GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

Tomo 1

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

ESMate

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Diseño y revisión de diagramación

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Imagen de portada con fines educativos, esta se construye a partir de una secuencia de cuadrados. En cada uno de ellos se forman cuatro triángulos rectángulos congruentes.

372.704 5
M425 Matemática 8 [recurso electrónico] : tomo 1 : guía metodológica / Ana Ester Argueta Aranda, Erick Amilcar Muñoz Deras, Reina Maritza
slv Pleitez Vásquez, Diana Marcela Herrera Polanco, Francisco Antonio Mejía Ramos, Norma Elizabeth Lemus Martínez, Salvador Enrique Rodríguez Hernández, César Omar Gómez Juárez. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2019.
1 recurso electrónico, (272 p. : il., 28 cm.) -- (Esmate)
Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 76.6 mb). -- www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-1-4 (E-Book)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Ejercicios, problemas, etc. 3. Educación primaria-Libros de texto. I. Argueta Aranda, Ana Ester, coaut. II. Título.

Estimadas y estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, en el que expresamos nuestro agradecimiento y estima por la importante labor que desempeñan en beneficio de la sociedad salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE 2) se ha diseñado la guía metodológica, que será una herramienta importante para la labor docente que realizan día a día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas y precisas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático en el estudiantado salvadoreño.

Es importante señalar que la Guía metodológica está en correspondencia con las actividades y secuencia para el desarrollo de las clases propuestas en el Libro de texto y Cuaderno de ejercicios diseñados para el estudiantado, concretizando de esta manera lo emanado y anhelado en el Programa de estudios de Matemática.

Aprovechamos esta oportunidad para expresar nuestra confianza en ustedes. Sabemos que leerán y analizarán esta Guía metodológica con una actitud dispuesta a aprender y mejorar, tomando en cuenta su experiencia y su formación docente. Creemos en su compromiso con la niñez y la juventud salvadoreña para que puedan desarrollarse integralmente.

Atentamente,

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia
y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de
Ciencia y Tecnología, *Ad honorem*

Índice

I. Introducción

La presente Guía metodológica (GM) forma parte de una serie de materiales elaborados por el equipo del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) del Ministerio de Educación, con la finalidad de contribuir a la mejora de los procesos de aprendizaje en la asignatura de Matemática.

La segunda edición, contiene dos tomos, en los cuales se han incorporado las sugerencias y observaciones brindadas por los docentes de tercer ciclo del sistema educativo nacional.

En esta GM se explican con detalle todos los elementos que deben considerarse para realizar el proceso de aprendizaje, con base en la resolución de problemas planteados para lograr el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Su uso permitirá al docente abordar la clase de forma efectiva y optimizar el uso del Libro de texto (LT) y el Cuaderno de ejercicios (CE).

Los principales objetivos que se pretenden lograr con el uso de esta guía son los siguientes:

1. Orientar la planificación de la clase a partir de una propuesta de contenidos e indicadores organizados temporalmente en lecciones y unidades.
2. Ofrecer sugerencias metodológicas concretas y pertinentes que ayuden a los docentes y estudiantes en la comprensión de los contenidos.
3. Proponer estrategias concretas para el desarrollo de los indicadores de logros que permitan el abordaje de las competencias matemáticas que deben alcanzar los estudiantes.

El MINED ofrece al sistema educativo nacional estos materiales con la convicción de que el uso pertinente de estos, permitirá fortalecer la práctica docente y así desarrollar de manera efectiva los aprendizajes de los estudiantes. Para lograr este propósito, a continuación se establecen los puntos de partida esenciales para su implementación:

1. **Importancia fundamental del aprendizaje de la matemática**: el desarrollo del razonamiento matemático genera en los estudiantes competencias para resolver problemas complejos, analizar situaciones, ser creativos, críticos, eficientes, pragmáticos y lógicos; capacidades que les permitirán vivir como ciudadanos comprometidos consigo mismos y con el desarrollo sostenible de sus comunidades, ya que los saberes matemáticos permiten reconocer que la ciencia está presente en todo lo que nos rodea, por lo que cualquier objeto de la realidad puede ser utilizado como herramienta tecnológica que ayude a resolver situaciones problemáticas, las cuales enfrentará día con día cada estudiante.

