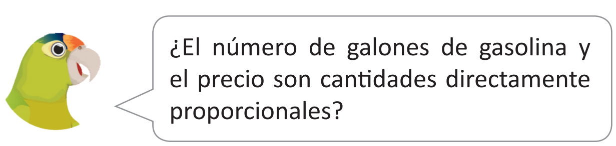
Comprende

Aplicando la definición o la propiedad de proporcionalidad directa, se puede encontrar un valor desconocido de dos cantidades que son directamente proporcionales.

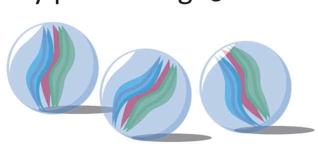
Resuelve

1. Don José pasó a una gasolinera y solicitó 4.5 galones de gasolina; el costo de la compra fue de $13.50. Otro señor pasó y el costo de la compra fue $27, ¿cuántos galones de gasolina compró el otro señor?

Cantidad de gasolina (gal)	4.5	a
Precio ($)	13.5	27



2. Al pesar 36 chibolas iguales en una báscula se obtienen 324 g. En la misma báscula se pesa otro grupo de chibolas y pesan 81 g. ¿Cuántas chibolas se pesaron la segunda vez?



n.° de chibolas	a	36
Peso (g)	81	324

2.8 Practica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre el número de pasajeros de un autobús y el costo del pasaje, estas cantidades son directamente proporcionales. ¿Qué números corresponden a a, b y c?

Número de pasajeros	1	2	3	4	5	...
Costo (centavos)	20	40	60	80	100	...

2. Identifica si las siguientes cantidades son directamente proporcionales o no. Justifica tu respuesta.
   a. El número de cajas de lapiceros y la cantidad de lapiceros.

n.° de cajas	1	2	3	4	5	...
n.° de lapiceros	12	24	36	48	60	...

   b. Las edades de María y Juan al pasar los años.

Edad de María	15	16	17	18	19	...
Edad de Juan	12	13	14	15	16	...

3. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un rectángulo de base 4 cm, cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)						...

   b. Utilizando la fórmula del área de un rectángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

4. a. Completa para la siguiente tabla con los datos del área de un triángulo de base 6 cm, cuando su altura es 1 cm, 2 cm, 3 cm, etc.

Altura x (cm)	1	2	3	4	5	...
Área y (cm^2)	3					...
Cociente $y \div x$						...

   b. Utilizando la fórmula del área de un triángulo, representa la relación entre la altura x y el área y.

5. En una fábrica de dulces se preparan minibolsas con 32 dulces, y se sabe que 8 dulces pesan 72 g. ¿Cómo se puede preparar una minibolsa sin contar los dulces uno a uno?

n.° de dulces	8	32
Peso (g)	72	a

6. Ana compró 36 platos por $108; su amiga compró otra cantidad de estos mismos platos y pagó $27. ¿Cuántos platos compró la amiga de Ana?

n.° de platos	a	36
Costo ($)	27	108

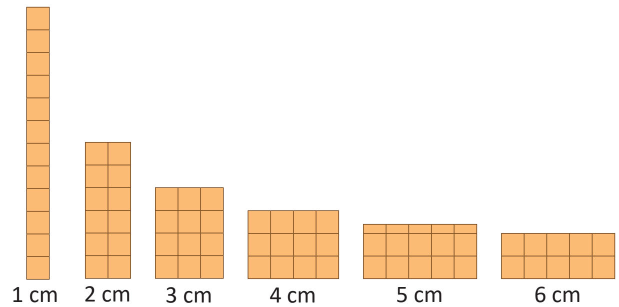
3.1 Relación de proporcionalidad inversa

Analiza

Carlos y Ana están dibujando rectángulos de área 12 cm^2. Realiza lo siguiente:

a. Completa la tabla, ¿cómo cambia la longitud de la altura a medida que la longitud de la base, aumenta?

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)							...

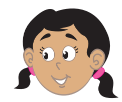


b. Si la longitud de la base se multiplica por 2 o por 3, ¿cómo cambia la longitud de la altura?

Soluciona

a. Observo que al aumentar la longitud de la base, la longitud de la altura disminuye para mantener el área igual a 12 cm^2. Entonces:

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...


Beatriz

b. Analizo la relación de la altura cuando la longitud de la base aumenta cierta cantidad de veces:

Cuando la longitud de la base se multiplica por 2, por 3, etc., la longitud de la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, etc., respectivamente.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...

Comprende

Cuando dos cantidades x y y cumplen que al multiplicarse una por 2, por 3, por 4, etc., la otra cantidad se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, etc., respectivamente, se dice que las cantidades son **inversamente proporcionales** y a esta relación se le llama **proporcionalidad inversa**.

Resuelve

1. La tabla contiene la relación entre las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de área 18 cm^2. Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa las longitudes que hacen falta.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura (cm)							...

2. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de personas en un salón de 36 m^2 de área y el área que corresponde por persona. Estas cantidades son inversamente proporcionales. Completa los espacios que hacen falta.

Número de personas	1	2	3	4	...
Área por persona (m^2)	36	18			...

Unidad 5

3.2 Propiedad de la proporcionalidad inversa

Analiza

La siguiente tabla contiene los datos obtenidos en la clase anterior sobre la base y la altura de un rectángulo de área 12 cm^2. Calcula el producto de la base por la altura, ¿cuánto resulta?

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$							

Soluciona

Calculo el producto en cada caso. Por ejemplo, para 1 cm de base y 12 cm de altura, el producto es 1 × 12 = 12:


Mario

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	12	6	4	3	2.4	2	...
Producto $x \times y$	12	12	12	12	12	12	

El producto de la base por la altura es igual al área, ¡siempre es igual a 12!

R: 12

Comprende

Propiedad de la proporcionalidad inversa

Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales, el producto de estas cantidades siempre resulta el mismo número.

Resuelve

1. Una botella con jugo se reparte en vasos. La tabla contiene la cantidad de líquido en cada vaso, dependiendo del número de vasos. Estas cantidades son inversamente proporcionales.

n.° de vasos x	2	4	8	10	...
Cantidad de líquido y (ml)	500	250			...
Producto $x \times y$					

   a. Completa la tabla.
   b. ¿Cuál es la capacidad de la botella?

2. La siguiente tabla muestra la relación entre los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un automóvil para ir de la ciudad A a la ciudad B.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	30	60	...
Tiempo y (horas)	12	6	3	2	1	...
Producto $x \times y$						

   a. Completa la tabla.
   b. ¿Cuál es la distancia que separa las ciudades A y B?

3.3 Identificación de cantidades inversamente proporcionales

Analiza

¿Cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales?

a. La rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...

b. Las longitudes de la base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

Soluciona


Ana

a. Verifico si cumple las propiedades de la proporcionalidad inversa, realizando los productos de la rapidez por el tiempo. Por ejemplo, para la rapidez 5 km/h y el tiempo 16 h, el producto es 5 × 16 = 80:

Rapidez x (km/h)	5	10	20	40	80	...
Tiempo y (horas)	16	8	4	2	1	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

Como el producto de la rapidez por el tiempo siempre resulta en 80, las cantidades son inversamente proporcionales.

R: La rapidez y el tiempo que tarda un auto en recorrer cierta distancia son inversamente proporcionales.

b. Verifico si cumple la condición de la proporcionalidad inversa, es decir, si al multiplicar por 2 o 3 la base, la altura se multiplica por $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ respectivamente:

× 3
× 2

Base x (cm)	1	2	3	4	5	6	...
Altura y (cm)	8	7	6	5	4	3	...

$\cancel{\times \frac{1}{2}}$
$\cancel{\times \frac{1}{3}}$

Al multiplicar por 2 o 3 la base, la altura no se multiplica por $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$, por tanto las cantidades no son inversamente proporcionales.

R: La base y la altura de un rectángulo de perímetro 18 cm no son inversamente proporcionales.

Comprende

Para identificar si dos magnitudes son inversamente proporcionales se puede verificar una de las siguientes condiciones:

- Cuando una de ellas se multiplica por 2, por 3, por 4, ..., la otra se multiplica por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{3}$, por $\frac{1}{4}$, ..., respectivamente.
- El producto de las dos cantidades siempre resulta un mismo número (propiedad de la proporcionalidad inversa).

Resuelve

Identifica si las cantidades son inversamente proporcionales, coloca ✓ si las cantidades son inversamente proporcionales o coloca ✗ si no lo son y justifica tu respuesta.

a. El número de estudiantes para una excursión y el costo del pasaje por estudiante.

n.° de estudiantes	5	10	15	20	25	...
Pasaje ($)	30	15	10	7.5	6	...

b. El número de chocolates de Julia y Mario al repartirse 8 chocolates.

Chocolates de Julia	1	2	3	4	5	...
Chocolates de Mario	7	6	5	4	3	...

c. El número de gallinas y la cantidad de días que dura el alimento en una granja.

n.° de gallinas	200	400	600	800	...
n.° de días	30	15	10	7.5	...

3.4 Expresión $x \times y$ = constante

Analiza

La siguiente tabla contiene los datos de la rapidez y el tiempo que tarda un auto al recorrer cierta distancia.

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$						

a. Completa la última fila de la tabla con el producto de la rapidez por el tiempo.
b. Utilizando la relación de **distancia** = **rapidez** × **tiempo**, representa la relación entre la rapidez x y el tiempo y.

Soluciona

a. Calculo el producto en cada caso:


José

Rapidez x (km/h)	80	40	20	10	5	...
Tiempo y (h)	1	2	4	8	16	...
Producto $x \times y$	80	80	80	80	80	

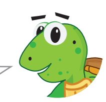
¡Siempre resulta en 80!

b. Como x representa la rapidez, y el tiempo y el producto siempre es igual a 80 (significa que la distancia que recorre el auto es 80 km), entonces:

distancia = **rapidez** × **tiempo**
$80 = x \times y$

R: $80 = x \times y$ o $x \times y = 80$

La representación entre la rapidez y el tiempo también se puede escribir como $y = 80 \div x$.



Comprende

Cuando x y y son cantidades inversamente proporcionales, el producto $x \times y$ es constante (siempre es el mismo valor). La relación entre x y y se puede representar como:

$\boldsymbol{x \times y}$ = **constante** o $\boldsymbol{y}$ = **constante** ÷ $\boldsymbol{x}$

Se dice que y **es inversamente proporcional** a x.

Resuelve

1. La siguiente tabla contiene los datos de la base y la altura de un rectángulo de 18 cm^2 de área:

   a. Completa la tabla.
   b. Utilizando la fórmula del área del rectángulo, representa la relación entre la base x y la altura y (escríbelo de dos formas distintas).

Base x (cm)	1	2	3	6	9	...
Altura y (cm)	18					...
Producto $x \times y$						

2. Un grupo de alumnos para una excursión contratan un autobús a precio fijo. Observa los datos de la tabla que contienen las posibilidades del número de estudiantes y el costo que correspondería por estudiante.

Número de estudiantes x	24	18	12	8	6	...
Precio por estudiante y ($)	6	8	12	18	24	...
Producto $x \times y$						

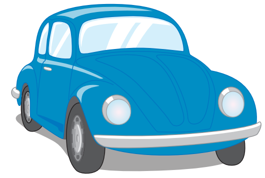
   a. Completa la última fila de la tabla y responde, ¿cuál es el precio del autobús por hacer el viaje?
   b. Representa la relación entre el número de estudiantes y el precio por estudiante.

3.5 Proporcionalidad inversa con un dato desconocido

Analiza

Un automóvil que circula a 60 km/h invierte 2 horas en cubrir la distancia que separa dos ciudades. Si vuelve a realizar el viaje a una rapidez de 20 km/h, ¿cuánto tiempo tardará?

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a



Soluciona

Carmen

Como la rapidez y el tiempo son cantidades inversamente proporcionales, el producto siempre es constante:

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	1	a
Producto	120	120

Entonces, 20 × a = 120, es decir:

$$a = 120 \div 20 = 6$$

R: Tardará 6 horas.

Antonio

Encuentro el cambio en la rapidez, observando que: $60 \times \frac{1}{3} = 20$, la rapidez se multiplica por $\frac{1}{3}$; entonces el tiempo se multiplica por 3:

Rapidez (km/h)	60	20
Tiempo (h)	2	a

× $\frac{1}{3}$

× 3

$$a = 2 \times 3 = 6$$

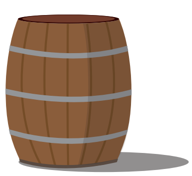
R: Tardará 6 horas.

Comprende

Se puede encontrar un valor desconocido en situaciones sobre proporcionalidad inversa, utilizando la definición o la propiedad de proporcionalidad inversa.

Resuelve

1. Hay 8 barriles llenos de vino, con 200 litros cada uno. Se quiere envasar la misma cantidad de vino en 32 barriles iguales llenándolos completamente. ¿Cuál debe ser la capacidad de estos barriles?



Número de barriles	8	32
Capacidad (litros)	200	a
Producto		

¿Son la capacidad y el número de barriles cantidades inversamente proporcionales?

2. Se llena un depósito en 6 horas, utilizando 4 grifos que vierten la misma cantidad de agua de forma constante. Si se usan 8 grifos con este mismo flujo de agua, ¿cuánto tiempo tardará en llenar el depósito?

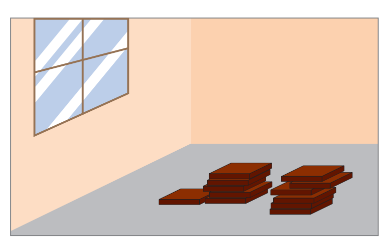
Número de grifos	4	8
Tiempo (horas)	6	a
Producto		

¿Son el número de grifos y el tiempo, cantidades inversamente proporcionales?

★ Desafíate

Para enladrillar un piso se necesitan 40 ladrillos de 30 cm². ¿Cuántos ladrillos de 20 cm² se necesitarán para enladrillar la misma superficie?

Número de ladrillos	40	a
Área de cada ladrillo (cm²)	30	20



Unidad 5

3.6 Practica lo aprendido

1. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de gallinas en una granja y el tiempo que tardan en comer cierta cantidad de alimento.
   a. ¿Qué números se deben escribir en lugar de a, b, c y d?

n.° de gallinas	50	100	150	200	250	300	...
Tiempo (días)	48	24	16	12	9.6	8	...

$50 \xrightarrow{\times 4} 200$, $50 \xrightarrow{\times 5} 250$, $100 \xrightarrow{\times 3} 300$, $150 \xrightarrow{\times 2} 300$

$48 \xrightarrow{\times a} 12$, $48 \xrightarrow{\times b} 9.6$, $16 \xrightarrow{\times c} 8$, $24 \xrightarrow{\times d} 8$

   b. ¿Son el número de gallinas y el tiempo que tardan en comer el alimento, cantidades inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

2. Identifica cuáles de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales y explica tu respuesta:
   a. El número de estudiantes y la cantidad de cinta que les corresponde si se reparten 30 metros de cinta:

n.° de estudiantes	1	2	3	4	5	...
Cinta (m)	30	15	10	7.5	6	...

   b. El número de paletas que les corresponden a Carlos y María, si se reparten 9 paletas:

Paletas de Carlos	1	2	3	4	5	...
Paletas de María	8	7	6	5	4	...

3. a. Completa la tabla con los posibles valores que puede tomar la base y la altura de un paralelogramo de área 120 cm^2.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	120					...

   b. Utilizando la fórmula del área de un paralelogramo **área** = **base** × **altura**, representa la relación entre la base x y la altura y.

4. Si 6 trabajadores siembran una parcela con maíz en 4 días, ¿cuánto tardarían en sembrar la misma parcela 12 trabajadores trabajando al mismo ritmo?

n.° de trabajadores	6	12
Tiempo (días)	4	a

3.7 Proporcionalidad directa e inversa

Analiza

Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directa o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La rapidez de un auto y el tiempo que tarda en recorrer 120 km de distancia.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...

b. La longitud de un alambre y su peso.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...

c. La base y la altura de un rectángulo de perímetro 16 cm.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...

Soluciona


Julia

Encuentro la relación entre x y y analizando, si el cociente o el producto es constante:

a. Al calcular el producto de la rapidez por el tiempo, el resultado siempre es 120. Las cantidades son inversamente proporcionales y $x \times y = 120$.

Rapidez x (km/h)	20	40	60	80	...
Tiempo y (horas)	6	3	2	1.5	...
Producto $x \times y$	120	120	120	120	

b. Si calculo el cociente del peso entre la longitud, el resultado siempre es 9. Las cantidades son directamente proporcionales y $y = 9 \times x$.

Longitud x (m)	2	4	6	8	...
Peso y (g)	18	36	54	72	...
Cociente $y \div x$	9	9	9	9	

c. No son cantidades directamente proporcionales, ni inversamente proporcionales, pues ni el cociente, ni el producto son constantes.

Base x (cm)	1	2	3	4	5	...
Altura y (cm)	7	6	5	4	3	...
Cociente $y \div x$	7	3	1.66...	1	0.6	
Producto $x \times y$	7	12	15	16	15	

Comprende

Se puede identificar si dos cantidades son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos, verificando si el producto o el cociente es constante.

Resuelve

Identifica si las cantidades x y y son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o ninguna de las dos. En caso de ser directamente o inversamente proporcionales, representa la relación entre x y y:

a. La base y la altura de un rectángulo de área 60 cm^2.

Base x (cm)	1	2	3	4	...
Altura y (cm)	60	30	20	15	...

b. Las edades de Marta y Beatriz.

Edad de Marta x	10	11	12	13	...
Edad de Beatriz y	7	8	9	10	...

c. El número de páginas de un libro y su peso.

n.° de páginas x	150	300	450	600	...
Peso y (lb)	2	4	6	8	...

d. El número de trabajadores y la cantidad de días que tardan en pintar una casa.

n.° de trabajadores x	4	8	12	16	...
n.° de días y	12	6	4	3	...

¿Sabías que...?

Existen dos algoritmos para encontrar un dato que falta en cantidades que son directamente proporcionales o inversamente proporcionales, llamados **regla de tres**.

Regla de tres directa

Dadas la cantidades A y B directamente proporcionales, entonces se cumple $a : b = c : d$. Por la propiedad fundamental de las proporciones se cumple $a \times d = b \times c$; esto significa que a veces d es igual a $b \times c$. Si la cantidad desconocida es d, este número puede calcularse efectuando:

Cantidad A	a	c
Cantidad B	b	d

$$d = b \times c \div a \quad \text{o} \quad d = \frac{b \times c}{a}$$

Ejemplo de la regla de tres directa: Si 3 dulces pesan 18 g, ¿cuánto pesan 8 dulces?

El peso es directamente proporcional a la cantidad de dulces. Se ordenan los datos en una tabla y se utiliza la regla de tres directa:

n.° de dulces	3	8
Peso (g)	18	d

$$d = \frac{\overset{6}{\cancel{18}} \times 8}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 6 \times 8 = 48$$

R: 48 g

Regla de tres inversa

Dadas la cantidades A y B inversamente proporcionales, entonces, por la propiedad de la proporcionalidad inversa se cumple $a \times b = c \times d$; esto significa que c veces d es igual a $a \times b$. Si la cantidad desconocida es d, este número puede calcularse efectuando:

Cantidad A	a	c
Cantidad B	b	d

$$d = a \times b \div c \quad \text{o} \quad d = \frac{a \times b}{c}$$

Ejemplo de la regla de tres inversa: Si 4 trabajadores pintan una casa en 2 días, ¿cuánto tardarán 8 trabajadores si trabajan al mismo ritmo?

El número de trabajadores y la cantidad de horas son inversamente proporcionales. Se ordenan los datos en una tabla y se utiliza la regla de tres inversa:

n.° de trabajadores	4	8
Tiempo (días)	2	d

$$d = \frac{4 \times 2}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

R: Tardarán 1 día.

Unidad 6

Longitud de una circunferencia y área del círculo

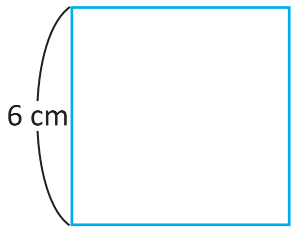
En esta unidad aprenderás a

- Calcular la longitud de una circunferencia a partir de su radio o su diámetro
- El significado de π y su uso
- Calcular el área de un círculo
- Calcular el área de regiones en figuras diversas

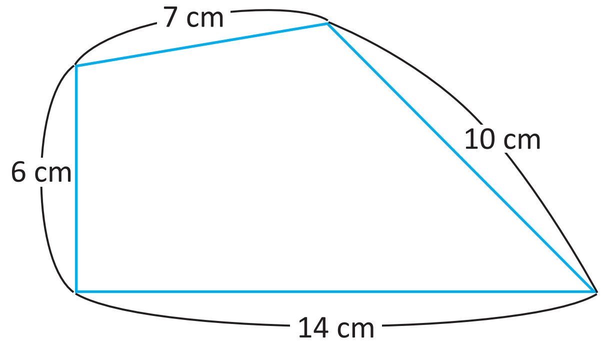
1.1 Practica lo aprendido

Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

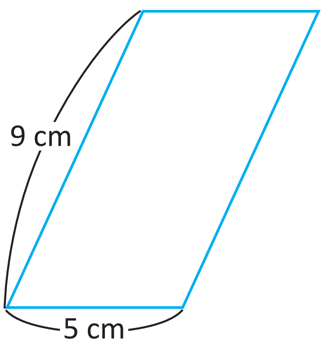
a. Cuadrado



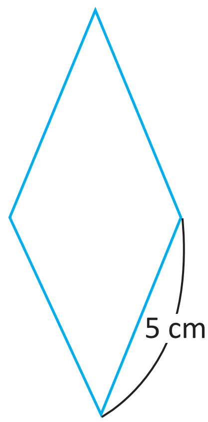
b. Cuadrilátero



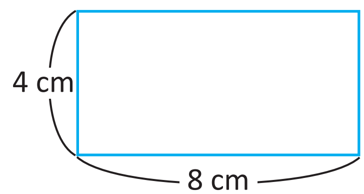
c. Paralelogramo



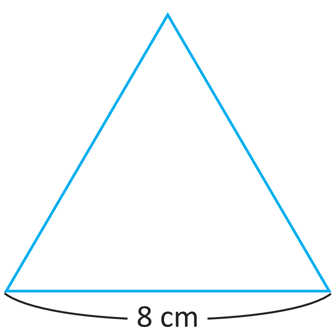
d. Rombo



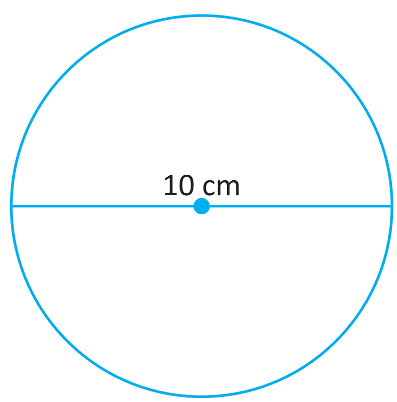
e. Rectángulo



f. Triángulo equilátero



g. Circunferencia

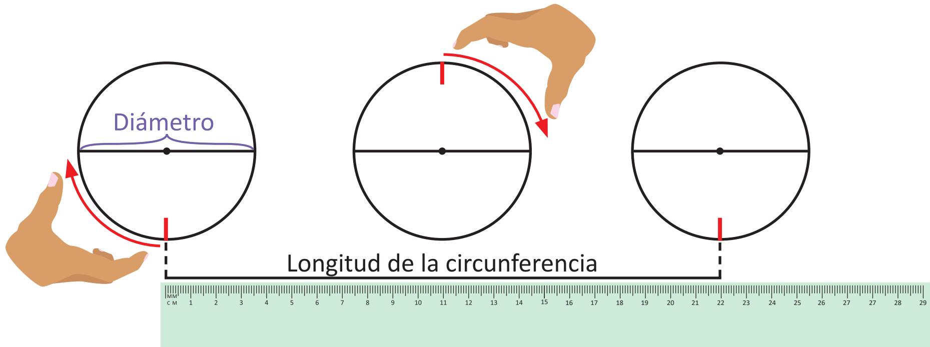


Al contorno de una figura geométrica se le conoce como perímetro, en el caso del contorno de un círculo, se le llama **circunferencia**.
En esta unidad aprenderás a calcular la medida de la circunferencia y el área de un círculo.

1.2 Relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro

Analiza

Para estimar la longitud de una circunferencia se realiza lo siguiente:

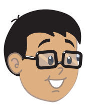


Para cada objeto en la siguiente tabla, calcula el cociente entre su longitud y su diámetro:

Objeto	Longitud de la circunferencia (cm)	Diámetro (cm)	**Longitud ÷ Diámetro** (aproximación)
base de una taza	25	8	
tirro	33.1	10.5	
tazón	46.8	14.9	

¿Cuántas veces (aproximadamente) es la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro?

Soluciona


Carlos

Objeto	Longitud de la circunferencia (cm)	Diámetro (cm)	**Longitud ÷ Diámetro** (aproximación)
base de una taza	25	8	25 ÷ 8 = 3.13
tirro	33.1	10.5	33.1 ÷ 10.5 = 3.15
tazón	46.8	14.9	46.8 ÷ 14.9 = 3.14

Luego de completar la tabla observo que la longitud de la circunferencia es aproximadamente 3.14 veces el diámetro.

R: 3.14 veces.

Comprende

El cociente **longitud de la circunferencia ÷ diámetro** no depende del diámetro. Se denota este número con letra griega π y se lee "pi":

longitud de la circunferencia ÷ diámetro = π

Redondeando a la centésima π es aproximadamete igual a 3.14 y se utiliza este valor en el cálculo.

Resuelve

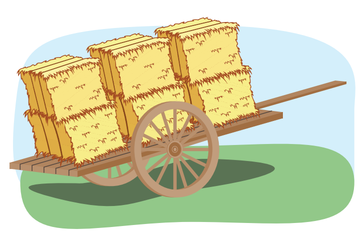
1. Con los datos de la circunferencia de la ilustracion realiza el cociente:

   longitud de la circunferencia ÷ diámetro,

   y verifica que se cumple la relación.

2. Con los datos del diámetro y la longitud de la circunferencia de las ruedas de la carreta verifica que se cumple la relación.

Diámetro: 100 cm
Longitud: 314 cm

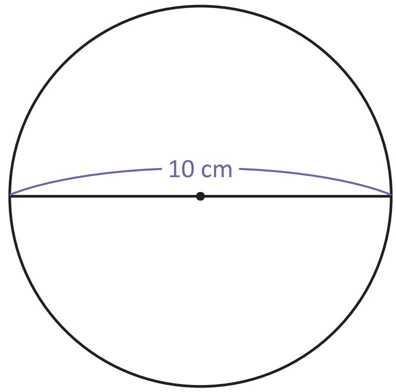


Unidad 6

1.3 Cálculo de la longitud de una circunferencia

Analiza

Encuentra la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 10 cm.



Soluciona

Represento la longitud de una circunferencia con ℓ,

$$\ell \div 10 = 3.14$$
$$\ell = 10 \times 3.14$$
$$\ell = 31.4$$

Recuerda que $a \div b = c$ equivale a $a = b \times c$.

Comprende

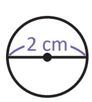
Si se conoce el diámetro de una circunferencia, su longitud se calcula efectuando lo siguiente:

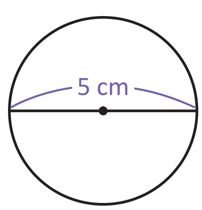
longitud de la circunferencia = diámetro × 3.14

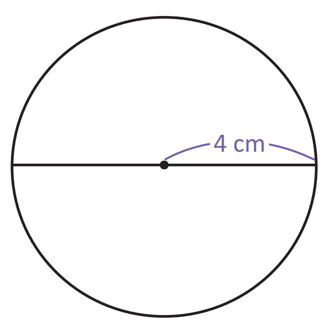
La longitud de una circunferencia es proporcional al diámetro.

Resuelve

1. Encuentra la longitud de cada circunferencia:

a.


b.


c.


Ten en cuenta que:
diámetro = radio × 2

2. Encuentra la longitud de la circunferencia en cada caso:

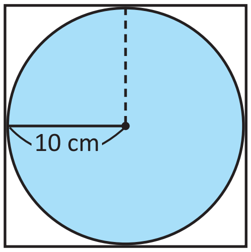
a. Diámetro = 6 cm   b. Diámetro = 12 cm   c. Radio = 20 cm

2.1 Comparación del área del círculo con el área de cuadrados

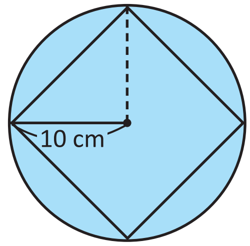
Analiza

Se compara el área del círculo de radio 10 cm con dos cuadrados. En cada caso, encuentra el área del cuadrado:

a.



b.



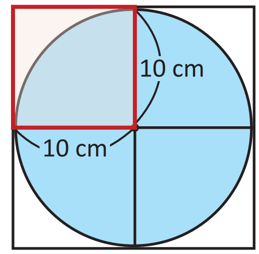
En b., compara el cuadrado con el de a.

Soluciona

Carmen

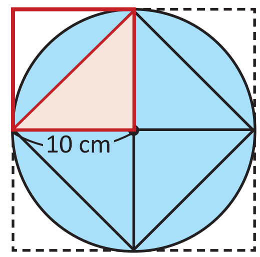
a. El área del cuadrado cuyo lado mide 10 cm es: $10 \times 10 = 100$ cm². Entonces, el área buscada es $100 \times 4 = 400$ cm²; es mayor que el área del círculo.

R: 400 cm²



b. Observo que el área del triángulo rectángulo es la mitad del área del cuadrado de lado 10 cm. Entonces, el área buscada es la mitad del área calculada en el literal anterior, o sea, $100 \times 2 = 200$ cm²; es menor que el área del círculo.

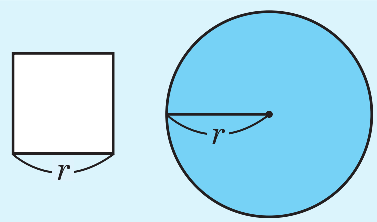
R: 200 cm²



Comprende

El área del círculo de radio r cumple lo siguiente:

- Es mayor que dos veces el área del cuadrado de lado r.
- Es menor que cuatro veces el área del cuadrado de lado r.



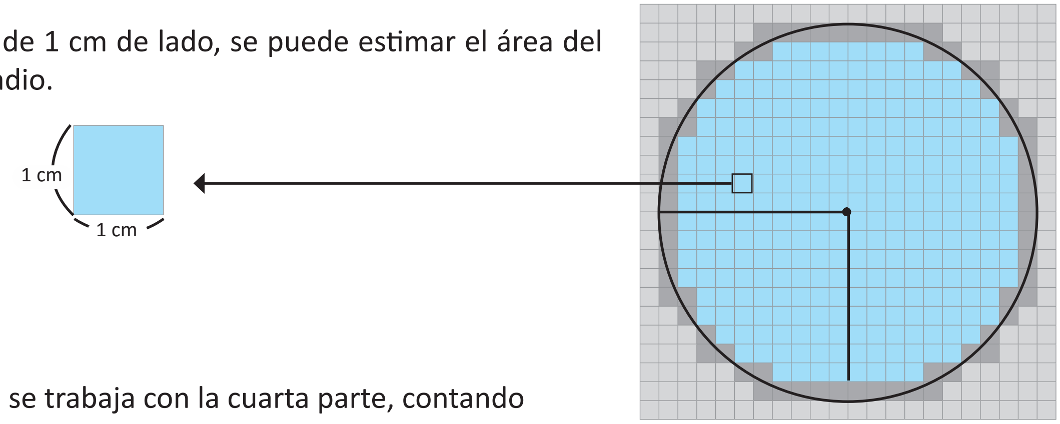
Resuelve

1. Completa lo siguiente:
   ① 2 veces el área del cuadrado de lado 5 cm es: _________ cm²
   ② 4 veces el área del cuadrado de lado 5 cm es: _________ cm²
   ③ Por lo tanto, el área del círculo de radio 5 cm está entre _________ cm² y _________ cm²

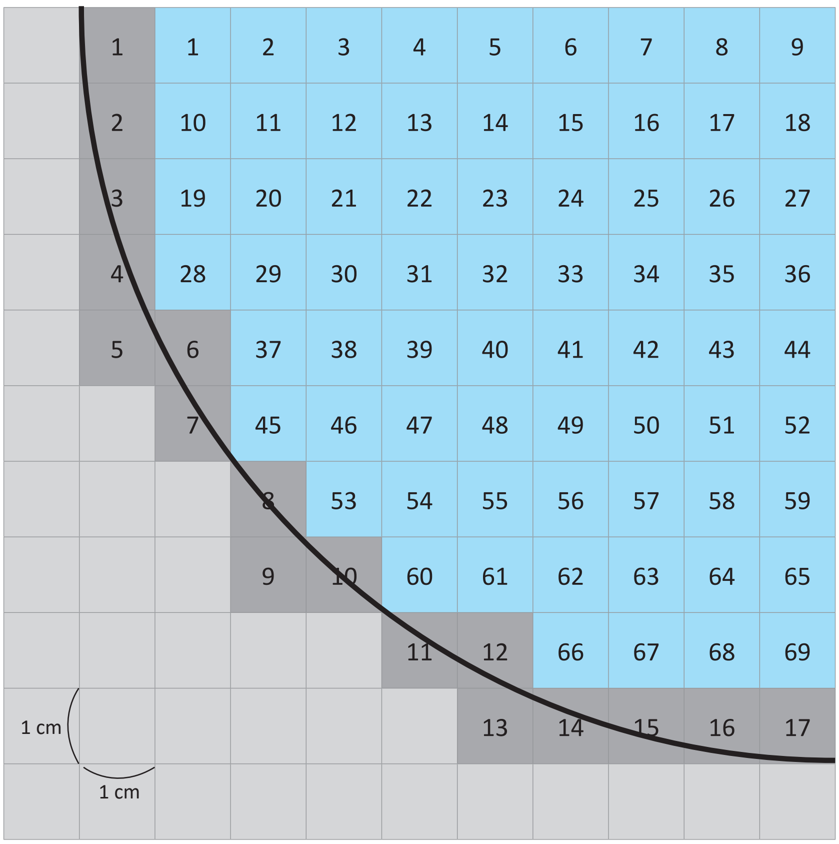
2. Completa lo siguiente:
   ① 2 veces el área del cuadrado de lado 7 cm es: _________ cm²
   ② 4 veces el área del cuadrado de lado 7 cm es: _________ cm²
   ③ Por lo tanto, el área del círculo de radio 7 cm está entre _________ cm² y _________ cm²

¿Sabías que...?

Utilizando cuadrados de 1 cm de lado, se puede estimar el área del círculo de 10 cm de radio.



Para hacerlo más fácil se trabaja con la cuarta parte, contando los cuadrados uno a uno.



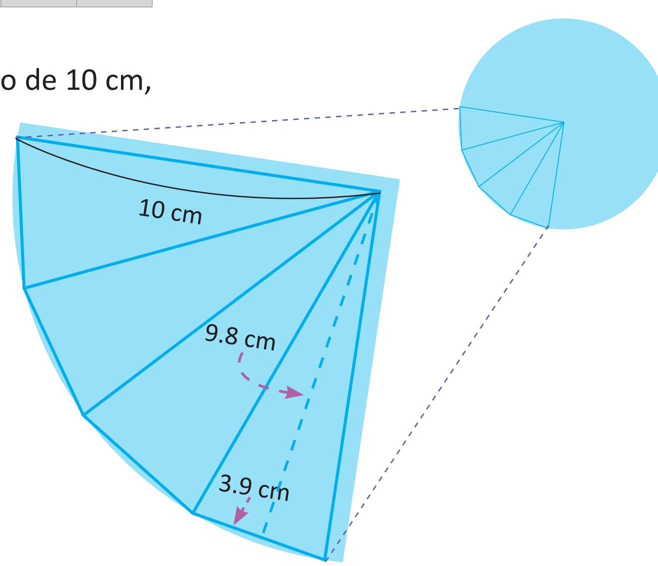
Los cuadrados completos son los de color ; en total hay 69 de ellos, es decir 69 cm^2. Los cuadrados incompletos son los de color ; en total hay 17 de ellos, pero como son incompletos solo se toma la mitad de su área, 8.5 cm^2.

El área aproximada de la cuarta parte del círculo es: $69 + 8.5 = 77.5$ cm^2.
Por lo tanto, el área aproximada del círculo es: $77.5 \times 4 = 310$
R: 310 cm

Además, el área del círculo es siempre, aproximadamente, 3 veces el área del cuadrado cuyo lado mide lo mismo que el radio de la circunferencia. Esto lo verifico al calcular:

$$310 \div 100 = 3.1$$

También se puede calcular el área del círculo de radio de 10 cm, dividiéndolo en triángulos iguales.



Usando, por ejemplo, el polígono regular que se divide en 16 partes iguales, se encuentra el área de uno de los triángulos: $3.9 \times 9.8 \div 2 = 19.11$ cm^2

En los 16 triángulos se tiene: $19.11 \times 16 = 305.76$; aproximadamente: 306 cm^2

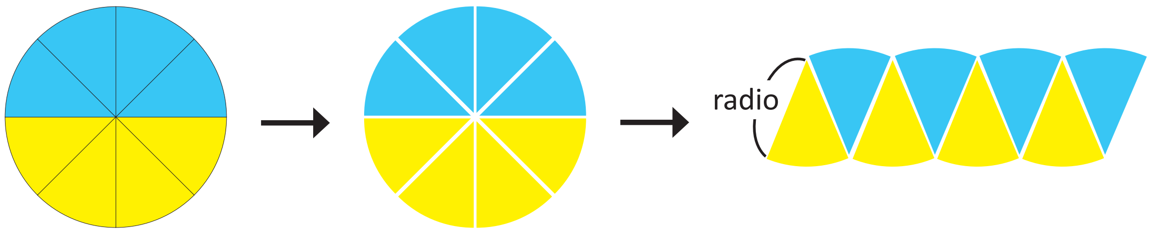
Para la cantidad de veces efectúo:

$$306 \div 100 = 3.06$$

R: Aproximadamente 3 veces.

Analiza

Se recorta un círculo en 8 partes iguales y se reubican como se muestra en la figura:



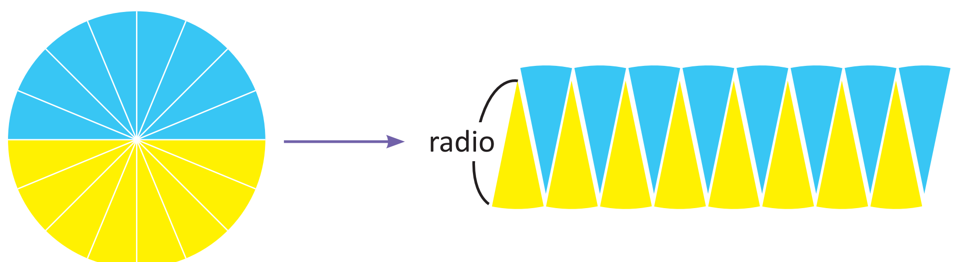
a. ¿Qué figura se va formando cuando se tienen más partes?
b. ¿Cómo puede calcularse el área del círculo?

Soluciona

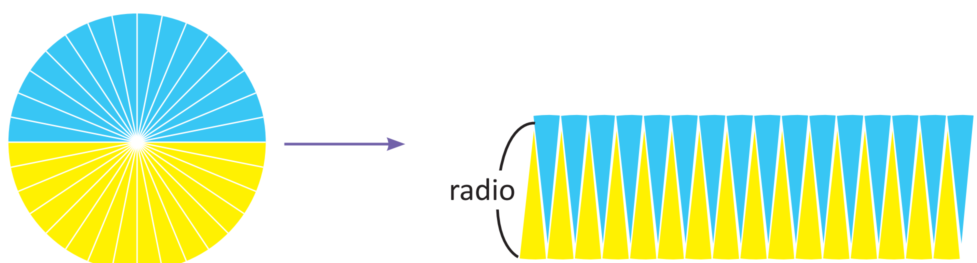
a. Si se hacen 16, 32 y 64 recortes como los anteriores, ¿cómo podemos encontrar la fórmula del área del círculo, utilizando la fórmula del área de la figura formada?

Antonio

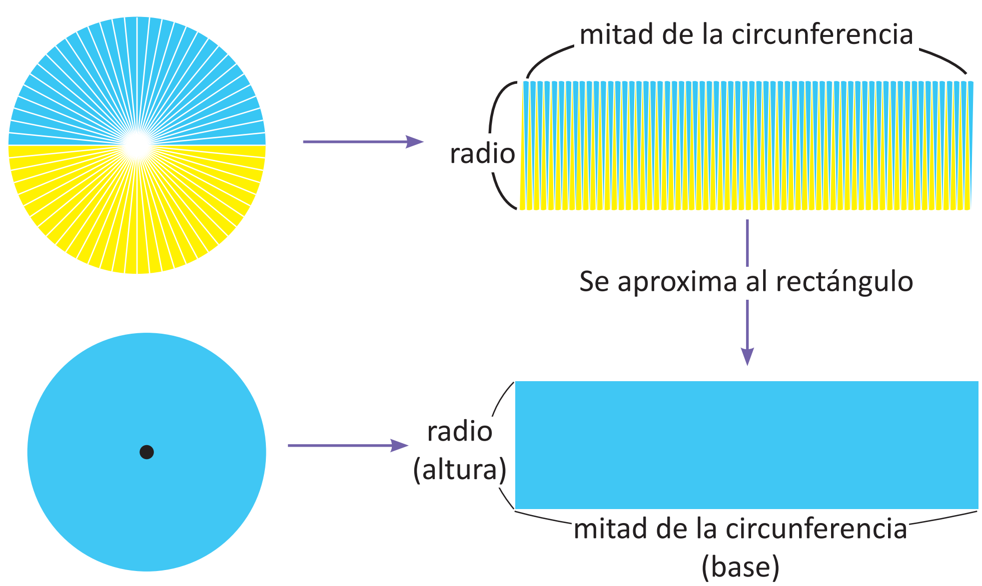
Para 16 sectores:



Para 32 sectores:



Para 64 sectores:



R: Se va formando un rectángulo.

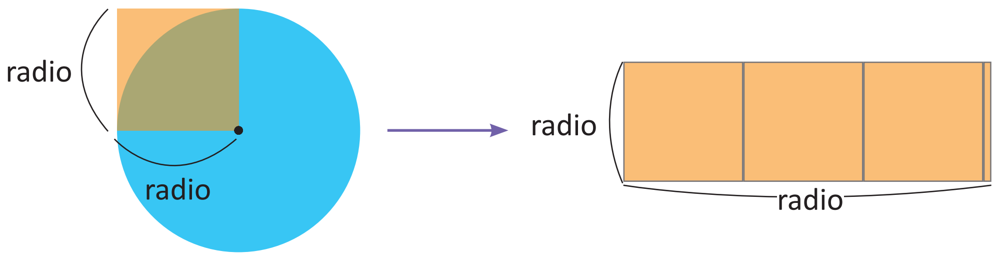
b. El área del círculo puede calcularse utilizando el rectángulo del literal anterior:

El área del rectángulo = base × altura

El área del círculo = mitad de la longitud de la circunferencia × radio
= (radio × π) × radio
= radio × radio × π

longitud de la circunferencia = diámetro × π
= radio × 2 × π

mitad de la longitud de la circunferencia:
= (radio × 2 × π) ÷ 2
= radio × π



R: El área del círculo es aproximadamente π veces el área del cuadrado cuyo lado es la misma longitud del radio.

Comprende

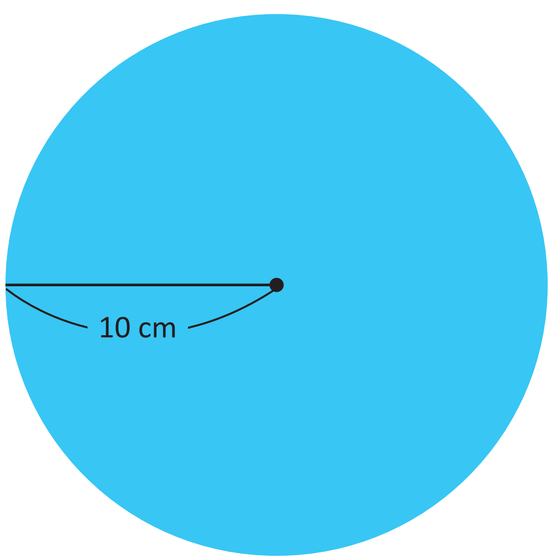
El área del círculo se calcula:

área del círculo = radio × radio × π
= radio × radio × 3.14

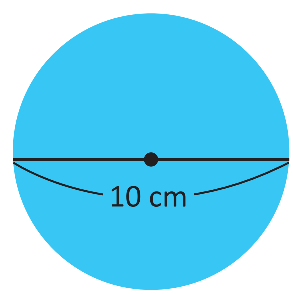
Resuelve

1. Encuentra el área de los círculos utilizando el valor 3.14

a. Radio = 10 cm



b. Diámetro = 10 cm



2. Encuentra el área del círculo con la condición dada en cada literal, utilizando el valor de 3.14.

a. Radio = 4 cm

b. Diámetro = 6 cm

¿Sabías que...?

También se puede encontrar la fórmula del área de un círculo utilizando la fórmula del área de un triángulo, tal como se muestra en la siguiente construcción.

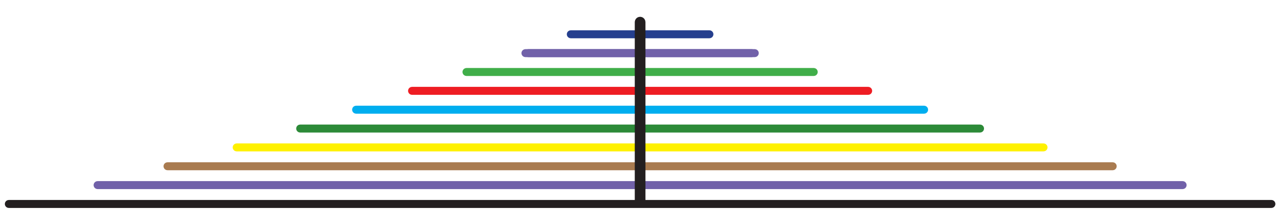
Se identifica con negro la circunferencia y el radio.

Recuerda que la longitud de la circunferencia es:

radio × 2 × π

Cortando hasta el centro de la circunferencia y separando

Se forma un triángulo, donde la base es la longitud de la circunferencia y la altura es el radio.



Luego el área de la circunferencia es la misma que la del triángulo:

Área = base × altura ÷ 2
= longitud de la circunferencia × radio ÷ 2
= (radio × 2 × π) × radio ÷ 2
= radio × radio × π

Unidad 6

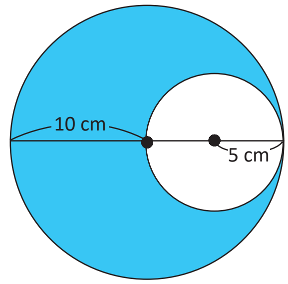
2.3 Cálculo de áreas con círculos

Analiza

Calcula el área de la parte coloreada de celeste.

a. Escribe el **PO**.

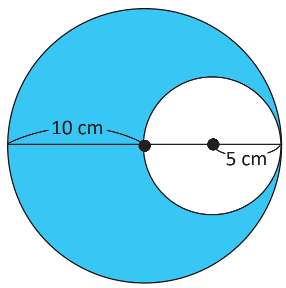
b. Encuentra el área.



Soluciona

Para encontrar el área coloreada, resto al área del círculo grande la del pequeño:


Ana



a. **PO:** $10 \times 10 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14$

b. Área $= 10 \times 10 \times 3.14 - 5 \times 5 \times 3.14$
$= 100 \times 3.14 - 25 \times 3.14$
$= (100 - 25) \times 3.14$
$= 75 \times 3.14$
$= 235.5$

Observa que en la línea 3, usar la propiedad distributiva de la resta sobre la multiplicación facilita los cálculos.

R: 235.5 cm^2

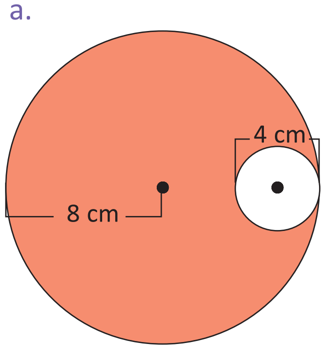
Comprende

Para calcular el área de una región se pueden identificar las figuras involucradas, calcular sus áreas y luego restarlas como corresponda.

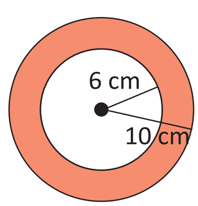
Resuelve

Calcula el área de la parte coloreada en los siguientes círculos:

a.

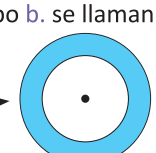


b.



Una región circular es una porción de área dentro de un círculo que puede estar en diferente posición, como en los literales a. y b.
Las regiones circulares del tipo b. se llaman coronas circulares.

corona circular

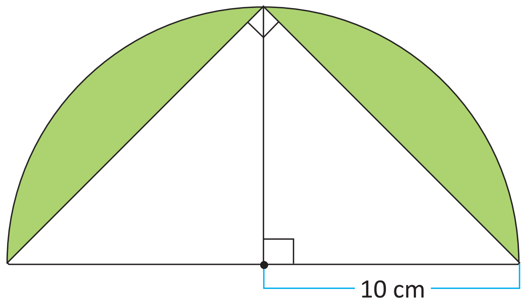


Observa que el centro de ambos círculos es el mismo.

2.4 Cálculo de áreas de regiones diversas

Analiza

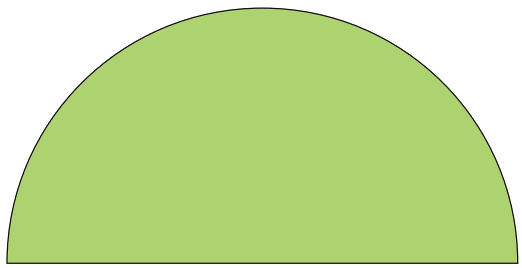
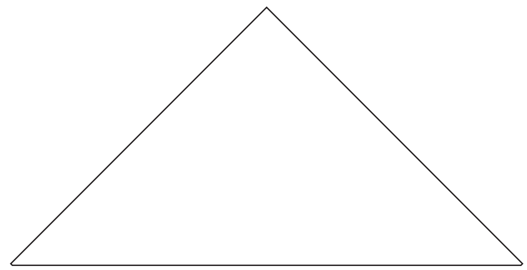
Calcula el área de la región coloreada de verde.



Como en la clase anterior, identifica las figuras que aparecen, recuerda cómo se calculan sus áreas y luego piensa en cómo obtener la que se te pide.

Soluciona


Julia

 – 

área de la mitad del círculo – área del triángulo

$= (10 \times 10 \times 3.14) \div 2 - (20 \times 10) \div 2$
$= 314 \div 2 - 200 \div 2$
$= 157 - 100$
$= 57$

R: 57 cm^2

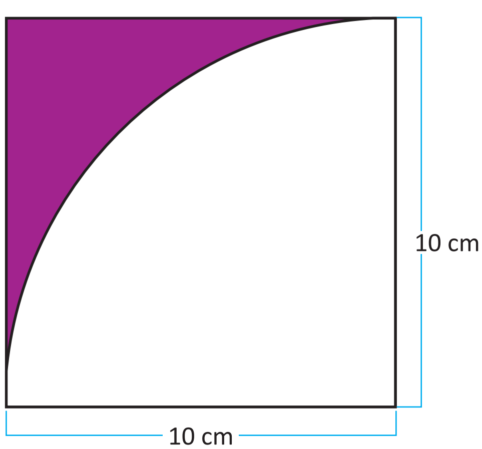
Comprende

Para calcular el área de figuras diversas, puedes encontrar el área de cada figura conocida y luego sumar o restar según la necesidad.

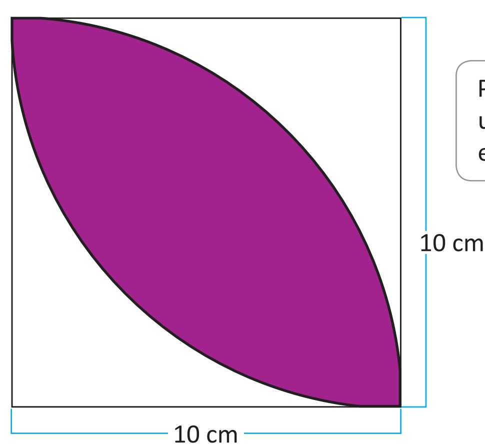
Resuelve

Calcula el área de la región coloreada.

a.



b.

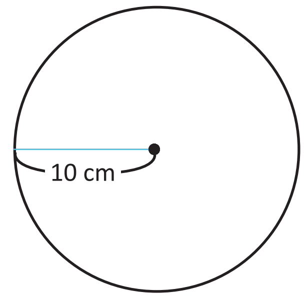


Para el literal b. utiliza el resultado encontrado en a.

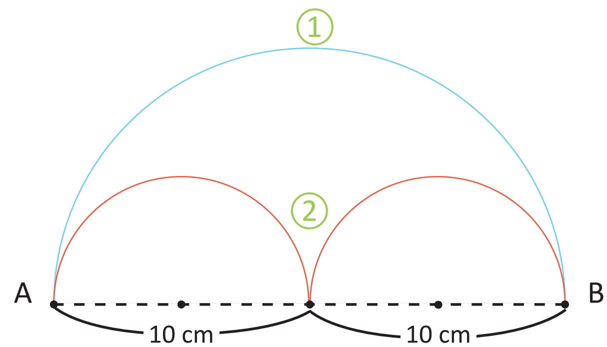
Unidad 6

2.5 Practica lo aprendido

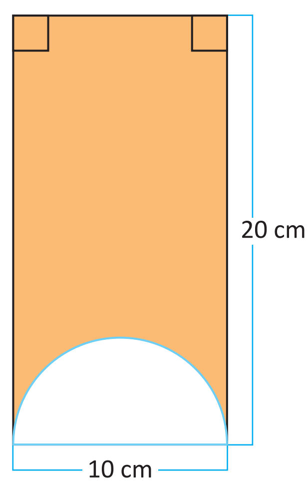
1. Calcula la longitud de la circunferencia, utiliza π en la respuesta.



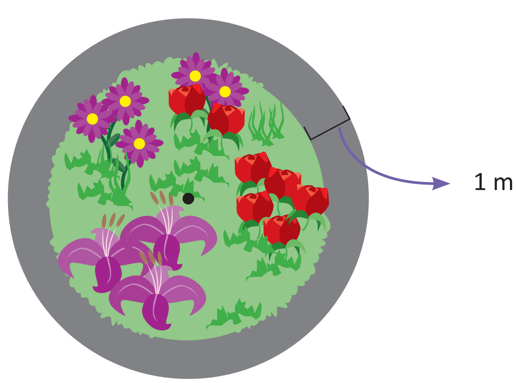
2. Para llegar del punto A al B; ¿cuál es el camino más corto, ① o ②?



3. Calcula el área de la región coloreada.



4. La familia de Beatriz tiene un jardín con forma circular de 3 m de radio. Ellos construirán una acera alrededor del jardín cuyo ancho mide 1 m, ¿cuánto es el área de la acera? Utiliza π.