2. **Rol fundamental del docente y protagonismo del estudiante:** la labor del docente se vuelve determinante en la formación del estudiante, de ahí su importancia para que el sistema educativo logre sus propósitos; estos materiales están estructurados de tal manera que el docente tenga herramientas oportunas para "asistir" el aprendizaje, es decir, con la mirada puesta en el logro del aprendizaje de cada estudiante, lo cual implica que ellos sean los protagonistas en las clases. Este protagonismo se evidencia con el logro de los indicadores de aprendizaje en cada clase, los cuales se convierten en "peldaños" para desarrollar las competencias de unidad y para lograr que los estudiantes utilicen todos los saberes alcanzados para resolver exitosamente problemas simples y complejos. Esto tiene como base, el conocimiento y la comprensión de cada indicador y su concreción en cada una de las clases propuestas.

3. **Secuencia de la clase, experiencia auténtica del aprendizaje**: el protagonismo del estudiante se traduce en la propuesta de la secuencia de la clase, la cual contiene los siguientes pasos o momentos:

▪ Problema inicial
▪ Solución del problema inicial
▪ Conclusión
▪ Problemas y ejercicios

El análisis de esta secuencia se desarrolla describiendo la intencionalidad de cada elemento de la clase. De esta forma, se propone un itinerario para que los estudiantes, asistidos por sus docentes, construyan los conceptos y logren las competencias requeridas.

4. **Sintonía determinante con la gestión escolar**: para optimizar la efectividad de estos materiales educativos, otro aspecto fundamental a considerar es la generación de un ambiente propicio para el desarrollo de los aprendizajes, el cual está unido estrechamente con la gestión administrativa y organización de la institución educativa. Entre los elementos de dicha gestión, se destaca como determinante la cantidad de horas clase efectivas que el personal docente desarrolla en el año escolar; la propuesta de contenidos está planteada para que sean desarrollados durante al menos 160 horas clase al año, las cuales se deben garantizar como condición indispensable en el logro de los aprendizajes.

5. **Aprendizaje de los estudiantes en el hogar con el uso del Cuaderno de ejercicios**: el desarrollo de los saberes o de un contenido no solo está sujeto a la hora clase, sino que se prolonga al tiempo de estudio en sus hogares; por ello, se establece la práctica de problemas y ejercicios en los CE, para que el estudiante pueda seguir profundizando en la comprensión de los saberes matemáticos de cada una de las clases desarrolladas. Además, con esta prolongación de la clase al hogar, también se busca la implicación de la familia como espacio legítimo para la consolidación del saber e integración con la vida cotidiana.

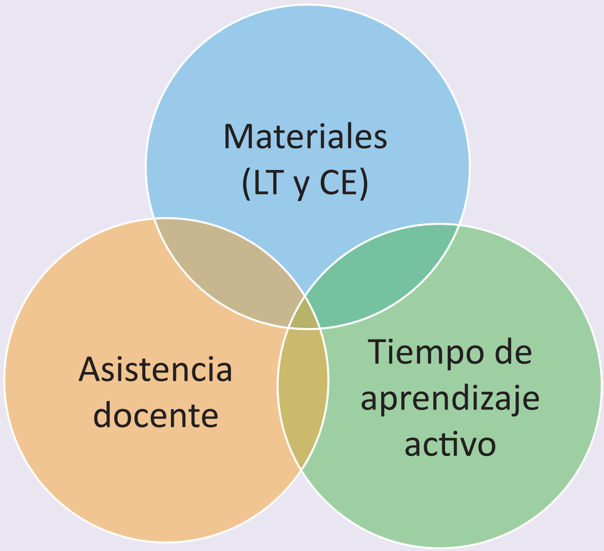
Uno de los elementos importantes a mencionar de esta guía es el apartado **IV. Estructura de la Guía metodológica**, donde se explican las partes de la clase, la cual tiene especial relevancia, ya que en ella se profundiza por qué y para qué de cada elemento de la clase; además, describe las posibles limitaciones que los estudiantes tengan al desarrollar cada uno, como una forma de orientar al docente para aprovechar las oportunidades que ofrecen los errores en la construcción del aprendizaje. De esta forma, se considera que los docentes podrán interiorizar la intencionalidad de cada elemento y así tener más recursos para mejorar los logros de los aprendizajes en cada clase. También se propone, en esta parte, un prototipo de prueba de cada unidad, formulado en correspondencia directa con los indicadores de logro y los problemas planteados en cada clase, el cual puede ser de gran utilidad como una referencia para constatar los aprendizajes de cada estudiante en coherencia con todo el proceso.