Unidad 7

Análisis de datos

En esta unidad aprenderás a

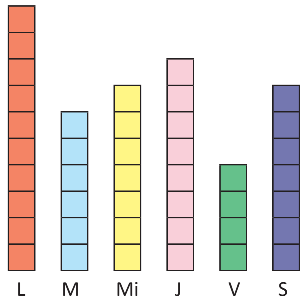
- Calcular la media aritmética de un conjunto de datos
- Encontrar la moda de un conjunto de datos
- Encontrar la mediana de un conjunto de datos

1.1 La media aritmética

Analiza

Un almacén de San Salvador que vende cocinas muestra la siguiente tabla y gráfica, que representan la cantidad que vendió en seis días de una semana. Al suponer que se vendió la misma cantidad cada día, ¿cuántas cocinas se vendieron por día?

Día	Cocinas
lunes (L)	10
martes (M)	6
miércoles (Mi)	7
jueves (J)	8
viernes (V)	4
sábado(S)	7

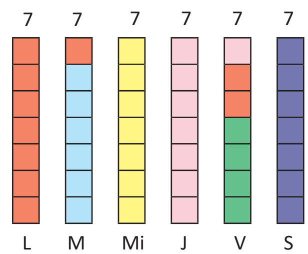


Considera que cada ☐ representa una cocina. Para responder la pregunta, puedes emparejar la altura de las cintas que representan las ventas de cada día, es decir, mueve los ☐ de un día a otro.

Soluciona

Al emparejar el largo de la cinta en cada día, repartiendo equitativamente la cantidad de cocinas entre todos los días, resultan 7 cocinas cada día.

R: 7 cocinas.




Ana

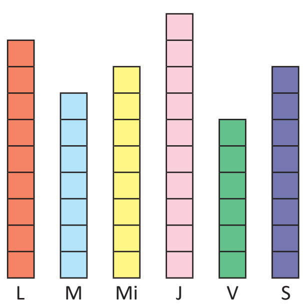
Comprende

Al número de cocinas vendidas en cada día, después haber repartido para emparejar el largo de las cintas, se le llama **media aritmética**. Es decir, en el almacén, la media aritmética de cocinas vendidas por día es 7. En general, la media aritmética es el número que resulta al emparejar cantidades.

Resuelve

1. En el almacén de venta de cocinas, en la sucursal de Santa Ana, se vendió durante seis días la cantidad de cocinas mostradas en la tabla y gráfica.

Día	Cocinas
lunes	9
martes	7
miércoles	8
jueves	10
viernes	6
sábado	8

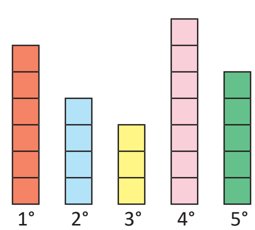


a. ¿Cuál es la media aritmética de cocinas vendidas por día, durante la semana en dicha sucursal?

b. Entre la sucursal de Santa Ana y San Salvador, ¿cuál tiene la mayor media aritmética de cocinas vendidas por día?

2. Para los siguientes datos sobre un torneo de fútbol, calcula la media aritmética de los goles anotados por partido.

Partido	Goles
1.°	6
2.°	4
3.°	3
4.°	7
5.°	5

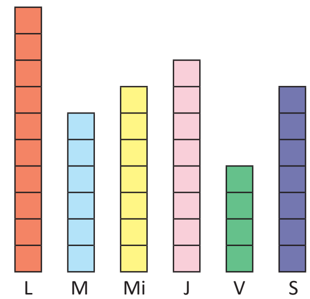


1.2 Fórmula de la media aritmética

Analiza

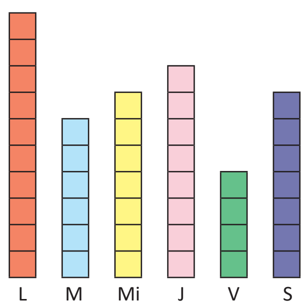
En el mismo problema del Analiza de la clase anterior, ¿cómo puedes encontrar la media aritmética sin tener que dibujar la gráfica, sólo realizando cálculos? Escribe el **PO** y encuentra el resultado.

Apóyate en la gráfica de la sucursal de cocinas de San Salvador y analiza el procedimiento.



Soluciona

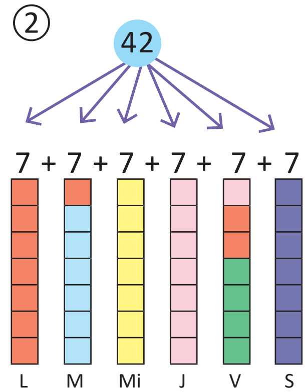

Carmen



① 10 + 6 + 7 + 8 + 4 + 7 = 42

Observo que el procedimiento que realizo es equivalente a saber cuántas cocinas se han vendido en total, luego esa cantidad la divido entre los 6 días.

②



Por lo que, para encontrar la media aritmética solo realizando cálculos sería:

PO: (10 + 6 + 7 + 8 + 4 + 7) ÷ 6

$$(10 + 6 + 7 + 8 + 4 + 7) \div 6 = 42 \div 6$$
$$= 7$$

R: 7 cocinas.

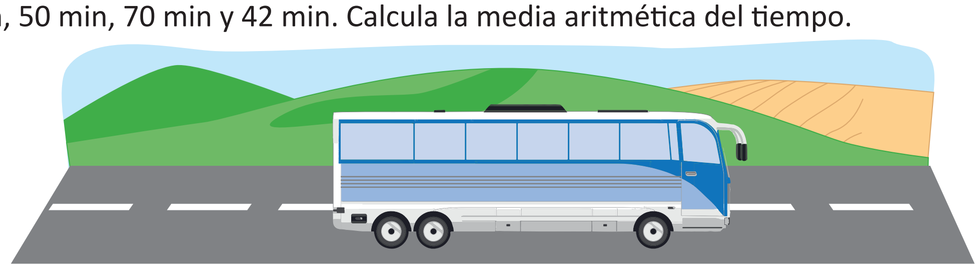
Comprende

Para calcular la media aritmética se puede utilizar la siguiente fórmula:

suma de los datos ÷ cantidad de datos = media aritmética

Resuelve

1. Encuentra la media aritmética de los siguientes puntos logrados por cuatro jugadores: 10, 20, 30, 40.
2. De lunes a viernes una persona come su desayuno y almuerzo fuera de su casa. Los gastos en comida que hace cada día de una semana son: $6, $6, $6, $5, $7. ¿Cuál es la media de los gastos en comida por día?
3. Una persona que viaja en bus desde San Pedro Perulapán hacia San Salvador, siempre a la misma hora, decidió anotar el tiempo que se tardaba en el recorrido; los datos fueron: 80 min, 65 min, 75 min, 80 min, 50 min, 70 min y 42 min. Calcula la media aritmética del tiempo.



1.3 Cálculo de la media aritmética cuando alguno de los datos es cero

Analiza

Un almacén, que vende exclusivamente computadoras, registra durante una semana la cantidad de productos vendidos como se muestra en la tabla. ¿Cuál es la media aritmética de computadoras vendidas por día?

Día	n.° de computadoras
lunes (L)	6
martes (M)	2
miércoles (Mi)	5
jueves (J)	0
viernes (V)	4
sábado (S)	7

Soluciona


José

Utilizo la fórmula de la media:

$(6 + 2 + 5 + 0 + 4 + 7) \div 6 = 4$

R: 4 computadoras.

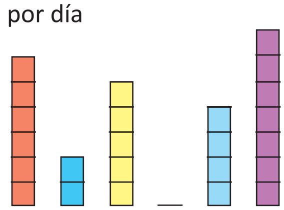
Observa que aunque uno de los datos es cero, siempre se toma en cuenta en la cantidad de datos. Si no se tomara en cuenta se tendría:

$(6 + 2 + 5 + 4 + 7) \div 5 = 4.8$

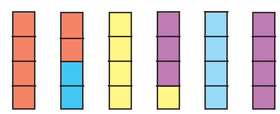
Y aunque la media aritmética puede resultar un número decimal, el procedimiento no es correcto.

Se puede comprobar graficamente la respuesta.

Ventas por día



Luego de repartir:



Comprende

Cuando uno o varios de los datos son iguales a cero, el cálculo de la media aritmética es el mismo y siempre se toman en cuenta para realizar las operaciones.

¿Sabías que...?

La media aritmética puede ser un número decimal. Por ejemplo:
La cantidad de computadoras vendidas de lunes a sábado fue 0, 0, 0, 0, 5, 4. La media aritmética (o simplemente media) de computadoras vendidas por día es:

$$(0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 4) \div 6 = 1.5 \text{ computadoras.}$$

Aunque no se venden 1.5 computadoras, cuando se calcula la media es correcto decir 1.5 computadoras.

Resuelve

Encuentra la media aritmética para cada caso.

1. Cinco niños juegan tiro al blanco, la cantidad de aciertos de los niños fueron: 4, 6, 7, 3, 0.
2. Un meteorólogo registra la temperatura en grados centígrados de una ciudad cada 4 horas al día. Las temperaturas fueron: 2, 0, 4, 20, 24, 16.
3. En un torneo de fútbol en un día se jugaron 5 partidos, la cantidad de goles anotados por partido fueron: 3, 0, 5, 0, 2.

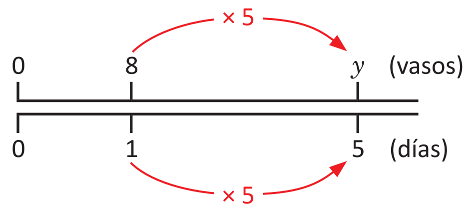
1.4 Cálculo de la suma de datos

Analiza

La media aritmética de la cantidad de vasos con agua que Marta bebió por día, durante 5 días, fue 8. ¿Cuántos vasos con agua bebió en total?

Soluciona

Si la media aritmética de la cantidad diaria de vasos con agua fue 8, entonces al repartir en cantidades iguales, a cada día le correspondieron 8 vasos.



Por lo que la cantidad total de vasos con agua que tomó en 5 días fue: $8 \times 5 = 40$

R: 40 vasos.

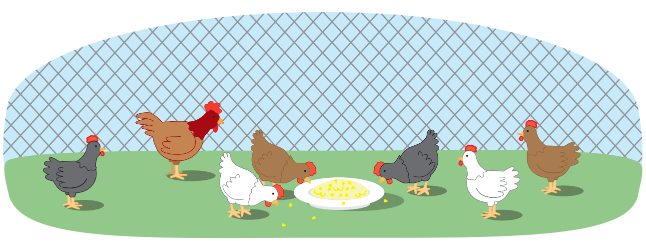
Comprende

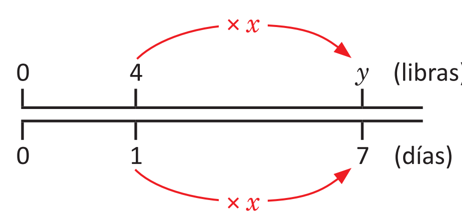
Para calcular la suma de los datos, conociendo la media aritmética por día, se utiliza la siguiente fórmula:

media aritmética × cantidad de datos = suma de los datos

Resuelve

1. La media aritmética de libras de maíz por día que consumen las gallinas de Carlos es 4. ¿Cuál es el total de libras de maíz que consumen en 7 días?



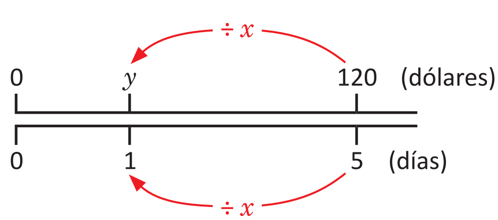


2. La media aritmética de la distancia que recorre cada día Miguel es de 5 km, ¿cuántos kilómetros recorre en 30 días?

3. La media aritmética del ahorro por día de una persona es de $2, ¿cuánto dinero ahorrará en 10 días?

Desafíate

Dos hermanos ahorran la cantidad total de $120 y la media aritmética del dinero ahorrado por día es $2. ¿En cuántos días ahorraron la cantidad total?



1.5 Aplicación de la media aritmética

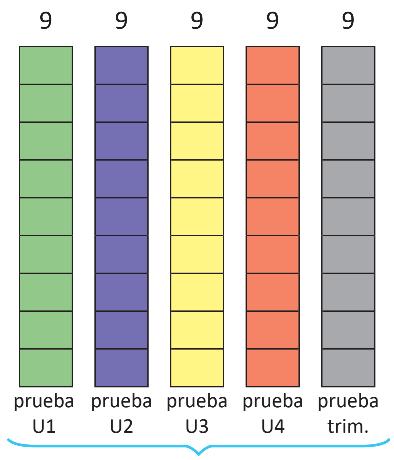
Analiza

Julia realizó 4 pruebas de unidad en Matemática y la prueba de trimestre, la profesora le dice que obtuvo una media de 9 puntos. Las notas de las pruebas de unidad son: 8, 9, 8 y 10. ¿Cuál es la nota de la prueba de trimestre?

Soluciona

Como la media es 9, significa que a cada evaluación le corresponden 9 puntos:

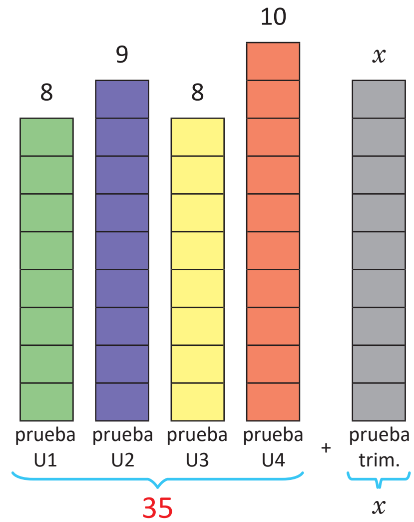
Mario



$9 \times 5 = 45$

① Total de puntos $9 \times 5 = 45$

Reparto a cada tarea el puntaje obtenido, me queda:



Luego de repartir, lo que sobra es el puntaje de la prueba de trimestre.

② $8 + 9 + 8 + 10 + x = 45$

③ Encontrando la nota:

$$35 + x = 45$$
$$x = 45 - 35$$
$$x = 10$$

R: 10 puntos.

Comprende

En algunos casos no se tiene el valor de todos los datos, pero conociendo la media aritmética pueden calcularse los que se desconocen. Pasos:

① Calcular el valor total de los datos.
② Establecer la relación entre los datos y el valor total.
③ Restar el valor de los datos que se conocen.

Resuelve

1. La media de la edad de 5 integrantes de una familia es 16 años. Si la madre tiene 30, el padre 32, el primer hijo 9 y el segundo 6, ¿cuántos años tiene el hijo menor?

2. En un torneo de ajedrez, la media del tiempo que duraron 4 de las partidas fue 45 min. Si los tiempos que se tardaron tres de ellas fueron 60 min, 40 min y 55 min, ¿cuánto se tardó la cuarta partida?

El primer programa creado para jugar al ajedrez lo realizó Alan Turing en 1951. Sin embargo, las computadoras no estaban preparadas para su uso, así que él mismo hacía los cálculos y jugaba de acuerdo a ellos.

3. Se lleva el conteo del número de huevos que ponen un grupo de gallinas de lunes a viernes. La media aritmética de los huevos puestos por las gallinas durante la semana fue 4. El lunes pusieron 5, el martes 4, el miércoles 3 y el viernes 5. ¿Cuántos huevos pusieron el día jueves?

1.6 Cálculo de nuevas medias aritméticas

Analiza

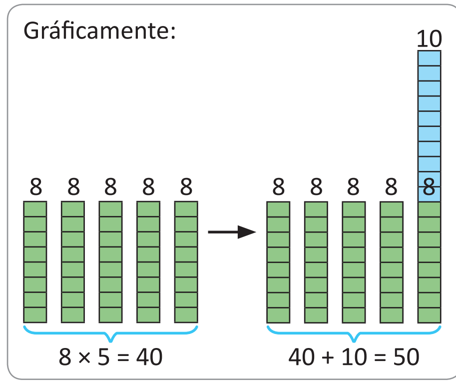
En 5 días de trabajo, una costurera iba a confeccionar una cantidad de vestidos cuya media fuera de 8 por día. Pero el viernes elaboró 10 vestidos más. ¿Cuál fue la media aritmética de vestidos elaborados por día?

Soluciona

Observo que, como iba a elaborar una cantidad de vestidos cuya media aritmética fuera de 8 por día, entonces:

① Total de vestidos que iba a elaborar: 8 × 5 = 40
② Nuevo total de vestidos: 40 + 10 = 50; porque elaboró 10 vestidos más.
③ Para obtener la media de vestidos elaborados por día divido: 50 ÷ 5 = 10. Por lo tanto, la nueva media de vestidos elaborados por día es 10.

R: 10 vestidos.



Comprende

En algunos casos se conoce la media aritmética para cierta cantidad de datos; al incrementar uno de los datos, la nueva media aritmética se calcula realizando lo siguiente:

① Se calcula el valor total de los datos.
② Se suma el valor en que se ha incrementado uno de los datos.
③ Se calcula el nuevo valor de la media aritmética.

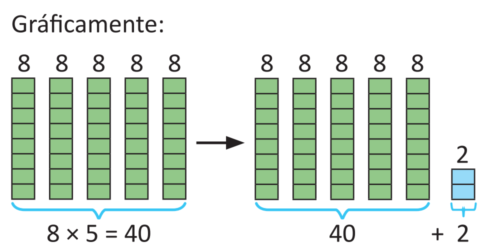
¿Qué pasaría?

En 5 días de trabajo, una costurera confecciona una cantidad de vestidos cuya media aritmética es de 8 por día. En una determinada semana trabaja un día extra en el que solo elabora 2 vestidos, ¿cuál es la media aritmética de vestidos elaborados en esa semana de trabajo?

① Total de vestidos sin día extra: 8 × 5 = 40
② Total de vestidos con día extra: 40 + 2 = 42
③ Total de días de trabajo en esa semana: 5 + 1 = 6
④ Media aritmética: 42 ÷ 6 = 7

R: 7 vestidos.

Observa que como se aumentó un día, se aumentó en uno el divisor.



Resuelve

1. José participa en un proyecto de plantación de árboles. De febrero a julio, José tuvo una media aritmética de 12 árboles plantados por mes.
   a. Si José plantó 6 árboles más en mayo, que no fueron contados para calcular la media aritmética, ¿cuál es la nueva media aritmética de los árboles plantados por mes?
   b. José decide que en agosto plantará 20 árboles frutales. ¿Cuál es la media aritmética de los árboles plantados por mes en el periodo de febrero a agosto?

2. Una familia pagó su factura mensual de energía eléctrica durante 7 meses. Se calcula que su media aritmética de pago por factura fue de $12 por mes. Si para el octavo mes tienen que pagar $20, ¿cuál será la media aritmética de pago por mes en su factura durante los 8 meses?

1.7 Practica lo aprendido

1. Encuentra la media aritmética de los siguientes puntos logrados por cuatro jugadores: 15, 35, 20, 10.

2. La media de libras de maíz que consumen las gallinas de Ana es 6 por día. ¿Cuál es el total de libras de maíz que consumen en 4 días?

3. Cinco niños juegan tiro al blanco, la cantidad de aciertos de los niños fue: 8, 7, 0, 5, 10. ¿De cuánto es la media aritmética de aciertos por niño?

4. La media aritmética de la edad de 4 integrantes de una familia es de 15 años. Si la madre tiene 27, el padre 28 y el segundo hijo 2, ¿cuántos años tiene el hijo mayor?

5. Antonio participa en un proyecto de plantación de árboles. De enero a junio tuvo una media aritmética de 10 árboles plantados por mes.
   a. En abril, Antonio plantó 6 árboles más de los contados inicialmente en ese mes. ¿Cuál es la nueva media aritmética de árboles plantados por mes?

   b. Antonio decide que en julio sembrará 32 árboles. ¿Cuál es la media aritmética de los árboles plantados por mes en el periodo de enero a julio?

6. Utilizando la fórmula de la media aritmética resuelve los siguientes problemas.
   a. La cantidad de cuadros vendidos por día en una galería de arte durante siete días fue de 5, 8, 10, 6, 7, 9 y 4. Encuentra la media aritmética de los cuadros vendidos por día.

   b. La cantidad de inasistencias de los estudiantes en un grado por día, durante una semana, se muestra en la tabla. Si se sabe que la media aritmética de inasistencias es de 5 personas por día, calcula el dato faltante en la tabla.

Día	Inasistencia
lunes (L)	4
martes (M)	8
miércoles (Mi)	3
jueves (J)	x
viernes (V)	6

7. Durante la clase de Matemática se hicieron 5 evaluaciones; en ellas, Beatriz obtuvo una media aritmética de 8 puntos, luego realizó una evaluación extra en la que obtuvo 2 puntos. ¿Cuál fue la nueva media aritmética de sus notas?

2.1 Moda

Analiza

La profesora de sexto grado desea regalarle frutas a sus estudiantes, según su preferencia. Las frutas seleccionadas fueron: jocotes, papaya, mango, níspero, mango, jocotes, anona, papaya, mango, nance, jocotes, mango, piña, sandía, jocotes, marañón, piña, papaya, níspero, papaya, mango.

Frutas	Número de estudiantes que la prefieren	Frutas	Número de estudiantes que la prefieren
jocote		nance	
papaya		piña	
mango		sandía	
níspero		marañón	
anona			

a. Para cada fruta, determina cuántos estudiantes la escogieron y completa la tabla.
b. Identifica la fruta preferida por más estudiantes.

Soluciona

a. Completo la tabla:


Ana

Frutas	Número de estudiantes que la prefieren	Frutas	Número de estudiantes que la prefieren
jocote	4	nance	1
papaya	4	piña	2
mango	5	sandía	1
níspero	2	marañón	1
anona	1		

b. Observo la tabla, la fruta que es preferida por más estudiantes es el mango, ya que es el que aparece más veces en el conjunto de las frutas preferidas.

R: Mango.

Comprende

La **moda** es el valor, objeto o característica que más se repite en los datos.

¿Sabías que...?

Cuando hay dos modas en un conjunto de datos, se dice que el conjuto es **bimodal**.

Resuelve

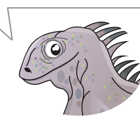
1. En una venta de helados, durante una semana, se anotaron cuántos se vendieron y el sabor de cada uno, la información se muestran en la tabla. ¿Cuál es la moda de los sabores?

Sabores	Número de helados vendidos
fresa	30
chocolate	60
vainilla	59
chicle	40

2. Se le pregunta a un grupo de estudiantes la cantidad de libros que ha leído cada uno, sus respuestas son: 2, 6, 1, 5, 5, 3, 4, 1, 2, 5, 5, 6, 2, 1, 2. ¿Cuál es la moda de la cantidad de libros leídos?

Cantidad de libros leídos	Número de niños
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Utiliza el número de niños que leyeron cada cantidad de libros para determinar en qué cantidad de libros leídos está la moda.



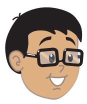
2.2 Mediana de una cantidad impar de datos

Analiza

Las edades de 7 estudiantes son: 12, 14, 15, 16, 10, 13, 9.
Al ordenar las edades de menor a mayor, ¿cuál edad queda justo en medio?

Soluciona

Ordenando las edades de menor a mayor:



Carlos

$$\overbrace{9 \quad 10 \quad 12}^{\text{tres edades}} \quad \boxed{13} \quad \overbrace{14 \quad 15 \quad 16}^{\text{tres edades}}$$

Observa que, si se ordenan de mayor a menor, el centro siempre corresponde a 13.

R: La edad que queda al centro es 13 años.

Comprende

Cuando se tiene una cantidad impar de datos y se ordenan de menor a mayor, o de mayor a menor, el **valor** que queda en la posición central se llama **mediana**.

Para encontrar la mediana cuando la cantidad de datos es impar:
① Se ordenan los datos.
② Se encuentra el dato que ocupa la posición central.

$$\overbrace{12 \quad 13} \quad \overset{\text{mediana}}{\boxed{18}} \quad \overbrace{21 \quad 30}$$

¿Qué pasaría?

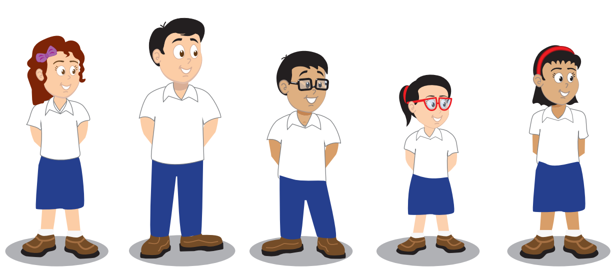
Si los 7 estudiantes tuvieran 12 años ¿cuál será la mediana?

$$\overbrace{12 \quad 12 \quad 12}^{\text{tres edades}} \quad \boxed{12} \quad \overbrace{12 \quad 12 \quad 12}^{\text{tres edades}}$$

R: La mediana es 12 años.

Resuelve

1. Para el Acto Cívico, los estudiantes deben formarse en una fila por orden de estatura. Encuentra la mediana de las estaturas.



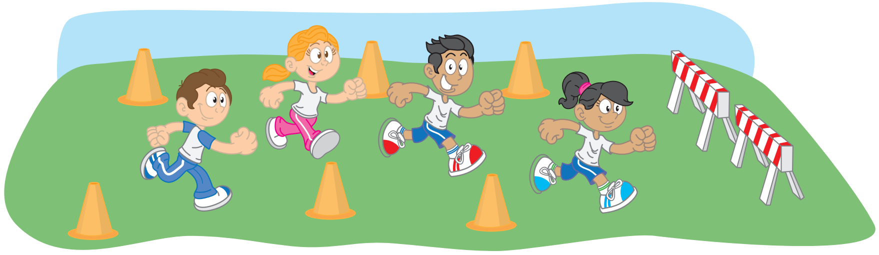
158 cm 162 cm 150 cm 140 cm 155 cm

2. Un jugo es vendido en recipientes de diferentes tamaños: 200 ml, 335 ml, 250 ml, 406 ml, 500 ml, 750 ml, 1000 ml. ¿Qué cantidad de mililitros es la mediana?

2.3 Mediana de una cantidad par de datos

Analiza

Durante la clase de Educación Física, 6 estudiantes de diferentes edades participan en una carrera de obstáculos durante 20 segundos. La distancia que recorrió cada niño fue: 100 m, 150 m, 150 m, 90 m, 170 m y 110 m. ¿Cuál sería la mediana de las distancias recorridas?



Encuentra el valor que está entre las dos distancias de las posiciones centrales.

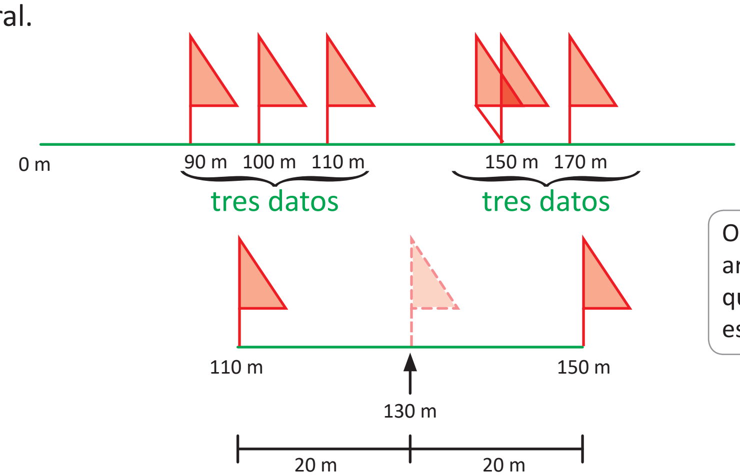
Soluciona

Haciendo un dibujo, ordeno de menor a mayor las distancias. Como la cantidad de datos es par, no hay un dato en la posición central.

Para encontrar el valor que está entre las distancias centrales, se calcula la media de esos dos valores:

$(110 + 150) \div 2 = 130$

R: La mediana es 130 m.

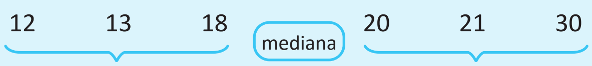


Observa que la media aritmética de 110 y 150 queda en el centro de estos valores.

Comprende

Cuando la cantidad de datos sea par, entonces al ordenar los datos de menor a mayor (o de mayor a menor), la mediana será el valor que se encuentra entre los dos datos centrales.

Para encontrar la mediana cuando la cantidad de datos es par:
① Se ordenan los datos.
② Se calcula la media aritmética de los dos datos centrales.



La mediana es la media aritmética de 18 y 20.

¿Qué pasaría?

Si las edades de 6 estudiantes de sexto grado son: 11, 12, 11, 12, 13, 12, ¿cuál es la mediana? Ordenando las edades 11, 11, 12, 12, 12, 13 en este caso, la cantidad de datos es par, pero los dos datos en el centro son 12, así que la mediana es 12.

Resuelve

1. Encuentra la mediana de los siguientes números: 10, 6, 12, 5, 7, 4, 9 y 9.

2. Para la entrega de uniformes escolares se les preguntó a los estudiantes qué tallas de zapatos utilizan; las respuestas fueron: 33, 32, 31, 36, 33, 31, 34, 35, 36, 30. Encuentra la mediana.

3. Encuentra la mediana de los datos siguientes: 14, 15, 12, 11, 18 y 17.

2.4 Practica lo aprendido

1. En una venta de helados, durante una semana, se anotaron cuántos se vendieron y el sabor de cada uno, la información se muestran en la tabla. ¿Cuál es la moda de los sabores?

Sabores	Número de helados vendidos
fresa	10
chocolate	37
vainilla	15
chicle	42

2. Julia y Juan hicieron una encuesta con sus amigos, ellos preguntaron qué profesión desearían tener cuando sean grandes. Sus amigos respondieron: matemático, médico, físico, estadístico, biólogo, químico, matemático, profesor, estadístico, físico, estadístico. ¿Cuál es la moda de las profesiones?

3. Encuentra la mediana de los siguientes números: 5, 1, 8, 2, 7, 5 y 8.

4. Para las siguientes estaturas en cm: 132 , 104, 142, 127, 113, 122, 113, 137, 142, 107 y 162, encuentra la mediana.

5. Las áreas en kilómetros cuadrados de los siguientes departamentos de El Salvador son: Cuscatlán 756 km^2, La Libertad 1, 653 km^2, La Unión 2, 074 km^2, Morazán 1, 447 km^2, San Vicente 1, 184 km^2, Sonsonate 1, 226 km^2. Encuentra la mediana de las áreas de los departamentos.

6. El tiempo que se tardaron seis amigos en realizar una multiplicación de dos números mixtos fue: 10 min, 7 min, 12 min, 8 min, 10 min. Encuentra la mediana del número de minutos empleados para hacer la multiplicación.

Unidad 8

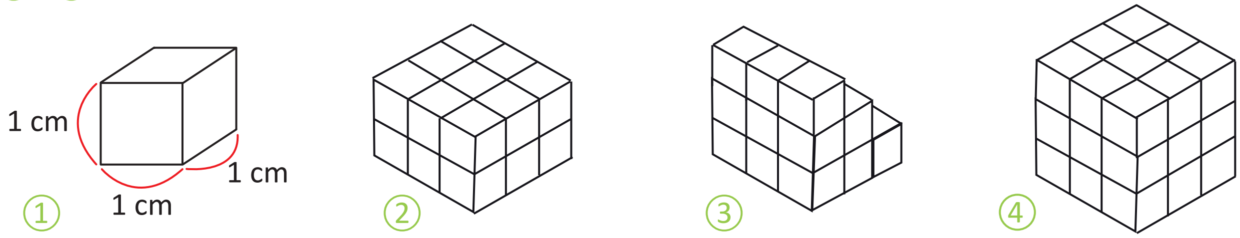
Volumen de cubos y prismas rectangulares

En esta unidad aprenderás a

- Calcular el volumen de cubos y prismas rectangulares
- Utilizar el centímetro cúbico y el metro cúbico como unidades de medida de volumen
- Calcular el volumen de cuerpos geométricos compuestos
- Utilizar la relación entre volumen y capacidad

Analiza

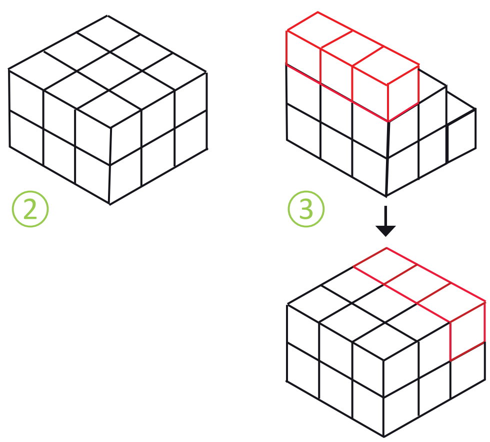
Hay varias cantidades de cubos de madera del tamaño que se ve en ①. Observa los cuerpos geométricos ②, ③ y ④ construidos con esos cubos, ¿cuál de ellos ocupa mayor espacio?



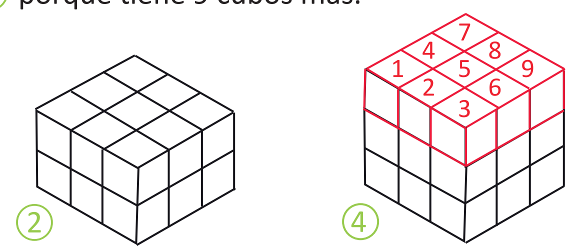
Soluciona


José

Comparo los tres cuerpos geométricos y observo que al modificar la forma de ③, este es igual a ②. Por lo tanto, ocupan igual espacio.



Luego, comparo los cuerpos geométricos ② y ④, y observo que ④ ocupa más espacio que ② porque tiene 9 cubos más.



Como ④ ocupa más espacio que ②, y ② y ③ ocupan igual espacio, entonces ④ es el cuerpo geométrico que ocupa mayor espacio.

R: ④ es el cuerpo geométrico que ocupa mayor espacio.

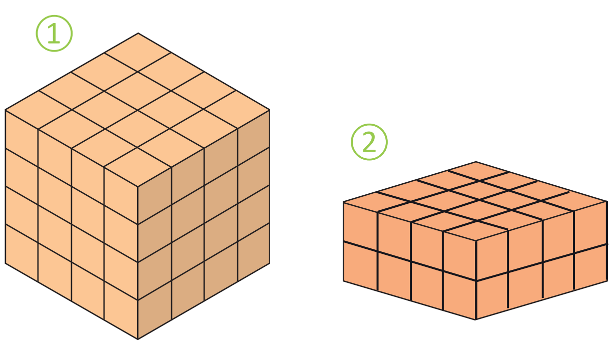
Comprende

- La medida del espacio que ocupa un cuerpo geométrico recibe el nombre de **volumen**; así, el cuerpo geométrico de mayor volumen es aquel que ocupa más espacio.
- El volumen de un cuerpo geométrico se mide a través del número de cubos de arista 1 cm que lo forman.
- Dos cuerpos geométricos con diferente forma pueden tener el mismo volumen.

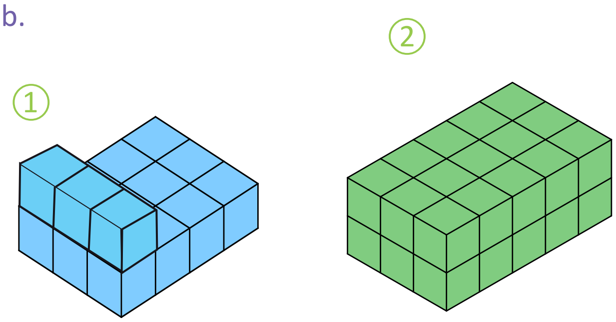
Resuelve

Los siguientes cuerpos geométricos se han construido utilizando cubos de arista 1 cm. En cada literal, ¿cuál es la relación entre las medidas de los volúmenes de los cuerpos geométricos ① y ②?

a.

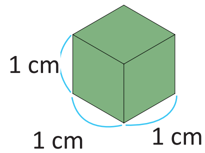


b.



1.2 El centímetro cúbico

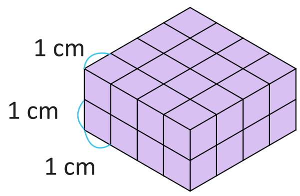
Analiza

El volumen de este cubo 

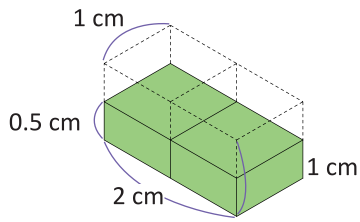
es 1 cm³ y se lee "un centrímetro cúbico".

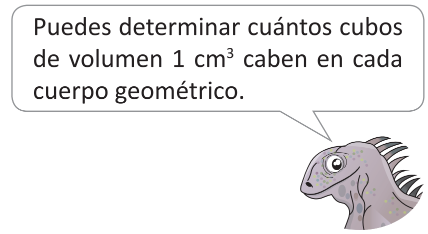
Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de los siguientes cuerpos geométricos:

a.



b.

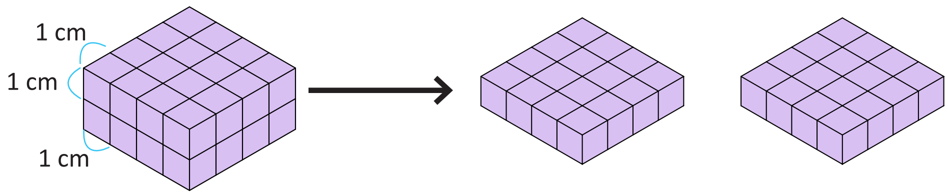




Soluciona

Cuento los cubos de volumen 1 cm³ que caben en cada cuerpo:

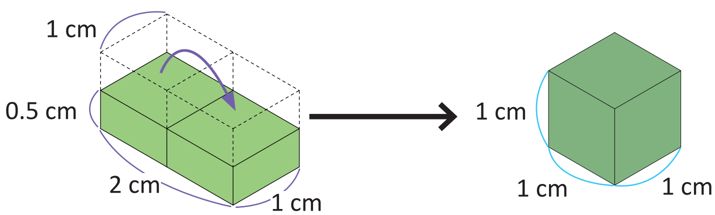
a.

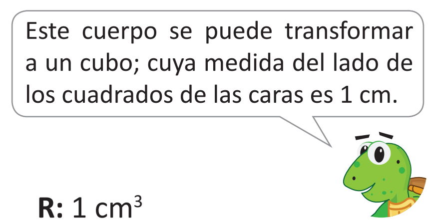


En este prisma rectangular caben 32 cubos de volumen 1 cm³.

R: 32 cm³

b. Pienso en cómo formar un cubo:



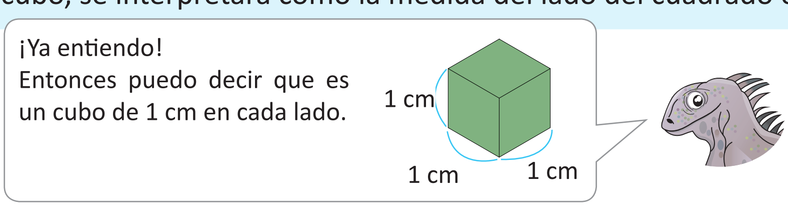


R: 1 cm³

Comprende

- El volumen de un cuerpo es la cantidad de cubos de volumen 1 cm³ que caben en él.
- Si el cuerpo no está compuesto por cubos completos se pueden acomodar las partes para formar cubos de volumen 1 cm³.

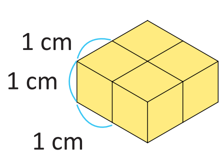
Para el caso de a., el volumen es 32 cm³, y para b. es 1 cm³. A partir de este momento siempre que se hable del lado de un cubo, se interpretará como la medida del lado del cuadrado en la cara del cubo.



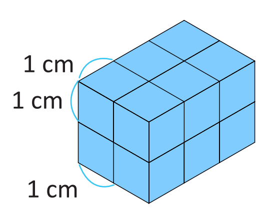
Resuelve

Encuentra el volumen de los siguientes cubos y prismas rectangulares.

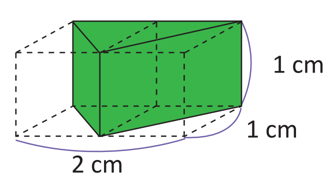
a.



b.



c.



1.3 Volumen de un prisma, parte 1

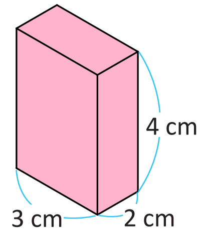
Analiza

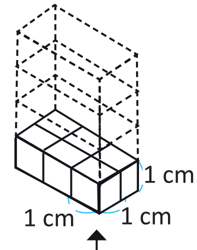
Piensa cómo calcular el volumen del siguiente prisma rectangular.

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado caben en la primera capa?

b. ¿Cuántas capas hay?

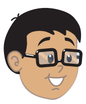
c. ¿Cuál es el volumen del prisma rectangular?





primera capa

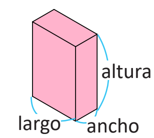
Soluciona



Carlos

a. En la primera capa caben 3 cubos a lo largo y 2 cubos a lo ancho.
Entonces hay 3 × 2 = 6 cubos de 1 cm de lado en la primera capa.
R: 6 cubos.

En un prisma tienes:



b. La altura del prisma rectangular es 4 cm, entonces hay 4 capas.
R: 4 capas.

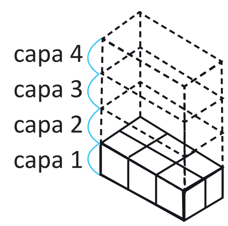
c. En la primera capa caben 6 cubos y hay 4 capas. Entonces:

PO: 6 × 4

6 × 4 = 24

Número de cubos en la primera capa — Número de capas

R: 24 cm³



Comprende

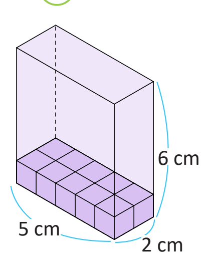
Para determinar el volumen de un prisma rectangular o un cubo, no es necesario contar todos los cubos que lo forman, basta con multiplicar el número de cubos de 1 cm de lado de la primera capa por el número de capas.

volumen del prisma rectangular = **número de cubos en la primera capa** × **número de capas**

Resuelve

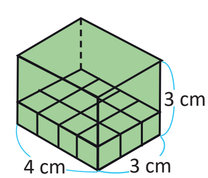
1. Observa el prisma rectangular ① y responde:
   a. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado hay en la primera capa?
   b. ¿Cuántas capas hay?
   c. ¿Cuál es el volumen?

①



2. Observa el prisma rectangular ② y responde:
   a. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado hay en la primera capa?
   b. ¿Cuántas capas hay?
   c. ¿Cuál es el volumen?

②

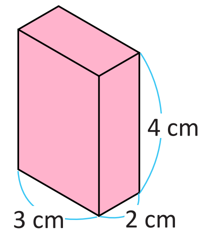


1.4 Volumen de un prisma, parte 2

Analiza

Piensa cómo calcular el volumen del siguiente prisma.

a. ¿Cuál es el área de la base del prisma?
b. ¿Cuál es la altura?
c. ¿Cuál es el volumen del cubo?



Soluciona


Ana

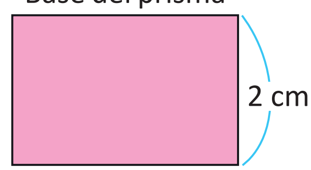
a. El área de la base del prisma es 3 × 2 = 6.
   R: 6 cm^2
b. La altura del prisma es de 4 cm.
   R: 4 cm
c. Volumen: área de la base × ancho

PO: 6 × 4

6 × 4 = 24

área de la base del prisma ↙ ↘ altura del prisma

R: 24 cm^3



Observa que, el área de la base del prisma se obtiene multiplicando su largo por el ancho al igual que se calculó el número de cubos en la primera capa en la clase anterior. La cantidad de centímetros de la altura es igual al número de capas que se formarían en el prisma.

Comprende

Para calcular el volumen de un prisma rectangular se puede utilizar lo siguiente:

volumen del prisma rectangular = área de la base del prisma × altura del prisma

Por lo que se puede calcular directamente el volumen con la relación:

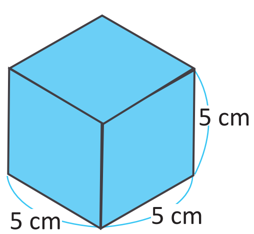
volumen del prisma rectangular = largo × ancho × altura

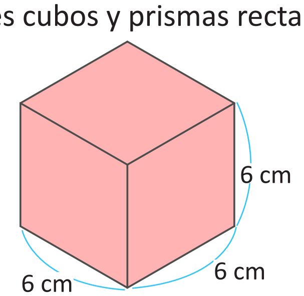
El cubo también es un prisma rectangular, por lo que su volumen se calcula con esta misma fórmula; pero como los lados de un cubo son de igual longitud, la fórmula para encontrar su volumen se puede escribir así:

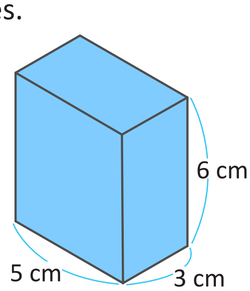
volumen del cubo = lado × lado × lado

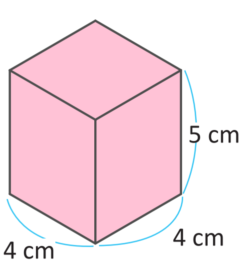
Resuelve

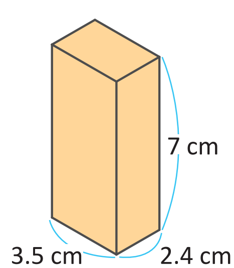
Calcula el volumen de los siguientes cubos y prismas rectangulares.

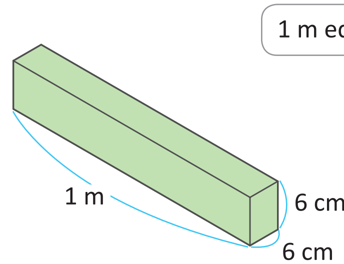
a.


b.


c.


d.


e.


f.


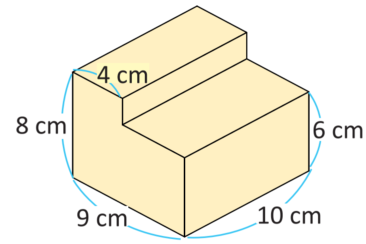
1 m equivale a 100 cm.

Unidad 8

1.5 Volumen de cuerpos geométricos compuestos (descomponiendo)

Analiza

¿Cuál es el volumen del siguiente cuerpo geométrico?

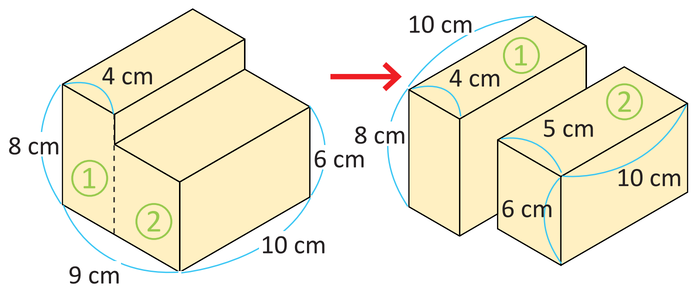


Soluciona

José

Forma 1

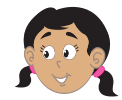
Descompongo en dos prismas rectangulares, en forma vertical.



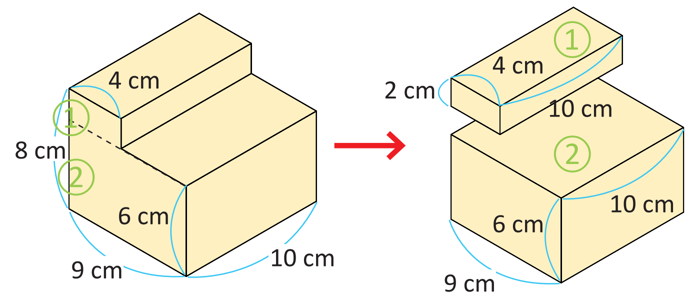
Para 1, $10 \times 4 \times 8 = 320$.
Para 2, $10 \times 5 \times 6 = 300$.
El volumen total es: $320 + 300 = 620$ cm^3.
R: 620 cm^3

Forma 2

Descompongo en dos prismas rectangulares en forma horizontal de la siguiente manera:



Beatriz



Para 1, $10 \times 4 \times 2 = 80$.
Para 2, $10 \times 9 \times 6 = 540$.
El volumen total es: $80 + 540 = 620$ cm^3.
R: 620 cm^3

Puede ser un solo **PO.**
PO: $10 \times 4 \times 8 + 10 \times 5 \times 6$
$10 \times 4 \times 8 + 10 \times 5 \times 6 = 320 + 300$
$= 620$
R: 620 cm^3

Puede ser un solo **PO.**
PO: $10 \times 4 \times 2 + 10 \times 9 \times 6$
$10 \times 4 \times 2 + 10 \times 9 \times 6 = 80 + 540$
$= 620$
R: 620 cm^3

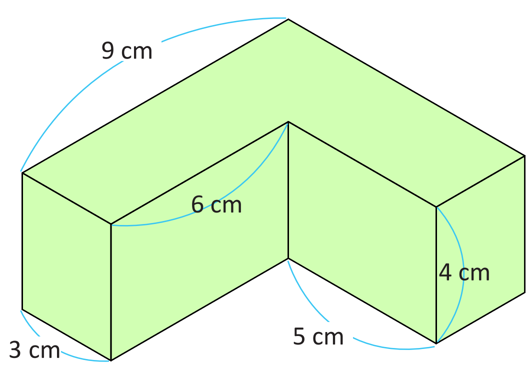
Comprende

Para calcular el volumen de cuerpos geométricos compuestos, se puede:
1. Separar en prismas rectangulares y calcular sus volúmenes.
2. Sumar los volúmenes.

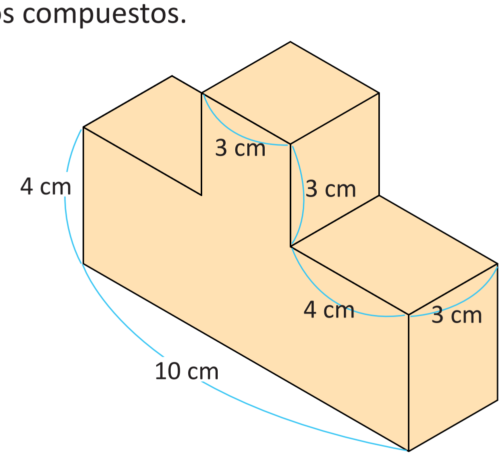
Resuelve

Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos compuestos.

a.



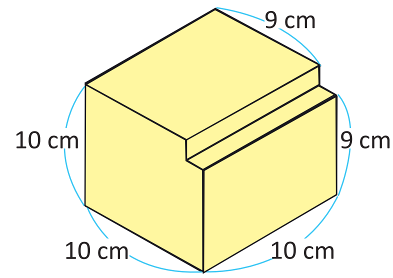
b.



1.6 Volumen de cuerpos geométricos compuestos (completando)

Analiza

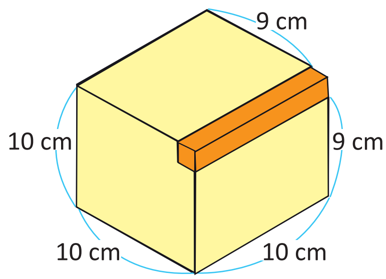
¿Cuál es el volumen del siguiente cuerpo geométrico?



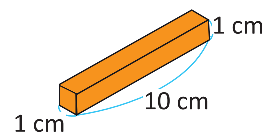
Soluciona

Mario

① Completo un cubo. Calculo el volumen del cubo completo y luego el del cuerpo geométrico agregado.

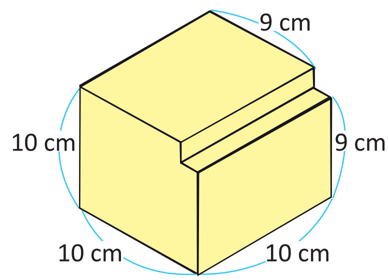


$10 \times 10 \times 10 = 1000$



$1 \times 10 \times 1 = 10$

② Al volumen del cubo le resto el volumen agregado.



$1000 - 10 = 990$

R: 990 cm^3

Puede ser un solo **PO.**

PO: $10 \times 10 \times 10 - 1 \times 10 \times 1$

$10 \times 10 \times 10 - 1 \times 10 \times 1 = 1000 - 10$

$= 990$ **R:** 990 cm^3

Comprende

Para calcular el volumen de cuerpos geométricos compuestos, se puede:

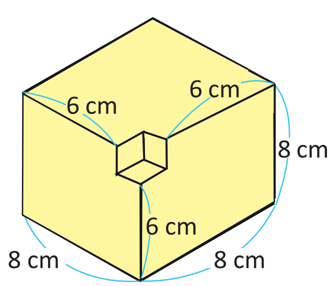
① Completar un prisma rectangular y calcular el volumen del cuerpo completo y luego del cuerpo agregado.

② Del volumen completo restar el volumen agregado.

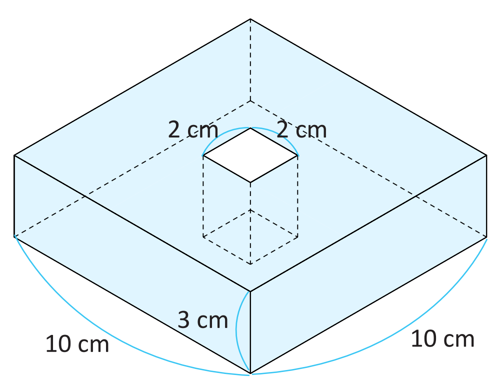
Resuelve

Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos compuestos completando un cubo o prisma rectangular.

a.



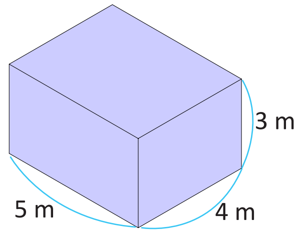
b.



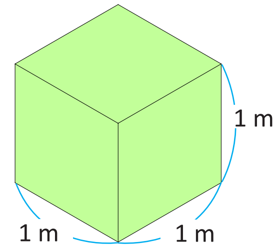
1.7 Volúmenes en metros cúbicos

Analiza

1. ¿Cuántos cubos de 1 m de lado caben en el siguiente prisma rectangular?



2. ¿Cuántos centímetros cúbicos caben en un cubo de 1 m (100 cm) de lado?

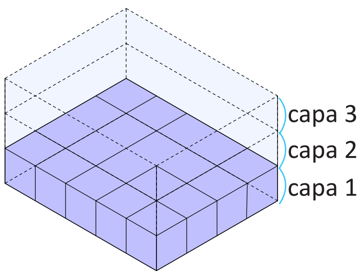


Soluciona


Julia

Como el número de cubos de 1 cm o 1 m de lado que caben en el prisma (o cubo) es igual al resultado de hacer: el número de cubos en la primera capa × número de capas. Entonces:

1.

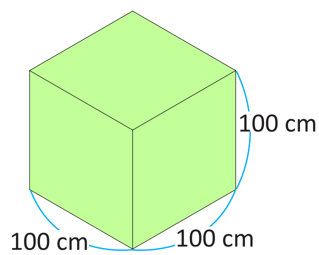


PO: $(5 \times 4) \times 3$

$5 \times 4 \times 3 = 60$

R: 60 cubos.

2.