Otro elemento relevante es el apartado **V. Orientación para el desarrollo de una clase de matemática con base en la resolución de problemas**, donde se describen cada uno de los elementos de la secuencia de la clase, las principales actividades que deben realizar los estudiantes en su proceso de aprendizaje y los docentes en la asistencia o mediación de los mismos. Se destacan además los aspectos que sugieren acciones específicas en sintonía directa con el protagonismo del estudiante y la función mediadora del docente.

Esta Guía y demás materiales educativos han sido elaborados con la participación activa de muchos docentes a nivel nacional, que con su experiencia y empeño por la formación de los estudiantes, han hecho aportes significativos a cada uno de los elementos de los mismos. Siguiendo esta dinámica de participación, se considera importante asumir estos materiales como una propuesta flexible y mejorable, donde el personal docente deberá hacer las adecuaciones que considere necesarias para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

La meta del uso de estos materiales educativos es el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes, quienes asumirán la responsabilidad del futuro del país; y como parte de la estrategia que se propone, a continuación se presentan los factores relacionados con dicha finalidad:

Tres factores fundamentales para mejorar el aprendizaje



Estos tres factores constituyen las prioridades estratégicas: los **Materiales**, como el LT y el CE, el **Tiempo de aprendizaje activo** dentro de la clase y en el hogar y la **Asistencia** o **Facilitación** del docente para propiciar el aprendizaje.

Materiales

Para garantizar la efectividad y eficiencia del aprendizaje se necesita un material que tenga <u>la secuencia didáctica apropiada y el nivel de complejidad razonable</u>, basado en el nivel de comprensión de los estudiantes, es decir, los contenidos de dicho material tienen que ser académica y didácticamente adecuados y al mismo tiempo ser más amigables para el aprendizaje.

Para satisfacer la primera necesidad mencionada, en los dominios cognitivos que se desarrollarán en la asignatura de Matemática deben estar estrictamente reflejadas las competencias establecidas por el MINED. Para cumplir la segunda necesidad, el contenido del LT debe corresponder lo más cercanamente posible a las necesidades académicas que tienen los estudiantes salvadoreños.

Tiempo de Aprendizaje Activo

Es importante destacar que como un paso previo a la elaboración de estos materiales de texto, el MINED realizó una investigación en las aulas y detectó una característica no favorable, que el tiempo disponible en el aula para el aprendizaje activo es insuficiente, en consecuencia, se ha limitado el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, es así que en el LT que se ha elaborado, se recomienda a los docentes que aseguren un espacio de al menos 20 minutos para que cada uno de los estudiantes aprenda activamente por sí mismo o interactivamente con sus compañeros.

Aprendizaje Activo

1. En forma individual
   ¿En qué momento se fortalecen los aprendizajes?
   Cuando un estudiante está trabajando individualmente, leyendo el LT, resolviendo problemas en su cuaderno de apuntes etc., se aprende activamente. Por el contrario, cuando el estudiante solo está escuchando lo que está explicando el docente, se aprende menos porque su actitud de aprendizaje será pasiva en forma general.

   Por esta razón, se recomienda al docente que garantice un espacio de tiempo donde cada uno de sus estudiantes aprenda activamente en forma individual.

2. En forma interactiva
   En la práctica docente, muchas veces se provee asistencia a uno o dos alumnos en forma particular, dejando sin atención al resto de estudiantes ya que es un hecho que es difícil brindar asistencia a todos los estudiantes, aunque todos tienen la necesidad de aprender.

¿Existe otra alternativa para que todos los alumnos reciban asistencia oportuna?
Se debe generar aprendizaje interactivo entre alumnos (o aprendizaje mutuo), ya que este tiene varias ventajas, primero, el trabajo en parejas, si un estudiante no entiende un contenido, puede consultar a su compañero sin perder el tiempo (sin esperar la asistencia de parte del docente); segundo, el estudiante que explica a sus compañeros, profundiza su comprensión a través de la explicación en forma verbal; tercero, los alumnos a quienes no se puede dar asistencia en forma individual tendrán más oportunidad de aprender en forma oportuna y cuarto, se genera un ambiente de convivencia en el aula.