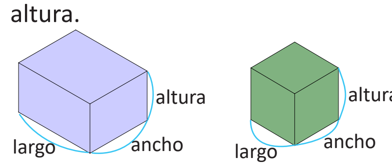


PO: $(100 \times 100) \times 100$

$100 \times 100 \times 100 = 1,000,000$

R: $1,000,000$ cm^3

Recuerda que en un prisma o cubo:
- El número de cubos que caben en la primera capa es igual al resultado de:
  largo × ancho
- El número de capas es igual a la cantidad de centímetros o metros en la altura.



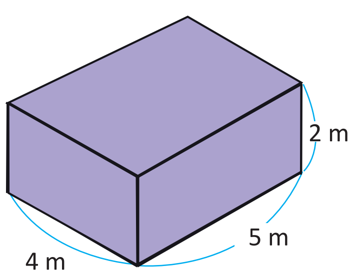
Comprende

- El volumen de un cubo de 1 m de lado se le llama "**un metro cúbico**" y se escribe 1 m^3.
- Para calcular volúmenes grandes se utiliza el metro cúbico como unidad de medida.
- Además, se tiene la siguiente relación: 1 m^3 = $1,000,000$ cm^3.

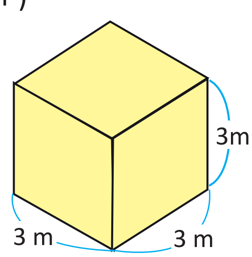
Resuelve

Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos en m^3 o cm^3, según la indicación:

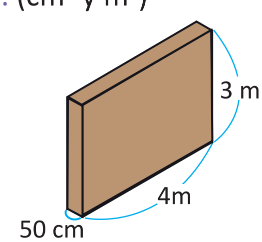
a. (m^3)



b. (m^3)



c. (cm^3 y m^3)



1.8 Relación entre volumen y capacidad

Recuerda

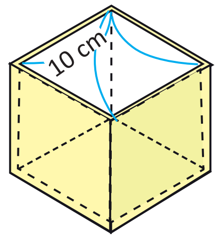
Completa: 1 litro = ☐ ml.

Analiza

En un recipiente con forma de cubo y una longitud interior de 10 cm de lado:

a. ¿Cuántos cm^3 de agua caben en su interior?

b. En el interior del recipiente cabe 1 litro de agua. ¿Qué relación hay entre el volumen y la capacidad del recipiente?



La capacidad se refiere a la cantidad de líquido que puede contener un cuerpo.

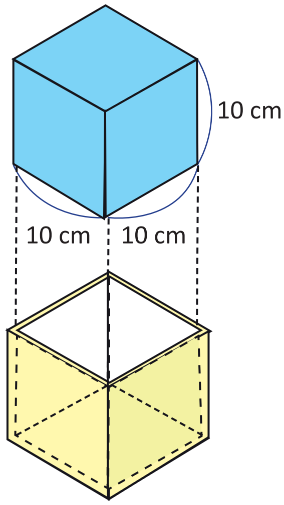
Soluciona

a. El volumen de agua que el recipiente puede contener en el interior se calcula efectuando 10 × 10 × 10:

$$10 \times 10 \times 10 = 1,000$$

Carlos

R: 1, 000 cm^3



b. Como el volumen del recipiente es 1, 000 cm^3 y la capacidad del recipiente es 1 litro, entonces la relación que hay es la siguiente:

$$1,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro}$$

Comprende

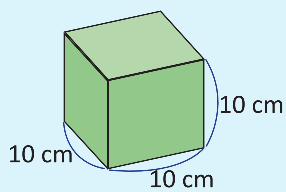
La capacidad es el volumen que puede contener un recipiente en su interior.

- Relación entre centímetros cúbicos y litros:

  $$1,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litro}$$

- Como 1 litro = 1, 000 ml, entonces:

  $$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$$

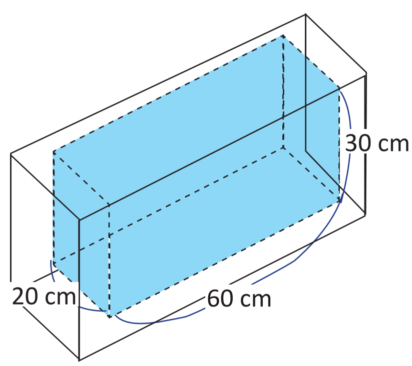


Resuelve

Dadas las longitudes interiores del depósito:

a. Calcula el volumen.

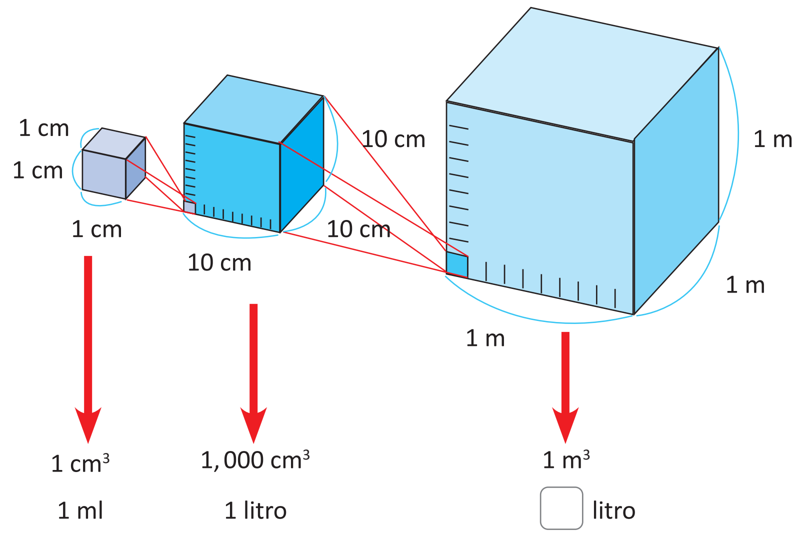
b. Calcula la capacidad en litros.



1.9 Equivalencias entre las unidades de capacidad y de volumen

Analiza

Observa la relación entre volumen y capacidad. ¿A cuántos litros equivale 1 m^3?



Soluciona

Calculo cuántos cubos de 1 litro de capacidad caben en 1 m^3.


Carmen

A lo largo caben 10, a lo ancho caben 10, y a la altura caben 10, entonces en total caben:

$$10 \times 10 \times 10 = 1,000$$

R: 1 m^3 = 1,000 litros

Comprende

- 1 m^3 = 1,000 litros
- Para convertir de m^3 a litros se multiplica por 1,000; y para convertir de litros a m^3 se divide entre 1,000.

Ejemplos:

a. Una cisterna tiene un volumen de 12 m^3, ¿cuál es su capacidad en litros?
Como en 1 m^3 caben 1,000 litros, en 12 m^3 caben:
PO: 1,000 × 12

$$1,000 \times 12 = 12,000$$

R: En 12 m^3 caben 12,000 litros.

b. Una pila tiene capacidad de 2,000 litros, ¿cuál es su volumen en m^3?
Como cada 1,000 litro equivalen a 1 m^3, en 2,000 litros hay:
PO: 2,000 ÷ 1,000

$$2,000 \div 1,000 = 2$$

R: 2 m^3

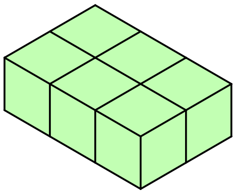
Resuelve

1. ¿Cuántos litros de agua caben en una cisterna de 15 m^3?
2. Un tanque tiene una capacidad de 21,000 litros, ¿cuál es el volumen que puede contener en m^3?
3. Un tanque con volumen de 28 m^3 contiene actualmente 17,000 litros. ¿Cuántos litros de agua hacen falta para llenar el tanque?

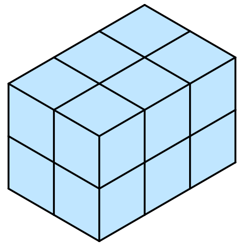
1.10 Practica lo aprendido

1. Encuentra el volumen de los siguientes prismas rectangulares (el cubo más pequeño tiene 1 cm de lado):

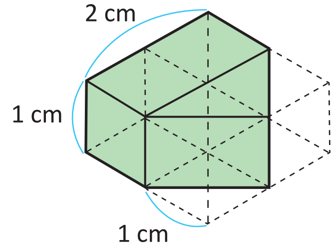
a.



b.

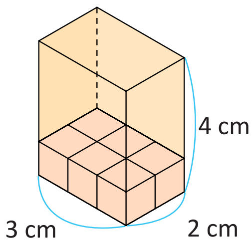


c.

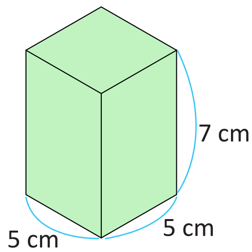


2. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos utilizando la fórmula:

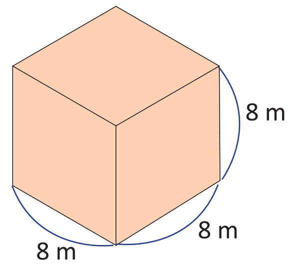
a.



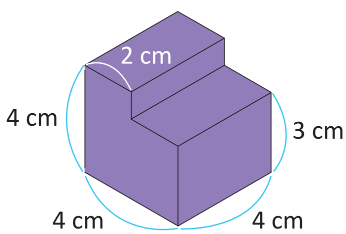
b.



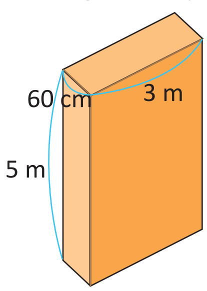
c.



3. Calcula el volumen del siguiente cuerpo geométrico:

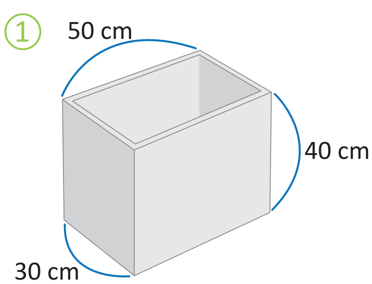


4. Encuentra el volumen del siguiente prisma rectangular:
   a. En cm^3
   b. En m^3

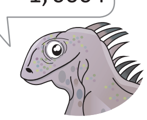


Recuerda:
$1\ m^3 = 1,000,000\ cm^3$

5. Una pila tiene las longitudes mostradas en ①. Realiza lo que se te pide en cada literal:
   a. Encuentra el volumen del interior de la pila en m^3.
   b. ¿Cuál es la capacidad de la pila en litros?
   c. Para llenar la pila se utilizará una cubeta de 10 litros de capacidad. ¿Con cuántas cubetas se llenará la pila?



$1\ m^3 = 1,000\ l$



Unidad 8

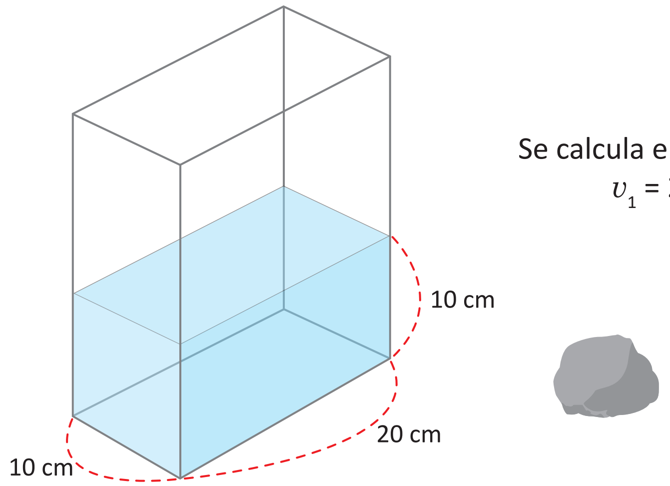
¿Sabías que...?

Volumen de distintos cuerpos

Todos los cuerpos tienen volumen. ¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo que no sea un cubo o un prisma rectangular?

Observa cómo se puede calcular el volumen de una piedra utilizando un recipiente con agua.

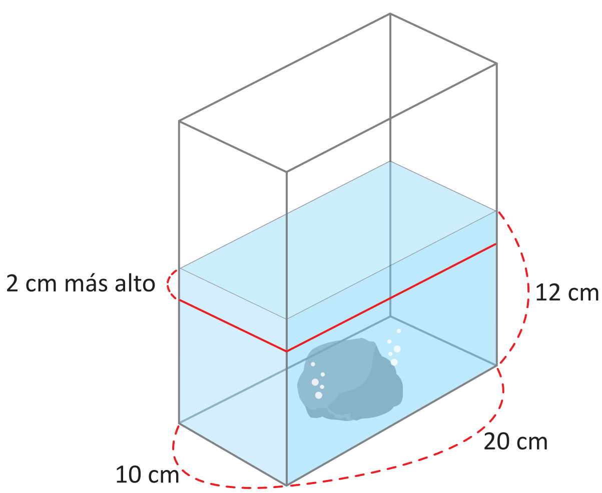
① Se utiliza un recipiente cuyo volumen sea fácil de calcular. Por ejemplo un prisma rectangular.



Se calcula el volumen de agua.

$$v_1 = 20 \times 10 \times 10 = 2,000$$

② Se introduce la piedra; la altura del agua se incrementará debido al volumen de la piedra.



Se calcula nuevamente el volumen de agua con la piedra sumergida.

$$v_2 = 20 \times 10 \times 12 = 2,400$$

③ El volumen de la piedra es la diferencia entre v_2 y v_1:

$$v = v_2 - v_1$$
$$v = 2,400 - 2,000$$
$$v = 400$$

Para medir el volumen de un cuerpo irregular, se puede sumergir el cuerpo en un recipiente con agua. Luego se calcula la diferencia de volumen con y sin el cuerpo irregular sumergido.

Calcula el volumen de otros cuerpos irregulares en tu casa.

Unidad 9

Conversión de otros sistemas al sistema internacional

En esta unidad aprenderás a

- Realizar conversiones entre varas y metros
- Realizar conversiones entre varas cuadradas y metros cuadrados

1.1 Conversión entre metros y varas

Recuerda

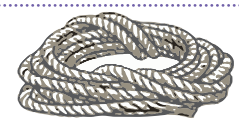
Completa:

a. 2 m =_____ cm

b. 400 cm =_______ m

Analiza

Una vara es una unidad de longitud que se representa con v; además, 1 v = 0.84 m (aproximadamente). Si don Manuel necesita un cordel de 21 metros de largo y su sobrino Juan le presta uno de 30 varas, ¿necesitará más cordel Don Manuel?



Soluciona


José

Utilizo que 1 v = 0.84 m; convierto 30 varas a metros multiplicando:

$$30 \times 0.84 = 25.2$$

Entonces, 30 v = 25.2 m. El cordel que Juan le presta a su tío tiene 25.2 m, por lo que don Manuel no necesita más cordel.

R: No necesitará más.


Julia

Utilizo que 1 v = 0.84 m; convierto 21 m a varas dividiendo:

$$21 \div 0.84 = 25$$

Entonces, 21 m = 25 v. El cordel que Juan le presta a su tío tiene 30 v y Don Manuel solo necesita 25 v, por lo que don Manuel no necesita más cordel.

R: No necesitará más.

Comprende

Para convertir varas a metros, o metros a varas se hace lo siguiente:

$$a \text{ varas} \xrightarrow{\times 0.84} a \times 0.84 \text{ metros}$$

$$b \text{ metros} \xrightarrow{\div 0.84} b \div 0.84 \text{ varas}$$

Ejemplos:

¿Cuántos metros hay en 15 varas?

$$15 \times 0.84 = 12.6$$

R: 12.6 m

¿Cuántas varas hay en 3.36 m?

$$3.36 \div 0.84 = 4$$

R: 4 v

Resuelve

1. Para cada literal, completa $\square$ con el valor que le corresponde:

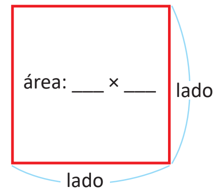
a. 5 v = $\square$ m b. 100 v = $\square$ m c. 42 m = $\square$ v d. 840 m = $\square$ v

2. Un lote rectangular tiene 15 varas de ancho y 20 varas de largo. ¿Cuántos metros mide el perímetro del terreno?

1.2 Conversión entre metros cuadrados y varas cuadradas

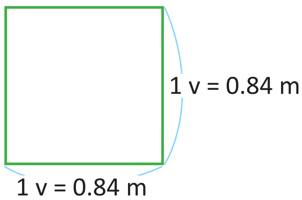
Recuerda

a. ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado?
b. ¿Qué unidades has utilizado para medir el área?



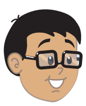
Analiza

1. Encuentra la relación entre varas cuadradas y metros cuadrados, calculando el área del siguiente cuadrado:



2. Un terreno de 2, 000 v^2 en venta tendrá el rótulo con la cantidad de metros cuadrados. ¿Cuántos metros cuadrados deberán colocar en el rótulo?

Soluciona


Carlos

1. Calculo el área:
área = 0.84 × 0.84
= 0.70 aproximadamente.

R: 1 v^2 = 0.7 m^2

1 v^2 es el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 v y se lee "1 vara cuadrada".

2. Si 1 v^2 = 0.7 m^2, entonces para 2, 000 v^2 hay:
0.7 × 2, 000 = 1, 400

Por lo tanto: 2, 000 v^2 = 1, 400 m^2.

R: El área del terreno es 1, 400 m^2.

Comprende

- La vara cuadrada es una unidad de medida de área.
- 1 v^2 = 0.7 m^2

a varas cuadradadas (v^2) $\xrightarrow{\times 0.7}$ a × 0.7 metros cuadrados(m^2)

b ÷ 0.7 varas cuadradadas (v^2) $\xleftarrow{\div 0.7}$ b metros cuadrados(m^2)

Ejemplos:

¿Cuántos metros cuadrados hay en una área de 4 v^2?

4 × 0.7 = 2.8

R: 2.8 m^2

¿Cuántas varas cuadradas hay en una área de 4.2 m^2?

4.2 ÷ 0.7 = 6

R: 6 v^2

Resuelve

1. Para cada literal, completa $\boxed{}$ con el valor que le corresponde.
   a. 10 v^2 = $\boxed{}$ m^2 b. 60 v^2 = $\boxed{}$ m^2 c. 56 m^2 = $\boxed{}$ v^2 d. 70 m^2 = $\boxed{}$ v^2

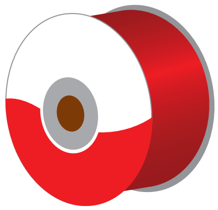
2. Un terreno de 1, 500 v^2 se vende por un precio de \$12, 600.
   a. ¿Cuál es el área del terreno en m^2?
   b. ¿Cuál es el precio de cada m^2 de terreno?

Unidad 9

1.3 Practica lo aprendido

1. Encuentra la medida de los rollos de listón en metros o varas, según se indica:

a. 25 varas

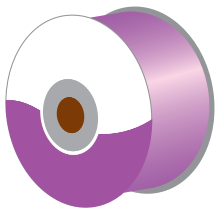


_________m

b. 15 varas

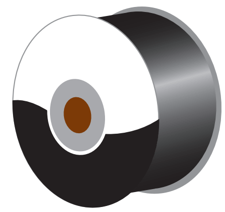
_________m

c. 63 metros



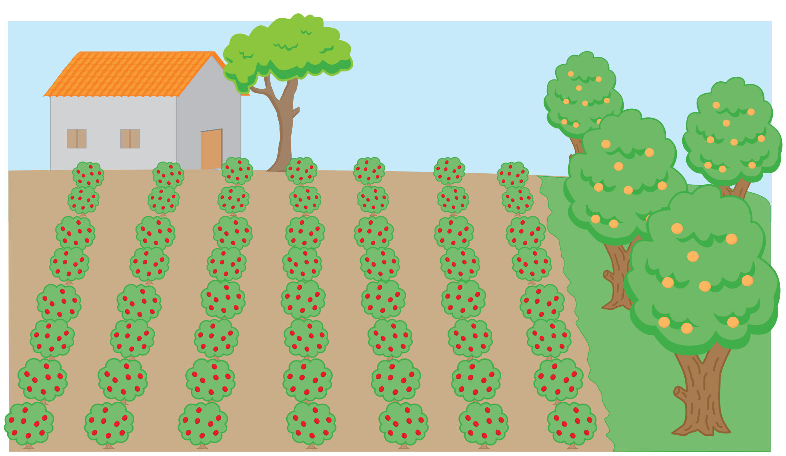
_________v

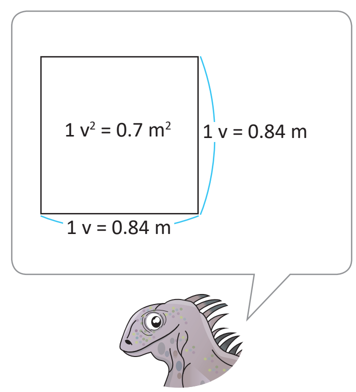
d. 126 metros



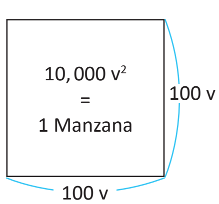
_________v

2. Un agricultor repartió un terreno de 770 v^2 para la siembra, utilizó 350 v^2 para cultivar fresas y el resto para árboles frutales.
   a. ¿Cuál es el área que corresponde a los árboles frutales en varas cuadradas?
   b. ¿Cuál es el área que corresponde a los árboles frutales en metros cuadrados?





¿Sabías que...?



Una manzana es una medida de superficie con un área correspondiente a un cuadrado de 100 varas de lado, es decir, el área es 10, 000 v^2. Entonces: 1 manzana = 10, 000 m^2

Unidad 10

Traslaciones, simetrías y rotaciones

En esta unidad aprenderás a

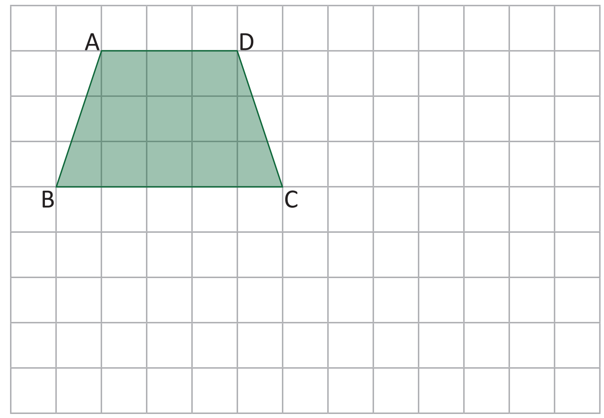
- Trasladar una figura
- Determinar si una figura es simétrica respecto a una recta
- Determinar si una figura es simétrica respecto a un punto
- Construir figuras simétricas
- Caracterizar las figuras planas y polígonos regulares según el tipo de simetría que poseen

1.1 Traslación de figuras

Analiza

Realiza lo siguiente:

a. Desplaza el cuadrilátero de vértices A, B, C y D, 6 espacios en forma horizontal hacia la derecha.
b. Desplaza el cuadrilátero de vértices A, B, C y D, 4 espacios en forma vertical hacia abajo.

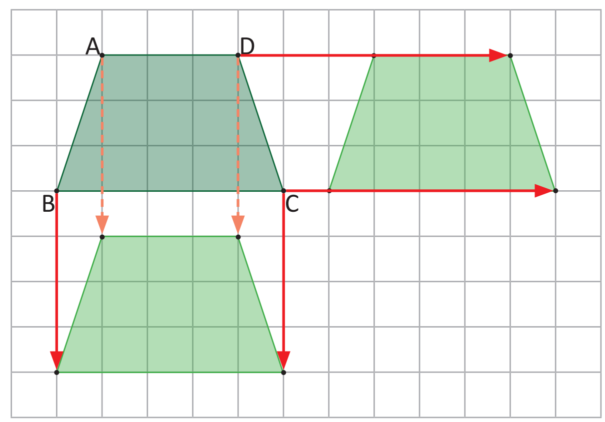


Soluciona


Ana

Desplazo el cuadrilátero moviendo cada uno de sus vértices la cantidad de espacios en la dirección indicada en cada caso: de forma horizontal hacia la derecha o de forma vertical hacia abajo.

Luego, uno esos vértices en el mismo orden que el cuadrilátero original.



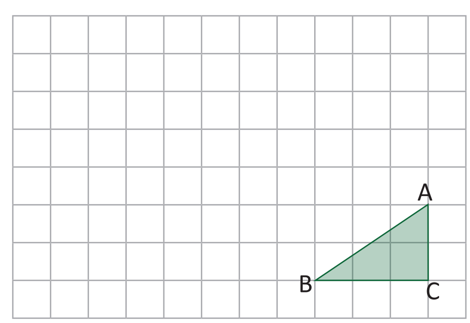
Comprende

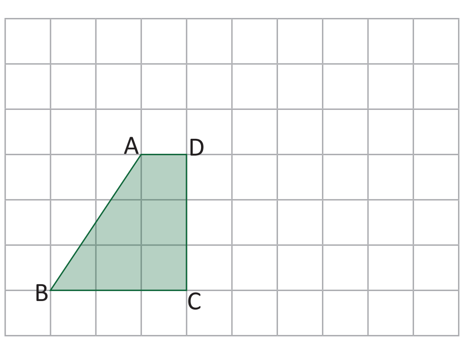
La **traslación** es un movimiento que consiste en desplazar todos los puntos de una figura a una misma distancia, de manera que la figura resultante tenga la misma forma y orientación que la original.

Resuelve

a. Traslada el triángulo 4 espacios en forma vertical hacia arriba.

b. Traslada el triángulo 7 espacios en forma horizontal hacia la izquierda.





c. Traslada el cuadrilátero 5 espacios en forma horizontal hacia la derecha.

d. Traslada el cuadrilátero 2 espacios en forma horizontal hacia arriba.

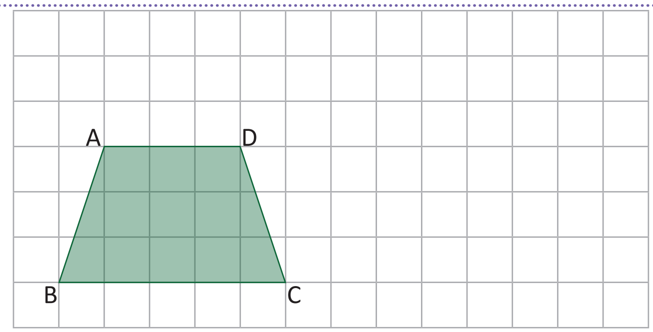
1.2 Combinación de traslaciones

Analiza

Realiza lo siguiente:

a. Traslada el cuadrilátero 7 espacios en forma horizontal hacia la derecha.

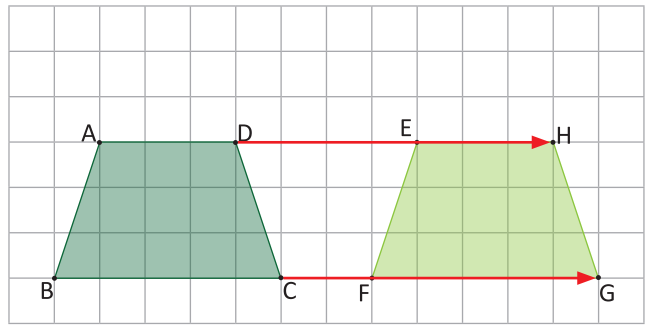
b. El resultado del literal a. trasládalo 2 espacios en forma vertical hacia arriba. Este último cuadrilátero, ¿mantiene la misma forma y orientación que el original?



Soluciona

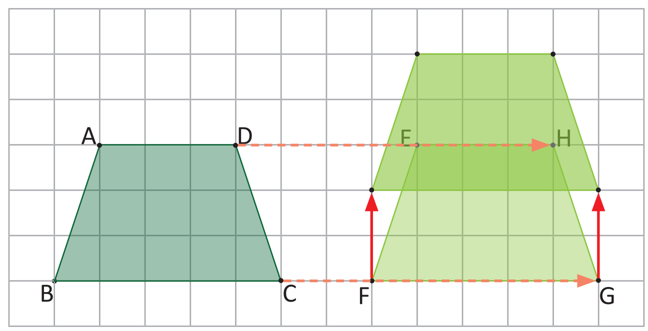

José

a. Traslado los vértices A, B, C y D, 7 espacios hacia la derecha y dibujo el resultado, manteniendo la misma forma y orientación. A los vértices del cuadrilátero, resultado de la traslación horizontal, los nombro E, F, G y H.



b. Ahora traslado los vértices E, F, G y H, 2 espacios hacia arriba y dibujo el resultado.

¡Sí se mantiene la misma forma y orientación que el cuadrilátero original!



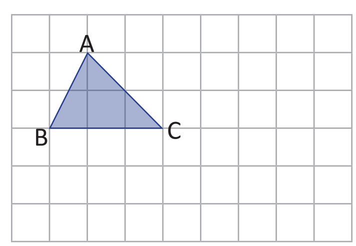
Comprende

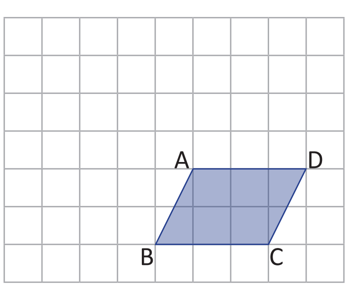
Se pueden realizar combinaciones de dos o más traslaciones horizontales y verticales; la figura resultante siempre mantiene la misma forma y orientación que la figura original.

Resuelve

Realiza las siguientes combinaciones de traslaciones:

a. Traslada el triángulo 4 espacios en forma horizontal hacia la derecha y 2 espacios en forma vertical hacia abajo.



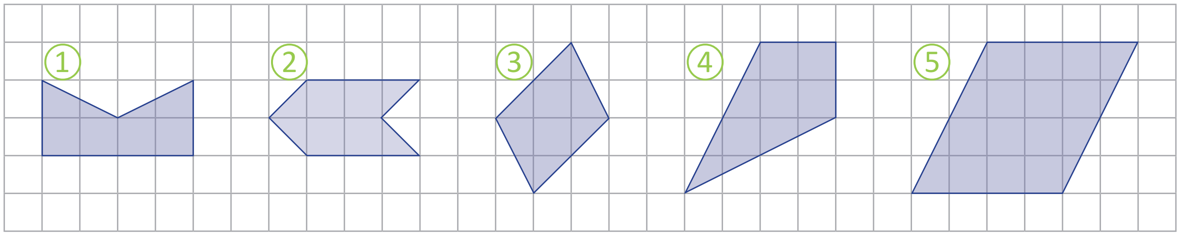


b. Traslada el cuadrilátero 3 espacios en forma horizontal hacia la izquierda y 3 espacios en forma vertical hacia arriba.

1.3 Figuras simétricas respecto a un eje

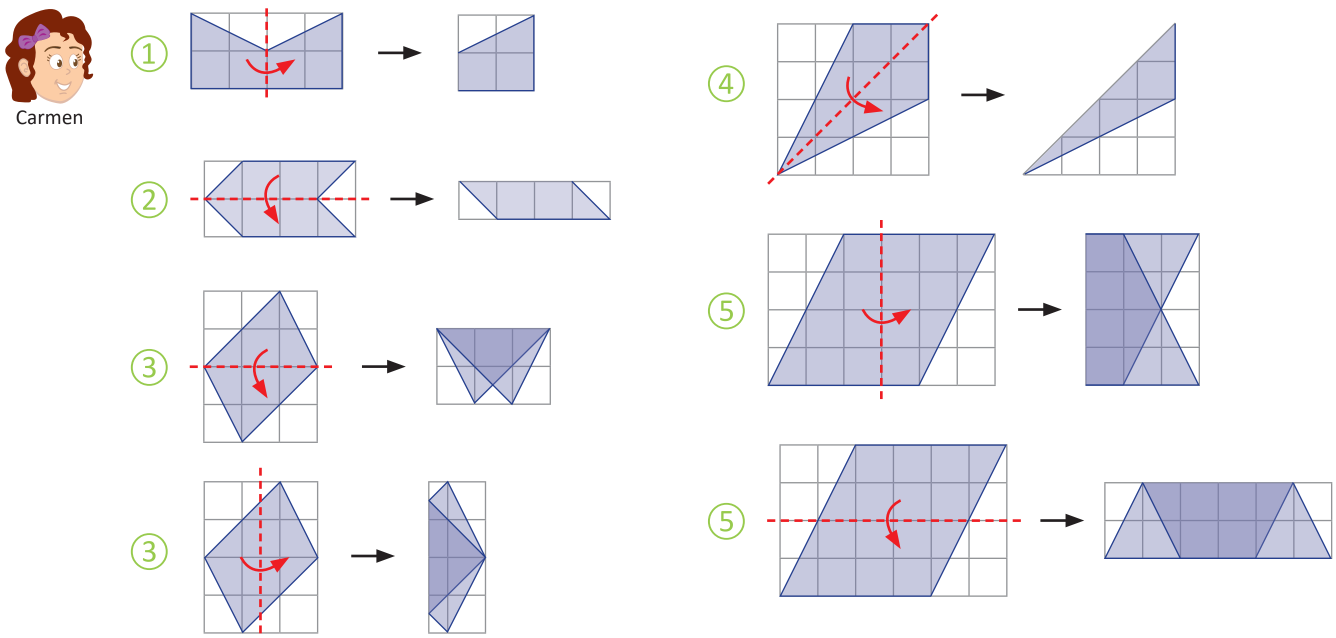
Analiza

¿Cuáles de las siguientes figuras pueden doblarse de tal manera que se sobrepongan dos partes iguales?



Soluciona

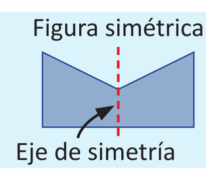
Dibujo y recorto las figuras en papel cuadriculado para realizar el doblez y para comprobar si se sobreponen exactamente:



Las figuras 1, 2 y 4 pueden doblarse para sobreponer dos partes iguales. Pero las figuras 3 y 5 no pueden doblarse en ninguna forma para que se sobrepongan dos partes iguales.

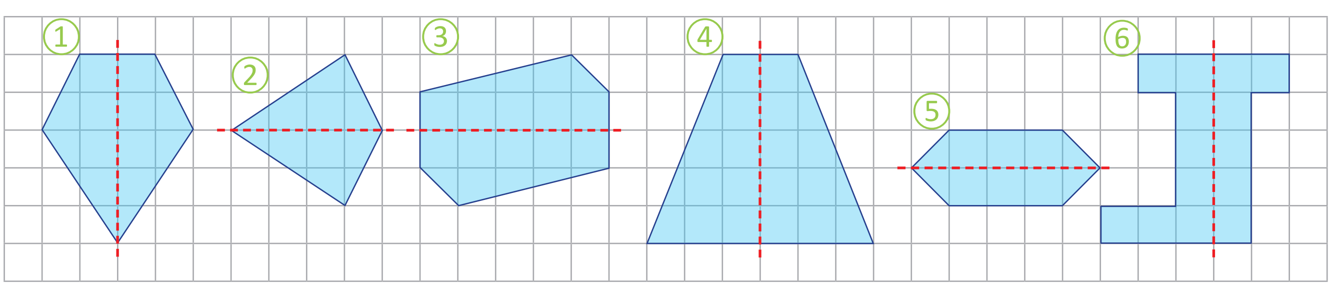
Comprende

Una **figura simétrica con respecto a un eje** (o simplemente **figura simétrica**) es aquella que puede doblarse por una línea recta de tal forma que se sobrepongan dos partes iguales. Esta línea recta recibe el nombre de **eje de simetría**.



Resuelve

Determina cuál de las siguientes figuras son simétricas con respecto a la línea recta indicada en cada caso:

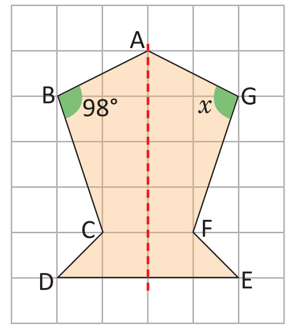


1.4 Vértices, lados y ángulos correspondientes

Analiza

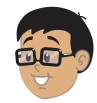
Observa la siguiente figura simétrica, analiza las partes que se sobreponen cuando se dobla por el eje de simetría.

a. ¿Cuál es el vértice que se sobrepone al vértice B?
b. ¿Cuál es el lado que se sobrepone al lado BC?
c. Si el lado GF mide 3 cm, ¿cuánto mide el lado BC?
d. ¿Cuánto mide el ángulo x?



Soluciona

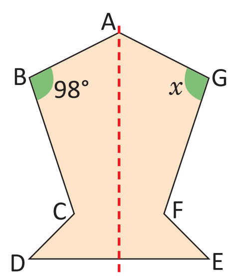
a. El vértice que se sobrepone al vértice B es G.
b. El lado que se sobrepone al lado BC es GF.
c. Al doblar por el eje de simetría, el lado GF se sobrepone al lado BC, entonces estos lados tienen la misma longitud. Es decir, BC mide 3 cm.
d. El ángulo x se sobrepone al ángulo cuya medida es 98°, por lo tanto mide 98°.


Carlos

Comprende

Al doblar una figura simétrica por su eje:

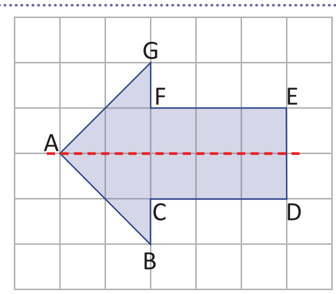
- Los vértices que se sobreponen se llaman **vértices correspondientes**.
- Los lados que se sobreponen se llaman **lados correspondientes**.
- Los ángulos que se sobreponen se llaman **ángulos correspondientes**.
- Los lados correspondientes tienen la misma longitud y los ángulos correspondientes tienen la misma medida.



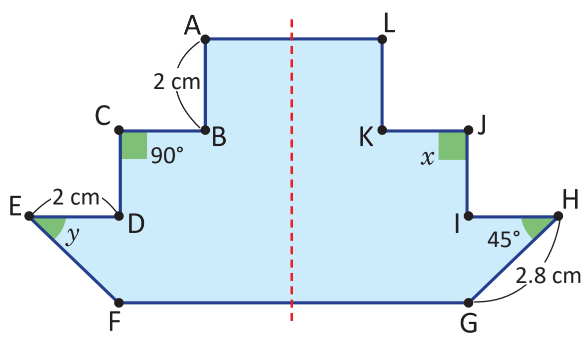
G es el vértice correspondiente al vértice B, CD es el lado correspondiente al lado FE.

Resuelve

1. Observa la flecha (es una figura simétrica) y encuentra lo que se te pide:
   a. Los vértices correspondientes a los vértices G, F y D.
   b. Los lados correspondientes a los lados AG y CD.



2. Encuentra la medida de los siguientes lados y ángulos explicando tu respuesta.
   a. La longitud del lado LK.
   b. La longitud del lado IH.
   c. La longitud del lado EF.
   d. La medida del ángulo x.
   e. La medida del ángulo y.



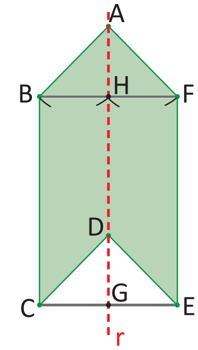
Unidad 10

1.5 Características de las figuras simétricas

Analiza

La figura es simétrica con respecto al eje r, B y F, C y E son vértices correspondientes. Responde:

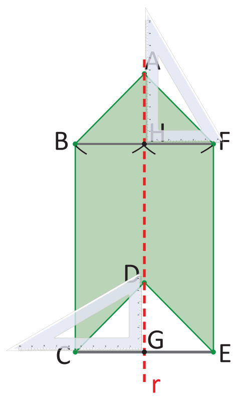
a. ¿Son perpendiculares al eje de simetría los segmentos BF y CE?
b. Compara los segmentos BH y FH. ¿Cómo son sus longitudes?
c. Compara los segmentos CG y EG. ¿Cómo son sus longitudes?



Soluciona

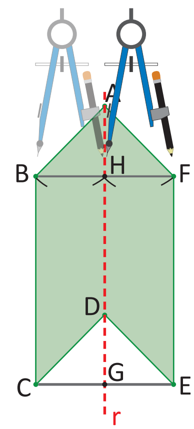
a. Con una escuadra verifico que los segmentos BF y CE son perpendiculares al eje de simetría r:


Julia



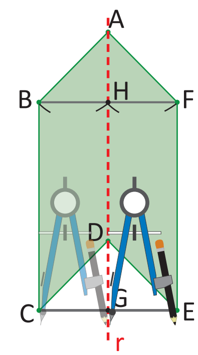
R: Sí son perpendiculares.

b. Utilizo un compás para comparar las longitudes de BH y FH:



R: BH y FH tienen igual longitud.

c. Utilizo un compás para comparar las longitudes de CG y EG:



R: CG y EG tienen igual longitud.

Comprende

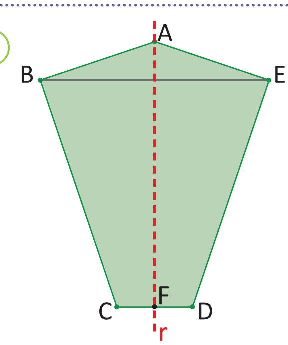
En una figura simétrica:

- La línea que conecta dos vértices correspondientes, corta el eje de simetría perpendicularmente.
- La longitud desde esta intersección a los dos vértices correspondientes es la misma.

Resuelve

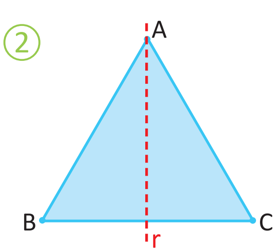
1. La figura (1) es simétrica con respecto al eje r. Analiza y contesta:
   a. ¿Cómo se intersecan el eje de simetría y el segmento BE?
   b. ¿Qué otro segmento tiene la misma longitud que CF?

(1)



2. El triángulo equilátero (2) es una figura simétrica respecto al eje r. ¿Es posible dibujar otros ejes de simetría? Justifica tu respuesta.

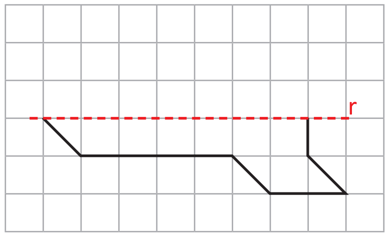
(2)

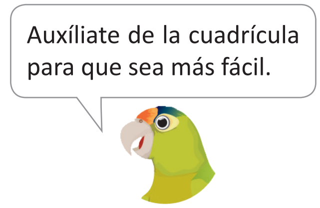


1.6 Construcción de figuras simétricas

Analiza

Completa la figura para que sea simétrica respecto al eje r:

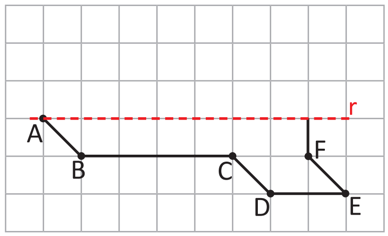




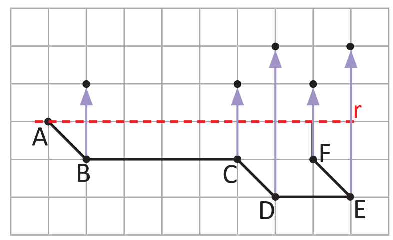
Soluciona

① Marco los vértices.

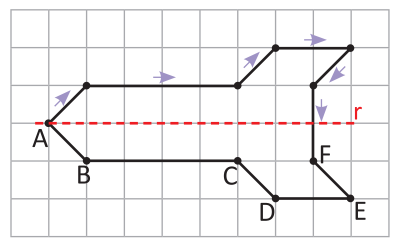

Antonio



② Utilizo la cuadrícula para contar la distancia desde cada vértice hasta el eje de simetría y dibujar los vértices correspondientes.



③ Finalmente, trazo los lados uniendo los vértices en el mismo orden que la figura original.



Comprende

Para construir una figura simétrica dada una parte de ella y un eje de simetría:

① Se trazan líneas perpendiculares al eje de simetría que pasen por los vértices.

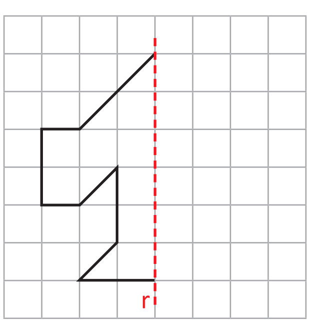
② Se ubican los vértices correspondientes sobre las perpendiculares y del lado opuesto del vértice, manteniendo la misma distancia al eje de simetría.

③ Se trazan los lados correspondientes uniendo los vértices en el orden que están en el original.

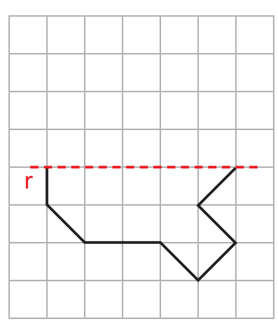
Resuelve

Completa la figura para que sea simétrica respecto al eje r:

a.



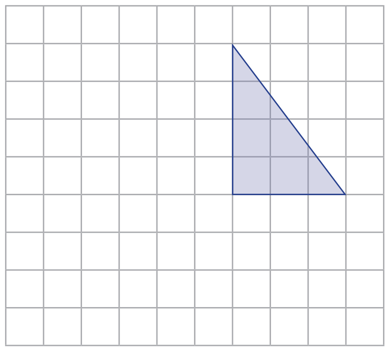
b.



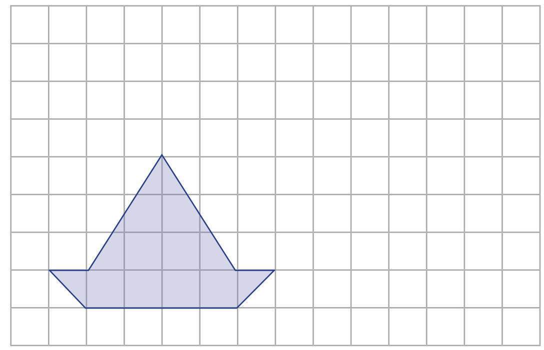
1.7 Practica lo aprendido

1. Realiza la combinación de traslaciones en cada caso:

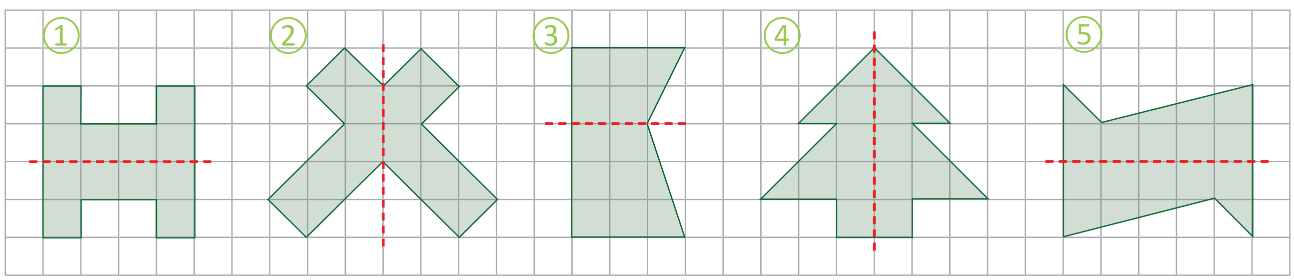
   a. Traslada 5 espacios a la izquierda y 3 hacia abajo.



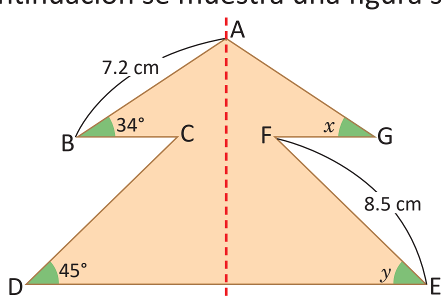
   b. Traslada 6 espacios a la derecha y 2 hacia arriba.



2. Determina cuáles de las siguientes figuras son simétricas respecto al eje que se muestra:



3. A continuación se muestra una figura simétrica, encuentra lo que se te pide:



   a. El lado correspondiente al lado AB:______

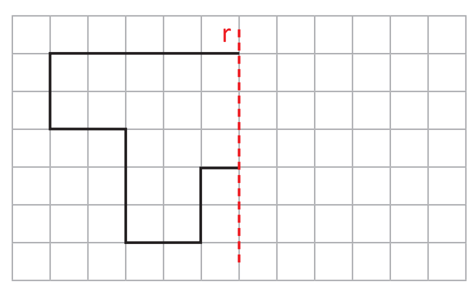
   b. La longitud del lado AG:______________

   c. La longitud del lado CD:______________

   d. La medida del ángulo x:______________

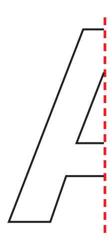
   e. La medida del ángulo y:______________

4. Completa la figura para que sea simétrica respecto al eje r.



Desafíate

Completa la figura para que sea simétrica respecto al eje r.

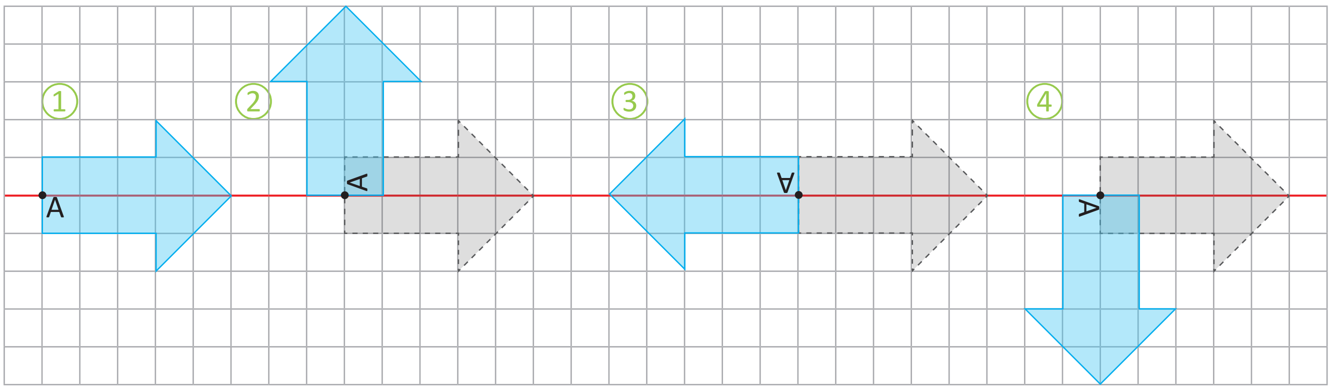


Investiga el procedimiento para dibujar figuras simétricas usando regla y compás.

2.1 Rotación

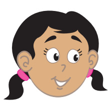
Analiza

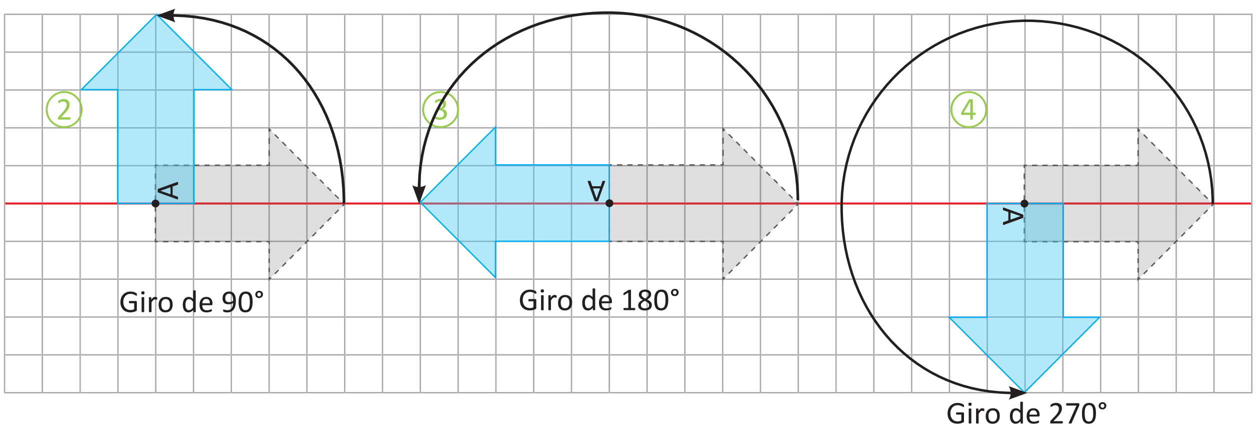
Explica cómo es el movimiento desde la figura (1) para obtener la siguiente secuencia:



Soluciona

Observo que la flecha en la figura (1) va girando respecto al punto fijo A, de la siguiente manera:


Beatriz



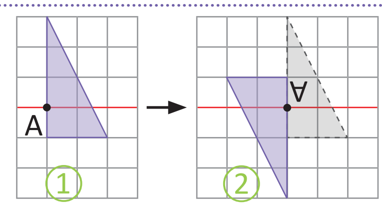
Comprende

La **rotación** es un movimiento que consiste en girar todos los puntos de una figura alrededor de un punto fijo llamado **centro de rotación**, y con un determinado ángulo llamado **ángulo de rotación**.

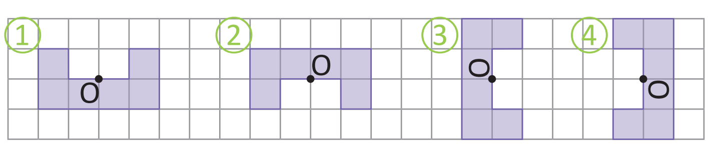
El ángulo de rotación puede medirse en sentido horario o antihorario. Una rotación de 180° equivale a girar la figura media vuelta alrededor del centro de rotación y una rotación de 360° equivale a una vuelta completa, es decir, la figura vuelve a la posición original.

Resuelve

1. La figura (1) se ha rotado en sentido antihorario para obtener la figura (2). Si el centro de rotación fue el punto A, ¿cuál fue la medida del ángulo de rotación?



2. Las siguientes figuras se obtuvieron al rotar la figura (1) respecto al punto O, un ángulo de rotación menor a 360° en sentido horario. ¿Cuántos grados se ha girado en cada caso?



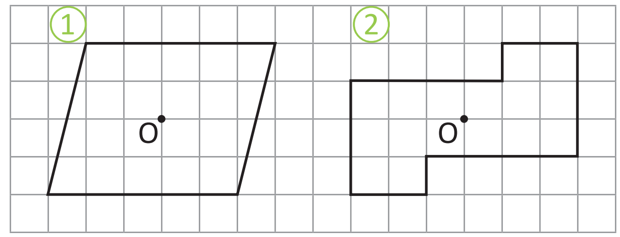
2.2 Simetría puntual

Analiza

Observa las figuras 1 y 2, y responde:

a. ¿Son figuras simétricas respecto a un eje?

b. ¿Cuántos grados debe rotarse cada figura, con centro el punto O, para que se vea igual que la figura original? Omite el caso de la vuelta completa.

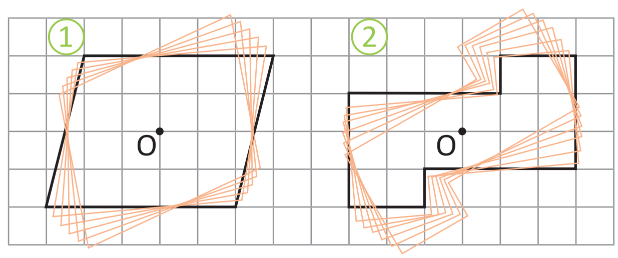


Soluciona

a. Las figuras 1 y 2 no son figuras simétricas respecto a un eje.

b. Calco las figuras, las recorto y las coloco sobre las figuras originales. Coloco la punta del lápiz sobre el centro en cada caso y giro para encontrar el ángulo:


Mario



Al rotar 180° respecto al centro O, la figura se ve igual a la original, es decir se sobreponen.
R: 180°

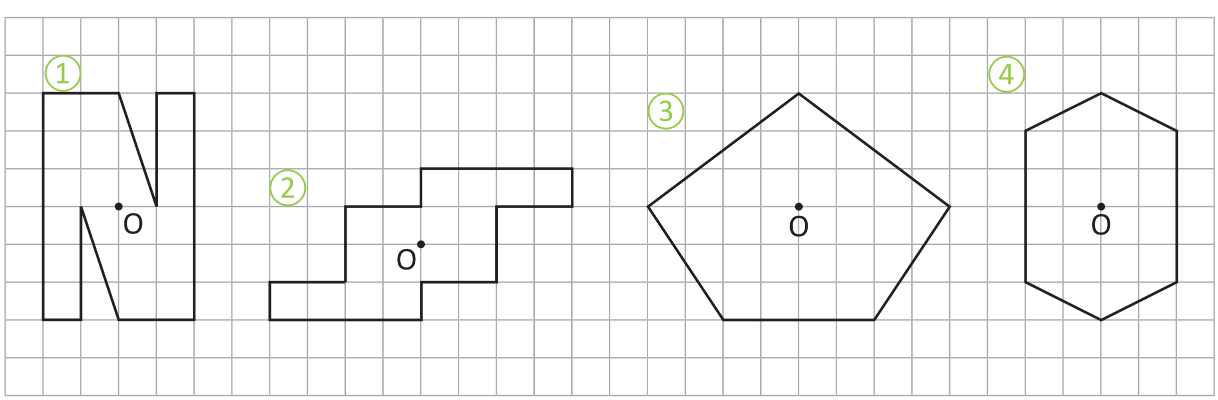
Comprende

Cuando al rotar una figura 180° alrededor de un punto esta se sobrepone exactamente sobre la figura original, se dice que la figura posee **simetría puntual**. El punto fijo sobre el cual se gira se llama **centro de simetría**.

En el caso de las figuras simétricas, la figura se sobrepone al doblar por una línea recta. Para las figuras con simetría puntual, estas se sobreponen al rotar 180° respecto a un punto.

Resuelve

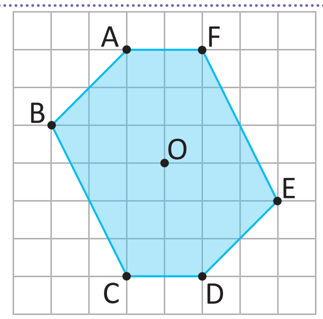
En cada caso, determina si la figura posee simetría puntual con respecto al punto O:



2.3 Vértices, lados y ángulos correspondientes

Analiza

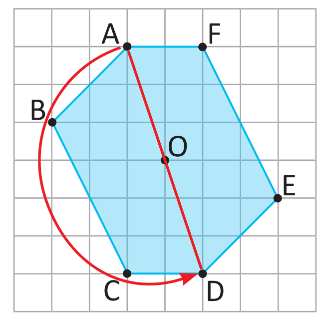
La figura de la derecha es una figura con simetría puntual, y el centro de simetría es el punto O.



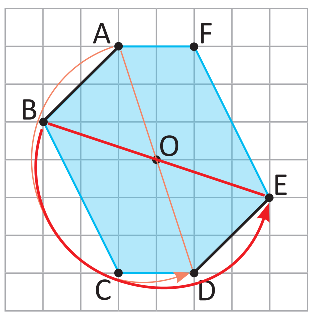
a. ¿Qué vértice se sobrepone al vértice A, si se aplica la simetría puntual?
b. ¿Qué lado se sobrepone al lado AB, si se aplica la simetría puntual?

Soluciona

a. Si aplico la simetría puntual al vértice A, debo rotarlo en un ángulo de 180°. ¡Se sobrepondrá al vértice D!




Carmen



b. El vértice que se sobrepone al vértice B es E; por lo tanto, el lado que se sobrepone al lado AB es DE.

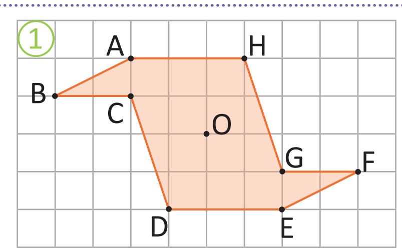
Comprende

En una figura con simetría puntual:

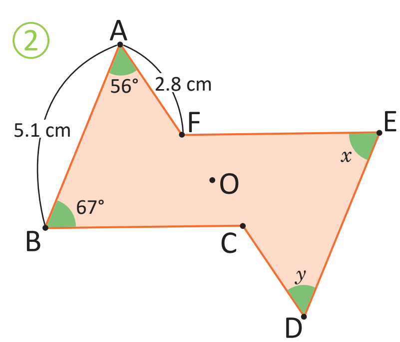
- Los vértices que se sobreponen al aplicar la simetría puntual (rotación de 180°) se llaman vértices correspondientes.
- Los lados y ángulos que se sobreponen al aplicar la simetría puntual se denominan lados correspondientes y ángulos correspondientes, respectivamente.

Resuelve

1. La figura ① posee simetría puntual respecto al punto O. Encuentra lo que se te pide:
   a. El vértice correspondiente al vértice A.
   b. El vértice correspondiente al vértice D.
   c. El vértice correspondiente al vértice F.



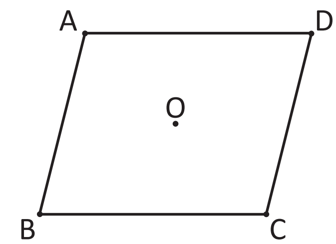
2. La figura ② posee simetría puntual respecto al punto O. Encuentra la longitud de los siguientes lados y ángulos:
   a. La longitud del lado DE.
   b. La longitud del lado CD.
   c. La medida del ángulo x.
   d. La medida del ángulo y.



2.4 Características de figuras con simetría puntual

Analiza

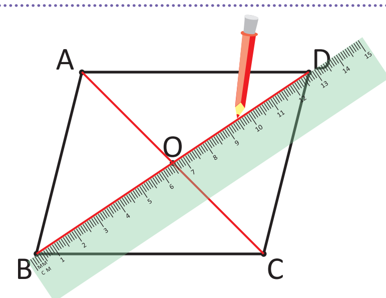
El paralelogramo es una figura con simetría puntual, el centro de simetría es el punto O. Realiza lo siguiente:



a. Traza el segmento que une los puntos correspondientes A y C, y traza el segmento que une los puntos correspondientes B y D. ¿Dónde se cortan los segmentos?
b. Compara la longitud de los segmentos AO y OC, ¿cómo son estas longitudes?

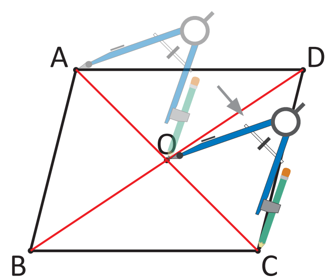
Soluciona

a. Con una regla trazo el segmento que une los vértices correspondientes A y C, y la recta que une B y D.




Carlos

R: Los segmentos se cortan en el centro de simetría O.



b. Comparo las longitudes utilizando el compás. ¡Las longitudes de los segmentos AO y OC son iguales!

Comprende

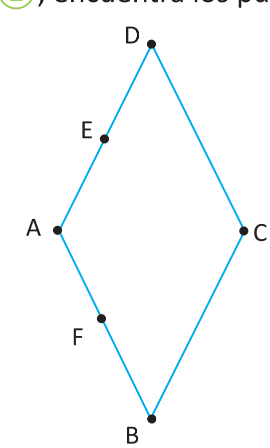
En una figura con simetría puntual, se cumple lo siguiente:

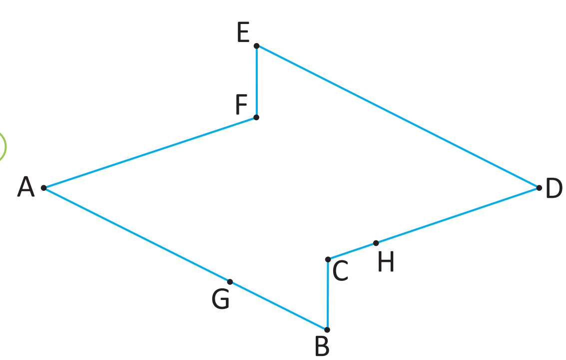
- El segmento que une dos puntos correspondientes pasa por el centro de simetría.
- La longitud desde el centro de simetría hasta los dos puntos correspondientes es la misma.

Resuelve

Las figuras ① y ② poseen simetría puntual. Realiza lo siguiente:

a. Encuentra el centro de simetría de cada una. ¿Cómo lo encontraste?
b. En la figura ①, encuentra los puntos correspondientes a los puntos E y F.
c. En la figura ②, encuentra los puntos correspondientes a los puntos G y H.

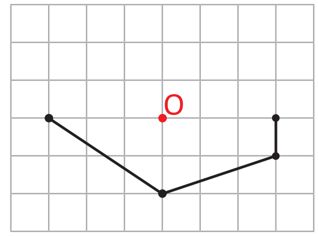
①


②


2.5 Construcción de figuras con simetría puntual

Analiza

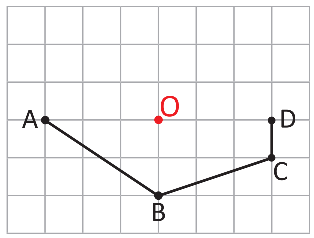
Completa la siguiente figura para que tengan simetría puntual, con centro de simetría el punto O.



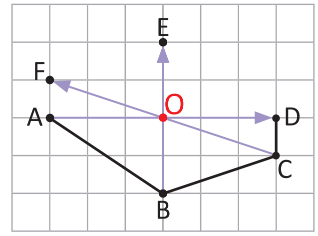
Soluciona


Julia

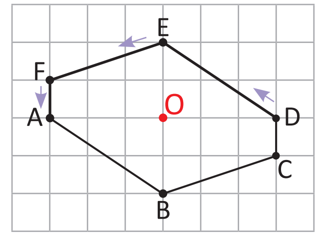
① Marco los vértices.



② Utilizo la cuadrícula para ubicar los vértices correspondientes, cuyas distancias al punto O son iguales a las que hay entre cada vértice y ese punto (vértice correspondiente a A es D).



③ Finalmente, trazo los lados uniendo los vértices en el mismo orden que la figura original.



Comprende

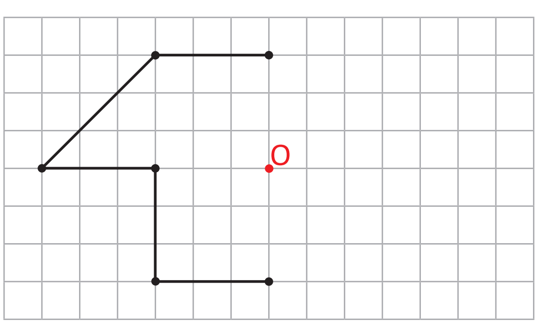
Para construir una figura que tenga simetría puntual, dada una parte de la figura y el centro de simetría:

① Para cada vértice, se traza un segmento que pase por el vértice y por el centro de simetría.
② Se ubican los vértices correspondientes sobre el segmento y del lado opuesto del vértice, manteniendo la misma distancia al centro de simetría.
③ Se trazan los lados correspondientes uniendo los vértices en el orden que están en el original.

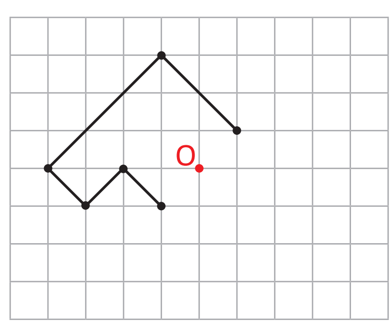
Resuelve

Completa cada figura para que tengan simetría puntual, con centro de simetría el punto O:

a.



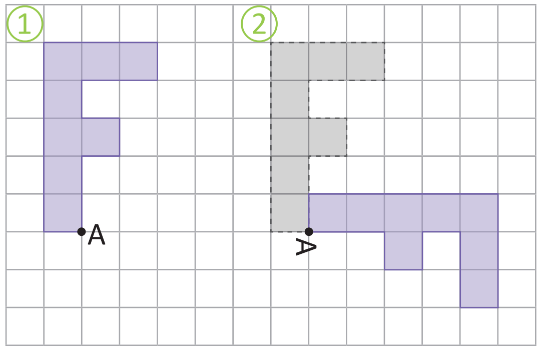
b.



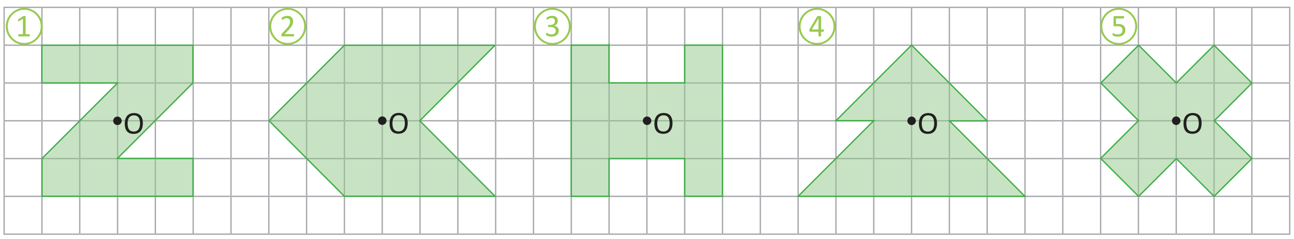
Unidad 10

2.6 Practica lo aprendido

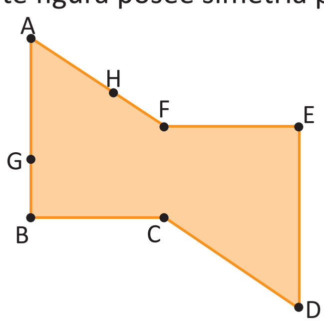
1. Se rota la figura ① en sentido horario para obtener la figura ②. Si el centro de rotación fue el punto A, ¿cuántos grados se ha rotado?



2. Determina si las siguientes figuras poseen simetría puntual, con centro de simetría el punto O en cada caso:

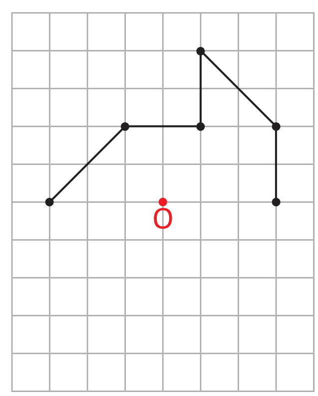


3. La siguiente figura posee simetría puntual:



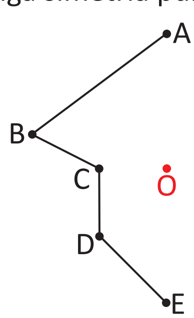
a. Encuentra el centro de simetría.
b. Encuentra los puntos correspondientes a los puntos G y H.

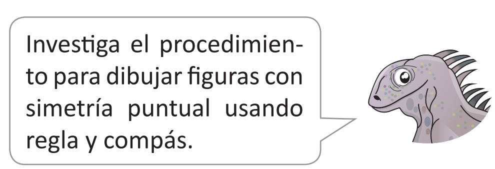
4. Completa la figura para que tenga simetría puntual, con centro de simetría el punto O.



Desafíate

Completa la figura para que tenga simetría puntual y el centro de simetría sea el punto O.

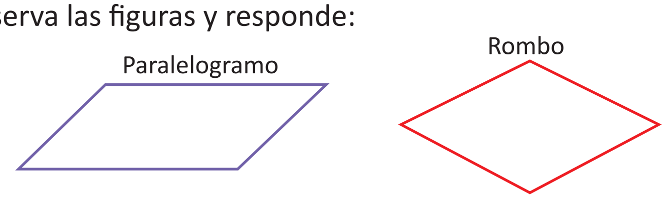




3.1 Simetría de figuras planas

Analiza

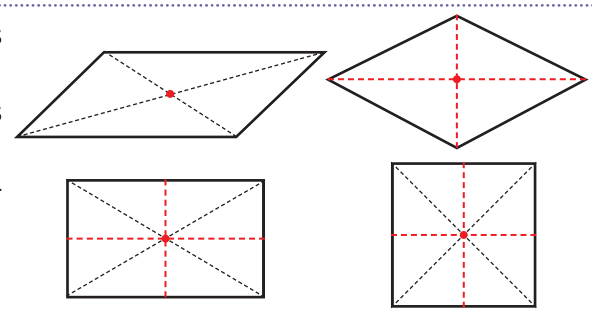
Observa las figuras y responde:



a. ¿Cuáles de las figuras son simétricas? Dibuja todos los ejes de simetría.
b. ¿Cuáles de las figuras simétricas de a., tienen diagonales que también son ejes de simetría?
c. ¿Cuáles de las figuras poseen simetría puntual? Dibuja el centro de simetría.
d. Completa la tabla marcando con un cheque (✓) si la figura posee ese tipo de simetría y con una equis (✗) si no la posee. Además, escribe el número de ejes de simetría.

Cuadrilátero	Figura simétrica	Número de ejes simetría	Simetría puntual
paralelogramo			
rombo			
rectángulo			
cuadrado			

Soluciona



a. El rombo, el rectángulo y el cuadrado son figuras simétricas.
b. El rombo y el cuadrado cumplen que sus diagonales también son ejes de simetría.
c. Las cuatro figuras poseen simetría puntual (el centro se encuentra donde se cortan las diagonales).
d. Completo la tabla.

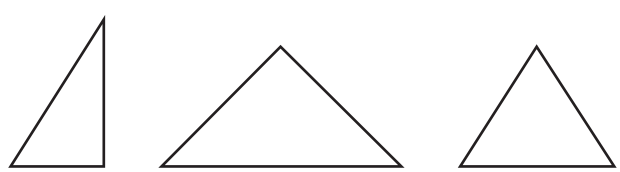
Cuadrilátero	Figura simétrica	Número de ejes simetría	Simetría puntual
paralelogramo	✗	0	✓
rombo	✓	2	✓
rectángulo	✓	2	✓
cuadrado	✓	4	✓

Comprende

Una figura plana puede ser simétrica (con uno o más ejes de simetría), poseer simetría puntual o no tener algún tipo de simetría.

Resuelve

Similar a lo realizado en el Analiza, estudia los tipos de simetría que tienen los siguientes triángulos y completa la tabla:



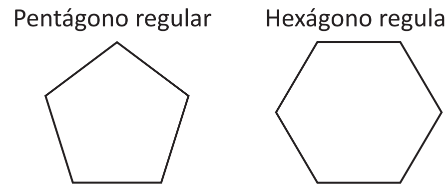
Triángulo rectángulo — Triángulo isósceles — Triángulo equilátero

Triángulo	Figura simétrica	n.° de ejes de simetría	Simetría puntual
triángulo rectángulo			
triángulo isósceles			
triángulo equilátero			

3.2 Simetría de polígonos regulares

Analiza

Observa el pentágono y hexágono regular y responde:

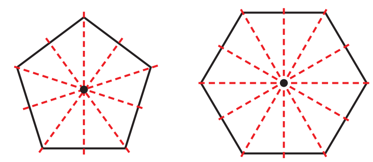


a. ¿Qué polígonos son figuras simétricas? Dibuja todos los ejes de simetría.
b. ¿Qué polígonos tienen simetría puntual? Dibuja el centro de simetría.
c. Completa la tabla marcando con un cheque (✓) si la figura posee ese tipo de simetría y con una equis (✗) si no la posee. Además escribe el número de ejes de simetría.

Polígono	Figura simétrica	n.° de ejes simetría	Simetría puntual
pentágono regular			
hexágono regular			

d. ¿Qué relación hay entre el número de lados del polígono regular y el tipo de simetría que posee? ¿Y qué relación hay entre el número de lados y el número de ejes de simetría?

Soluciona



a. Ambos polígonos (el pentágono regular y el hexágono regular) son figuras simétricas.
b. El pentágono regular no posee simetría puntual, pero el hexágono regular sí la posee.
c. Completo la tabla:

Polígono	Figura simétrica	n.° de ejes simetría	Simetría puntual
pentágono regular	✓	5	✗
hexágono regular	✓	6	✓

d. Observo que los polígonos regulares son figuras simétricas, y si el número de lados es par, entonces el polígono posee simetría puntual. Además, el número de ejes de simetría es igual al número de lados del polígono regular.

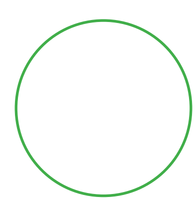
Comprende

En general:
- Todos los polígonos regulares son figuras simétricas, y la cantidad de ejes de simetría es igual al número de lados del polígono.
- Si el número de lados del polígono regular es par, entonces la figura tiene simetría puntual.

Resuelve

1. Responde las siguientes preguntas sobre el heptágono regular (7 lados):
   a. ¿Es una figura simétrica? En caso de serlo, ¿cuántos ejes de simetría tiene?
   b. ¿Posee simetría puntual?

2. Analiza el círculo y contesta:
   a. ¿Es una figura simétrica? En caso de serlo, ¿cuántos ejes de simetría tiene?
   b. ¿Tiene simetría puntual? En caso de tenerla, ¿cuál es el centro de simetría?



Unidad 11

Formas de contar y ordenar objetos

En esta unidad aprenderás a

- Elaborar un diagrama de árbol
- Encontrar todas las posibles formas de ordenar un grupo de objetos
- Determinar por conteo la cantidad de formas para seleccionar objetos
- Calcular probabilidades

1.1 Ordenamientos de objetos

Analiza

En una carrera de costales participan Ana, Carlos, José y Marta. Si Ana llega en primer lugar, ¿cuáles son las diferentes maneras en el orden de llegada de los demás?

Soluciona

Elaboro una tabla para organizar el orden de llegada:

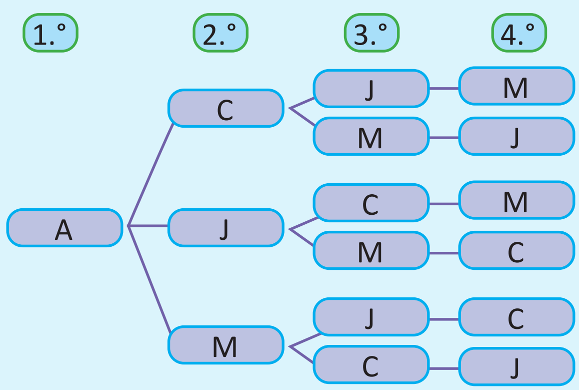
1.°	2.°	3.°	4.°
Ana	Carlos	José	Marta
Ana	Carlos	Marta	José
Ana	José	Carlos	Marta
Ana	José	Marta	Carlos
Ana	Marta	José	Carlos
Ana	Marta	Carlos	José

Contar ordenadamente permite eliminar las formas que estén repetidas y no omitir (del conteo) a alguna de ellas.

R: 6 formas en el orden de llegada.

Comprende

Para contar todas las formas de ordenar objetos se puede utilizar una tabla, pero existe un método llamado **diagrama de árbol** que ayuda a tener menos errores al contar. El diagrama de árbol es la forma más rápida ya que se escriben menos palabras. Por ejemplo, la tabla de la solución anterior se puede representar con un diagrama de árbol así:

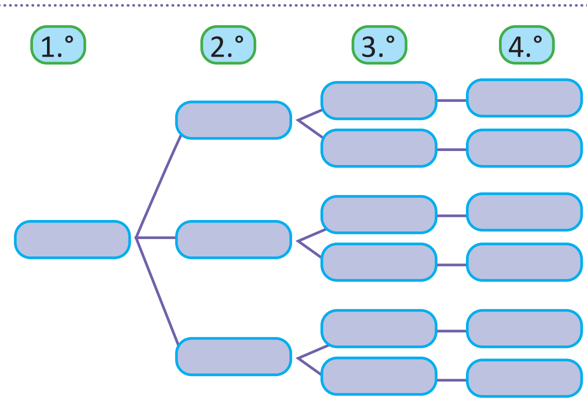


Es más fácil usar las iniciales.
A: Ana
C: Carlos
J: José
M: Marta

Observa que:
Cada línea del diagrama de árbol representa una forma de ordenar los elementos. Es decir, las 6 líneas del diagrama representan las 6 formas de ordenar la llegada de los niños a la meta.

Resuelve

En una carrera de costales participan Antonio, Beatriz, Carolina y Daniel. Si Beatriz llega en primer lugar, ¿cuáles son las diferentes maneras en el orden de llegada de los demás? Completa el diagrama de árbol.



1.2 Elaboración de diagramas de árbol

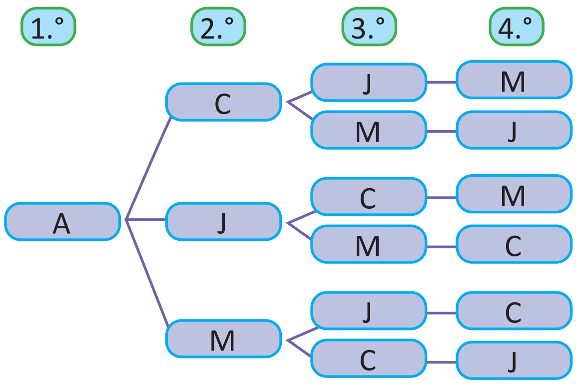
Analiza

Si antes de la competencia de costales de la clase anterior, no se sabe quién llegará en primer lugar, ¿de cuántas formas los estudiantes pueden llegar a la meta?

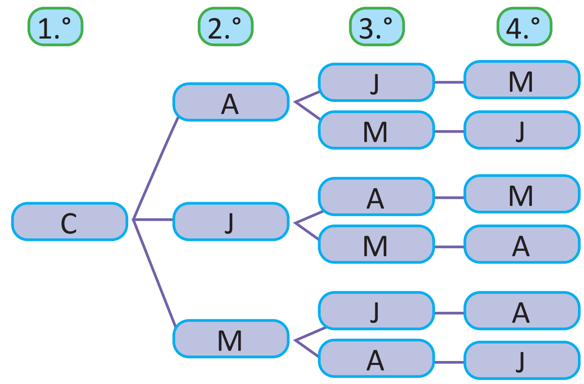
Las "formas en que los estudiantes pueden llegar a la meta", se debe entender como el orden en que llegan.

Soluciona

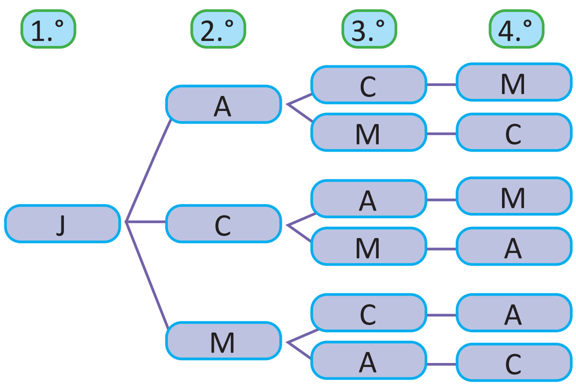
Dibujo los diagramas de árbol de todas las formas de llegar a la meta:



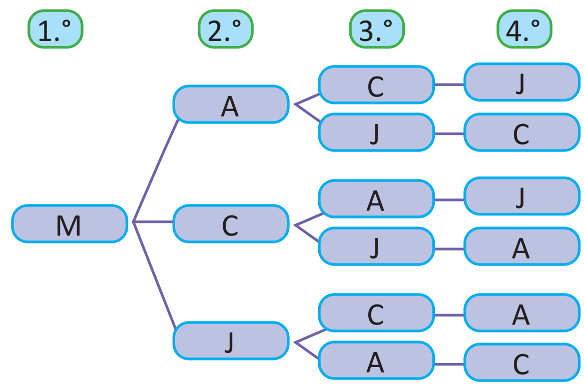
R: 6 formas.



R: 6 formas.



R: 6 formas.



R: 6 formas.

Como por cada estudiante resultan 6 formas y son 4 estudiantes, en total se tienen 6 × 4 = 24 formas.
R: 24 formas.

Comprende

Se elabora el diagrama de árbol para conocer y contar todas las formas de ordenar los objetos en una situación.

Resuelve

Para los siguientes ejercicios dibuja el diagrama de árbol y responde lo que se te pide:

1. Con los números 1, 2 y 3, ¿cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar?

2. En un estudio fotográfico desean retratar a tres mascotas; un perro, un gato y un conejo. Si se colocan en línea, ¿de cuántas formas se pueden ordenar los animales para la fotografía?

1.3 Aplicación del diagrama de árbol

Analiza

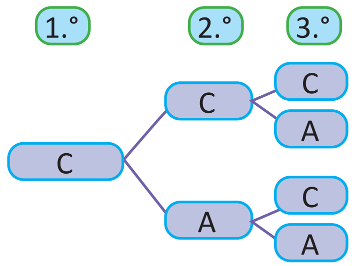
Si para el lanzamiento de una moneda tres veces se hiciera un listado de las formas en que podría caer, ¿cuántas formas tendría el listado?

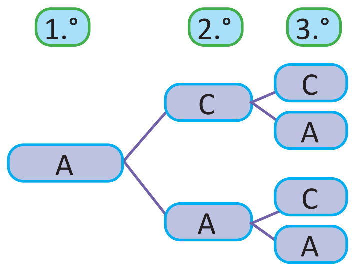
Ejemplo de una forma en que cae la moneda en los lanzamientos es: cara, águila, cara.

Soluciona

Dibujo el diagrama de árbol completo y utilizo C si cae cara y A si cae águila:


Julia





R: 8 formas.

Comprende

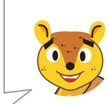
Se puede utilizar el diagrama de árbol para resolver problemas que requieren contar la cantidad total de formas para ordenar objetos. Al total de formas se les llama **casos posibles**.

Resuelve

Con los siguientes números se formarán cantidades de cuatro cifras, sin repetir ninguna.

| 1 | 2 | 3 | 4 |

El total de números que se pueden formar es equivalente a determinar todos los casos posibles en las formas de ordenar las cifras.



a. Dibuja el diagrama de árbol cuando el primer número es 1.

b. Encuentra todas las cantidades que se pueden formar.

✦ Desafíate

Con los números de las tarjetas:

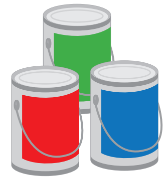
| 0 | 1 | 2 | 3 |

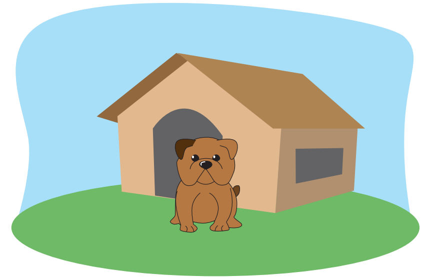
¿cuántos números de dos cifras (sin repetir ninguna) se pueden formar?

1.4 Combinaciones de objetos

Analiza

Mario pintará la casa de su perro con tres colores de pintura: rojo, azul y verde; pero no le gustan esos colores, así que decide elegir dos para combinarlos y hacer un nuevo color.
Encuentra todas las formas de combinar dos de esos colores.

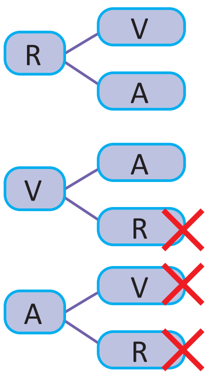




Soluciona

Antonio

Utilizo el diagrama de árbol (R: rojo, V: verde, A: azul)

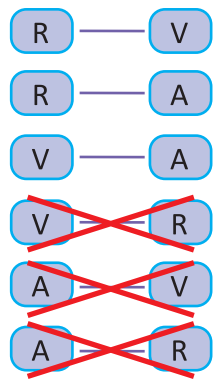


Como seleccionar rojo y verde es lo mismo que verde y rojo, elimino las opciones repetidas.

R: 3 formas de combinar colores diferentes.

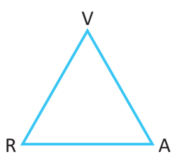
Ana

Elaboro una lista para seleccionar las pinturas y elimino las mezclas que se repiten:



R: 3 formas de combinar colores diferentes.

Otra forma es trazando líneas que unan dos de las pinturas a combinar y luego contamos cuántas líneas se forman. A estas figuras se les llama **Grafos** y relaciona objetos dos a dos.



Elaborando una tabla de doble entrada. Las casillas centrales están vacías pues sería la mezcla del mismo color; además en la parte inferior y superior de la diagonal se repiten las combinaciones, por lo que solo se toma en cuenta la parte superior.

	R	V	A
R		✓	✓
V	×		✓
A	×	×	

Comprende

Para contar todas las formas de combinar objetos, se puede usar el diagrama de árbol, pero se deben eliminar algunas formas en la solución porque se consideran repetidas; en la combinación de objetos el orden de ellos no importa. Al total de formas diferentes de combinar los objetos también se les llama **casos posibles.**

Resuelve

1. Para vacaciones, Mario desea visitar a sus abuelos, su tía y su hermano, pero sus padres le dicen que solo puede hacer dos de las visitas. ¿De cuántas formas puede combinar los lugares a visitar?

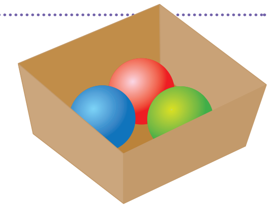
2. En una tienda se venden bombones de fresa, uva, naranja y sandía. Si se compran solo dos bombones, ¿cuántos formas de combinar los sabores hay para elegir?

1.5 Situación de extracción de objetos

Analiza

En una caja hay 3 bolitas, 1 azul, 1 roja y 1 verde. Se sacarán 2 bolitas de una sola vez.

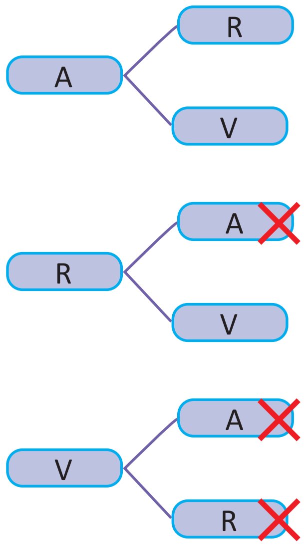
a. ¿Cuántos casos posibles se pueden dar al extraer las bolitas?
b. ¿En cuántos casos una de las bolitas es verde?



Soluciona

Puedo utilizar el diagrama de árbol para determinar los casos posibles:

José



En la extracción de las dos bolitas de una sola vez, no importa el orden. Es la misma acción sacar una bolita verde y una roja, que una roja y una verde.

a. Los casos posibles son: AR, AV y RV.
R: 3 casos posibles.

b. Los casos en los que una de las bolitas es verde son AV y RV.
R: 2 casos.

Comprende

De los casos posibles se pueden tomar algunos de ellos que cumplan una condición; a estos se les llamará **casos que cumplen la condición**.

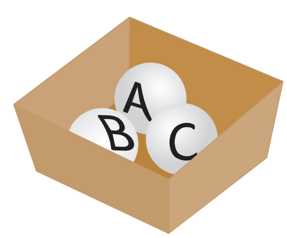
Resuelve

En una caja hay 3 bolitas blancas, cada una está identificada con una letra. Las letras con las que se identifican las bolitas son A, B y C. Se sacarán 2 bolitas de una sola vez.

a. ¿Cuántos casos posibles se pueden dar al extraer las bolitas?

b. ¿Cuántos casos cumplen la condición de tener la bolita con la letra B?

c. ¿Cuántos casos cumplen la condición de tener la bolita con la letra C?



2.1 Probabilidad

Analiza

Se lanzará una moneda una vez:

a. ¿Cuáles son los casos posibles para el resultado?
b. ¿Cuántos casos cumplen la condición de ser águila?
c. Expresa con un número la posibilidad de que caiga águila.

Soluciona

Beatriz

a. Los casos posibles para el resultado son 2, que corresponden a cara y águila.
R: 2 casos posibles.

b. Como debe resultar águila, dentro de los casos posibles solo hay 1 caso.
R: 1 caso que cumple la condición.

c. Como es 1 de los 2 casos posibles entonces lo expreso como $\frac{1}{2}$.
R: $\frac{1}{2}$

Comprende

El número que expresa la posibilidad de que ocurran los casos, cumpliendo una condición se le llama **probabilidad**. Para calcular la probabilidad se efectúa lo siguiente:

1. Se encuentra el número de los casos posibles.
2. Se encuentra el número de los casos que cumplen con la condición.
3. Se aplica la fórmula de la probabilidad:

$$\textbf{probabilidad} = \frac{\textbf{casos que cumplen la condición}}{\textbf{casos posibles}}$$

Resuelve

1. En una bolsa oscura se tienen pelotas de tres colores: azul, verde y rojo. Al extraer una:
   a. ¿Cuántos casos posibles hay al realizar la extracción?
   b. ¿En cuántos casos se cumple que en la extracción se obtiene una pelota azul?
   c. Utiliza la fórmula para calcular la probabilidad de extraer una pelota azul.

2. Si se agrega otra pelota azul a la situación de 1.:
   a. ¿Cuántos casos posibles hay al realizar la extracción?
   b. ¿En cuántos casos se cumple que en la extracción se obtiene una pelota azul?
   c. Utiliza la fórmula para calcular la probabilidad de extraer una pelota azul.

Para calcular la probabilidad considera que las dos pelotas azules son distinguibles (es decir, se diferencian una de la otra).

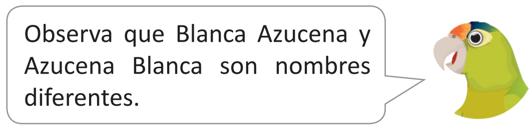
2.2 Practica lo aprendido

1. Antonio pronto tendrá una hermanita y a sus padres les gustan cuatro nombres: Azucena, Blanca, Celina y Diana, de los cuales deben elegir dos para nombrar a la niña.

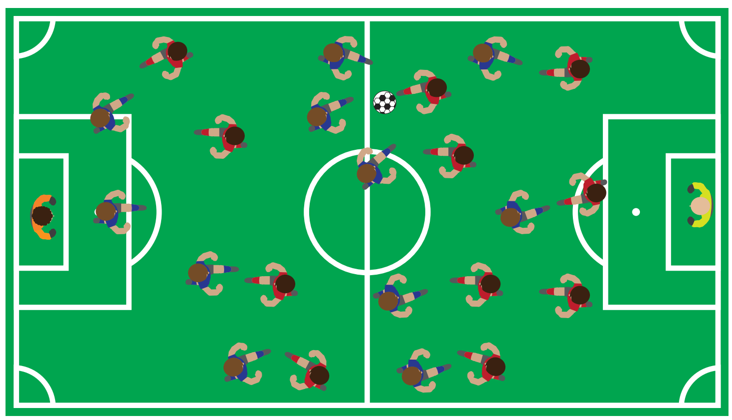
   a. Dibuja el diagrama de árbol con todas las opciones de los nombres que pueden elegir.

   b. ¿Cuántos son los casos posibles?

   c. Sin dibujar todos los diagramas de árbol, ¿cómo se puede conocer la cantidad de casos posibles?



2. Una escuela tiene tres equipos de fútbol: Escarlatas, Fantásticos y Guerreros. Si juegan todos contra todos, ¿cuántos partidos se jugarán en total? Utiliza cualquiera de los métodos aprendidos en clase y no olvides descartar aquellas formas que se repiten.



✦Desafíate

Se lanza un dado una vez:

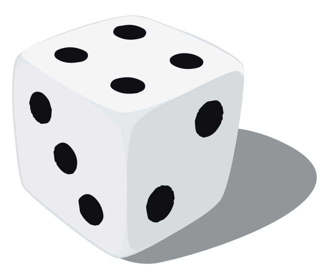
a. ¿Cuántos casos posibles hay?

b. ¿Cuántos casos cumplen la condición de ser 6?

c. Utiliza la fórmula para calcular la probabilidad de obtener un 6.

d. ¿Cuántos casos cumplen la condición de ser impar?

e. Utiliza la fórmula para calcular la probabilidad de obtener un número impar.



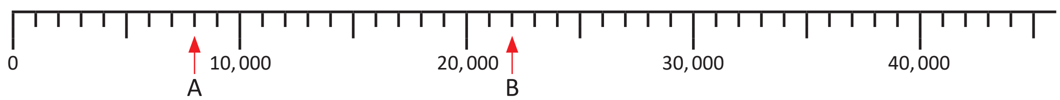
Repaso

A continuación se presentan una serie de ejercicios y problemas sobre los contenidos estudiados a lo largo del primer y segundo ciclo. Estos temas serán de mucha utilidad en grados posteriores.

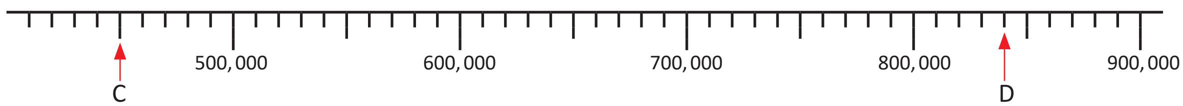
Practica lo aprendido

1. En las siguientes rectas numéricas, identifica los números que están señalados:

a.



b.



2. Coloca el símbolo “>”, “<” o “=” en cada casilla, según corresponda:

a. 548, 781 ☐ 547, 871

b. 9, 874 ☐ 87, 403

3. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a. 54, 024 + 125, 782

b. 100, 000 – 542

4. Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones:

a. 2, 354 × 6

b. 321 × 10

c. 423 × 100

5. Calcula el cociente de las siguientes divisiones y el residuo si lo hay:

a. 79 ÷ 5

b. 80 ÷ 4

c. 53 ÷ 8

d. 353 ÷ 8

e. 96 ÷ 24

6. Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a. (18 – 4) ÷ 2

b. 6 × 7 – 3 × 4

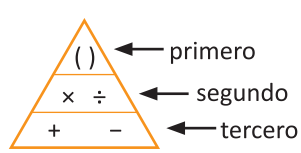
c. 3 × (4 + 8) × 5

d. 42 ÷ 6 – 35 ÷ 5

e. 36 ÷ (1 + 2) × 4

f. 4 × 2 – 30 ÷ (8 + 2)

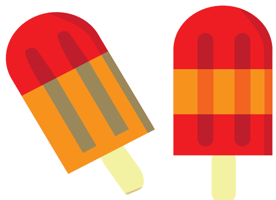
Recuerda el orden de las operaciones:



7. Encuentra el mínimo común múltiplo (mcm) de 12 y 20.

8. Encuentra el máximo común divisor (MCD) de 24 y 60.

9. Marta comprará paletas y galletas. Las paletas vienen en paquetes de 6 unidades y las galletas en paquetes de 8 unidades. Ella quiere comprar la misma cantidad de paletas y galletas. ¿Cuántas galletas comprará como mínimo?



10. Escribe el número que hace falta:

a. 0.6 es $\boxed{}$ veces 0.1

b. 0.28 es $\boxed{}$ veces 0.01

11. Realiza las siguientes operaciones de números decimales:

a. 0.45 + 1.46 b. 6.45 + 1.2 c. 5.23 − 1.94 d. 7 − 3.52

12. Calcula:

a. 2.43 × 10 b. 4.81 × 100 c. 62.3 ÷ 10 d. 42.1 ÷ 100

13. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a. 2.7 × 3 b. 3.1 × 421 c. 1.34 × 7 d. 2.5 × 50

e. 4.2 × 1.3 f. 1.2 × 0.3 g. 0.3 × 0.6 h. 0.8 × 0.2

14. Realiza las siguientes divisiones:

a. 9.3 ÷ 3 b. 8.24 ÷ 4 c. 10 ÷ 0.2 d. 80 ÷ 3.2

e. 7.2 ÷ 2.4 f. 7.68 ÷ 1.2 g. 2 ÷ 8 h. 3 ÷ 4

15. Una varilla de hierro mide 3 metros y pesa 2.4 libras. ¿Cuánto pesa 1 metro de esta varilla?

16. Realiza las siguientes sumas, expresa el resultado como fracción propia más simple o número mixto.

a. $\frac{5}{7} + \frac{4}{7}$

b. $2\frac{1}{9} + 1\frac{4}{9}$

c. $\frac{4}{11} + 2\frac{5}{11}$

d. $4\frac{5}{7} + 2\frac{4}{7}$

e. $2\frac{3}{5} + 4\frac{2}{5}$

f. $\frac{4}{3} + \frac{5}{6}$

17. Realiza las siguientes restas, expresa el resultado como fracción propia más simple o número mixto:

a. $\frac{15}{7} - \frac{2}{7}$

b. $6\frac{5}{9} - 2\frac{1}{9}$

c. $4\frac{3}{5} - 3$

d. $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

e. $\frac{7}{6} - \frac{3}{10}$

f. $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}$

g. $3\frac{3}{5} - 1\frac{2}{3}$

h. $2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}$

i. $4 - 3\frac{1}{2}$

18. Efectúa, luego expresa el resultado como fracción propia más simple o número mixto:

a. $\frac{3}{5} \times 4$

b. $1\frac{1}{4} - 3$

c. $\frac{10}{3} \times \frac{3}{5}$

d. $\frac{6}{7} \div 2$

e. $1 \div \frac{1}{4}$

f. $\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}$

19. Completa los espacios en blanco aplicando las propiedades de los números:

a. $0.8 + 0.4 = \boxed{} + 0.8$

b. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \boxed{}$

c. $(198 + 82) + 16 = 198 + (\boxed{} + 16)$

d. $(1.3 \times 2.5) \times 4 = 1.3 \times (\boxed{} \times 4)$

e. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 6 = \frac{1}{2} \times \boxed{} + \frac{1}{4} \times \boxed{}$

f. $(12 - 6) \div 3 = 12 \div \boxed{} - 6 \div \boxed{}$

Practica lo aprendido

1. Para cada uno de los siguientes problemas escribe el **PO** y resuelve identificando la cantidad a comparar, la cantidad base y la cantidad de veces.

   a. Antonio ahorró $36 y esto es 4 veces comparado con la cantidad que ahorró Julia. ¿Cuánto dinero ahorró Julia?

   b. Juan compró 3 plantas y su mamá compró 5 veces esta cantidad de plantas. ¿Cuántas plantas compró la mamá de Juan?

   c. María corrió 200 m y Marta corrió 800 m. ¿Cuántas veces es la distancia recorrida por Marta comparada con la distancia recorrida por María?

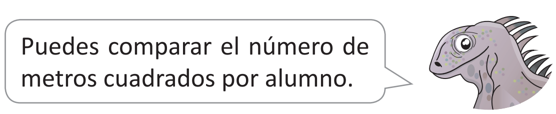
   d. Mario tiene una cinta de 6 m y su amiga Beatriz tiene una cinta de 8 m. ¿Cuántas veces es la longitud de la cinta de Mario comparada con la longitud de la cinta de Beatriz?

   e. Un rectángulo mide 10 cm de largo, esto es 2.5 veces comparado con la longitud del ancho. ¿Cuántos centímetros mide el ancho?

   f. José lee 10 páginas por día, mientras que Carmen lee 1.5 veces con respecto a la cantidad de páginas que lee José. ¿Cuántas páginas lee Carmen?

2. Compara la cantidad de estudiantes en los salones de 5.° y 6.° grado. ¿Cuál está más lleno?

	5.° grado	6.° grado
n.° de alumnos	10	16
Área (m^2)	32	48



3. Don Carlos sembró maíz en dos parcelas diferentes y obtuvo los datos que se presentan en la tabla. ¿Cuál parcela fue más productiva?

	Parcela A	Parcela B
n.° de matas	2,000	2,400
Área (m^2)	500	800

4. Determina la rapidez, distancia o tiempo según sea el caso:

a. ¿Cuál es la rapidez de un automóvil que recorre 120 km en 3 horas?

b. ¿Cuál es la distancia de un automóvil que viaja con una rapidez de 50 km/h durante 4 horas?

c. ¿Cuánto tiempo tarda un automóvil en recorrer 280 km si viaja con una rapidez de 70 km/h?

5. Identifica si en las siguientes situaciones las cantidades son directa o inversamente proporcionales, o ninguna de las dos:

a. El número de tiquetes que se compran para una rifa y su costo:

n.° de tiquetes	1	2	3	4	...
Costo ($)	2	4	6	8	...

b. El número de trabajadores y el tiempo que tardan en pintar una casa:

n.° de trabajadores	1	3	6	12	...
n.° de días	12	6	4	1	...

c. El número de mangos de Julia y Marta al repartirse 10 mangos:

Cantidad de mangos de Julia	1	2	3	4	...
Cantidad de mangos de Marta	9	8	7	6	...

d. El número de niños y la cantidad de jugo que les corresponde a cada uno al repartir 800 ml:

n.° de niños	1	2	4	8	...
Cantidad de jugo (ml)	800	400	200	100	...

6. Al pesar 20 tornillos del mismo tipo pesan 60 g, ¿cuánto pesarán 40 tornillos?

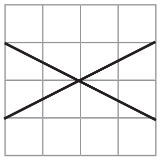
n.° de tornillos	20	40
Peso (g)	60	a

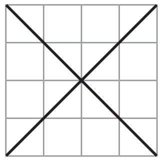
7. Hay vino en 4 toneles de 200 litros cada uno. Se quiere envasar esta cantidad de vino usando 16 toneles iguales y llenos completamente. ¿Cuál debe ser la capacidad de esos nuevos toneles?

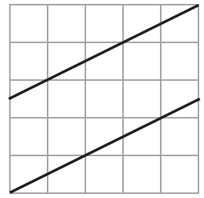
n.° de toneles	4	16
Capacidad (litros)	200	a

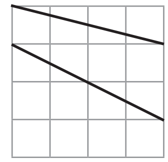
Practica lo aprendido

1. Identifica en cuáles de los literales se observan rectas paralelas y en cuáles perpendiculares:

a. 

b. 

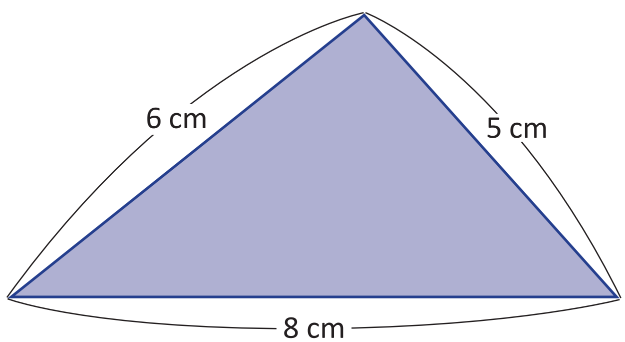
c. 

d. 

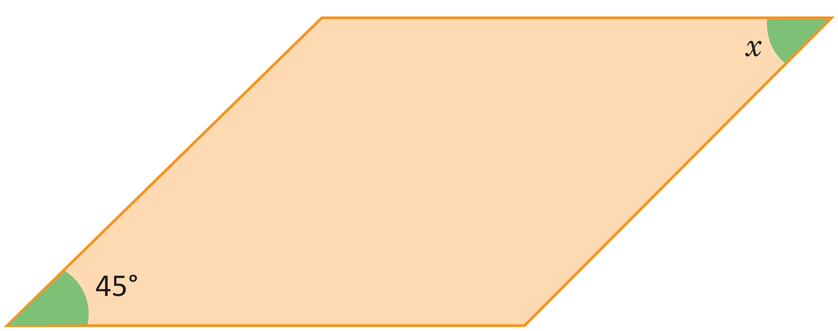
2. Identifica las figuras geométricas que cumplen con las características dadas:

Figura Características	Trapecio	Paralelogramo	Rombo	Rectángulo	Cuadrado
2 pares de lados opuestos paralelos					
4 lados de igual longitud					
4 ángulos rectos					
La longitud de sus dos diagonales es igual					
Las diagonales se cortan perpendicularmente					

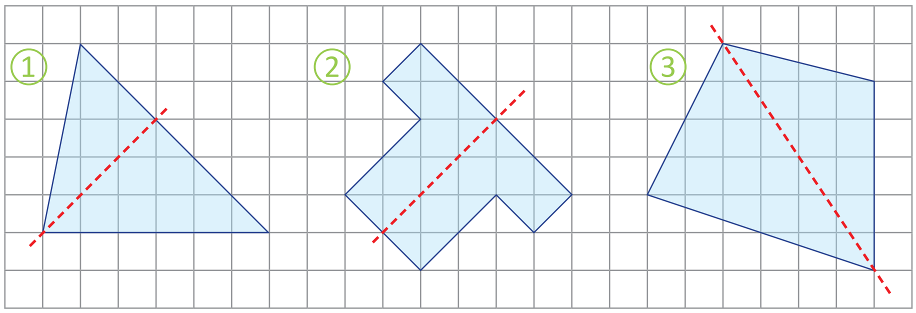
3. Calcula el perímetro de la siguiente figura.



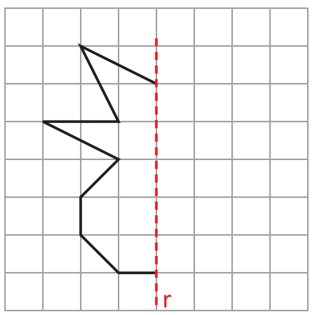
4. Encuentra el valor del ángulo x en el paralelogramo. Justifica tu respuesta.



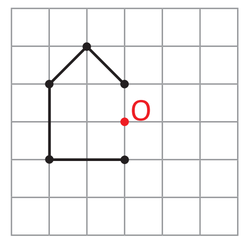
5. Identifica cuál de las siguientes figuras es simétrica con respecto al eje indicado:



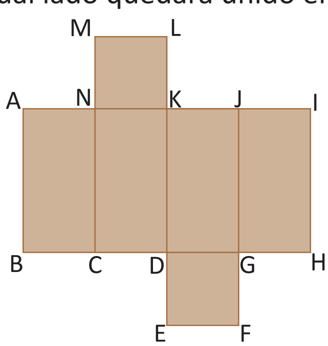
6. Completa la figura para que sea simétrica, respecto al eje r.



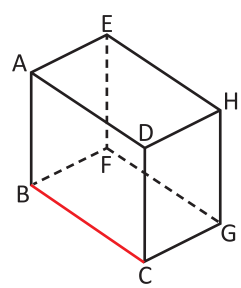
7. Completa la figura para que tenga simetría puntual, con centro de simetría el punto O.



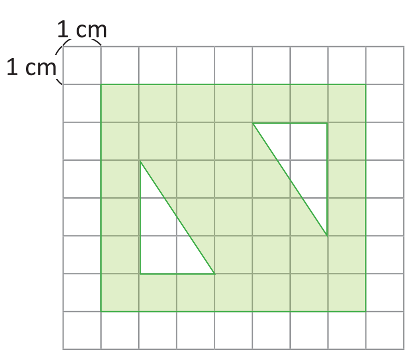
8. Al armar el patrón que se muestra, responde:
   a. ¿Con cuál lado quedará unido el lado IJ?
   b. ¿Con cuál lado quedará unido el lado EF?
   c. ¿Con cuál lado quedará unido el lado CD?



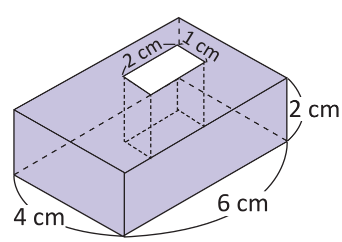
9. Observa el prisma y responde:
   a. ¿Con qué caras es perpendicular la arista AB?
   b. ¿Con qué aristas es perpendicular la arista BC?



10. Encuentra el área de la figura coloreada.



11. Calcula el volumen del cuerpo geométrico compuesto.



Libro de texto Matemática 6

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

JICA