Por lo que se recomienda que realicen primero el trabajo individual y luego el aprendizaje interactivo.

Se espera que cada uno de los estudiantes intente resolver los problemas y ejercicios planteados en las páginas del LT, durante (por lo menos) 20 minutos en cada clase. Con esta actividad individual (o interactiva) se pretende contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes y por consiguiente a mejorarlo, así como incrementar la capacidad de interpretación de la situación problemática planteada.

Antes de finalizar este punto, cabe mencionar que, además del LT el CE pretende garantizar como mínimo 20 minutos de Aprendizaje Activo en el hogar. Sumando 20 minutos en el hogar a otros 20 minutos de Aprendizaje Activo en la clase, y esforzándose durante 160 días, se espera que se cumpla la siguiente relación:

(20 minutos + 20 minutos) × 160 días = Mejora de aprendizajes.

Se invita a todos los docentes del país a estar conscientes de esta fórmula.

Asistencia y facilitación

El MINED se propone cambiar el paradigma acerca del rol de los docentes, de **enseñar** hacia **asistir el aprendizaje**. Tradicionalmente, en el proceso de enseñanza se hacen esfuerzos por responder **¿qué es lo que hace el docente?**, en vez de preocuparse por saber **¿qué es lo que lograron los estudiantes?** Centrarse en el aprendizaje es un esfuerzo genuino, el cual debe ser la base para evaluar el desempeño docente.

Las actividades del docente deben ser planificadas para elevar el nivel de aprendizaje, y preocuparse por el resultado del aprendizaje de los estudiantes.

Elementos de una clase del Libro de texto

La siguiente página corresponde a la clase 2.3 de la unidad 4.

Indica el número de la lección.

Hace referencia al número de la clase.

En el primer momento de la clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido que se desarrollará.

En este segundo momento de la clase, el libro de texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Se consolida el contenido, aquí se relaciona el problema inicial y la solución, para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

En algunas clases se propone un problema más, para mejorar la comprensión del contenido.

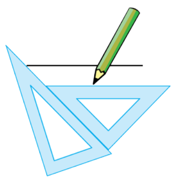
Se presentan problemas y ejercicios para que el estudiante practique lo aprendido.

Indica la unidad a la que corresponde la clase.

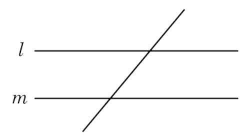
2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

P Construye dos rectas paralelas l y m, traza una secante, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

S 1. Se trazan las paralelas haciendo uso de las escuadras.

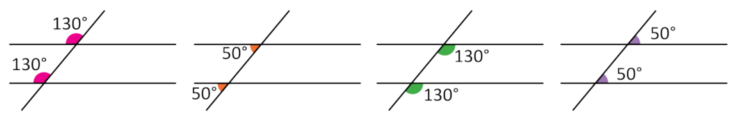


2. Se traza una recta secante a las paralelas construidas.



Para denotar el paralelismo entre dos rectas se utiliza el símbolo ∥; es decir, si la recta m es paralela a la recta l se denota como $m \parallel l$.

3. Se miden los ángulos con el transportador.

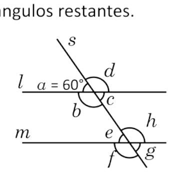


C Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales.

Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

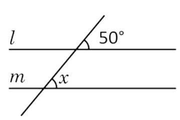
E Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\sphericalangle a$ = 60°, determina la medida de los ángulos restantes.

$\sphericalangle a + \sphericalangle d$ = 180°, por ser suplementarios $\Rightarrow$ $\sphericalangle d$ = 120°.
$\sphericalangle c = \sphericalangle a$ = 60° y $\sphericalangle b = \sphericalangle d$ =120°, por ser opuestos por el vértice.
$\sphericalangle e = \sphericalangle a$ = 60°, $\sphericalangle g = \sphericalangle c$ = 60°,
$\sphericalangle f = \sphericalangle b$ = 120° y $\sphericalangle h = \sphericalangle d$ =120°, por ser correspondientes.

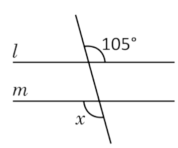


Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.

a)



b)



Unidad 4

99

Información complementaria: en el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional relacionada con la historia de la matemática, y se representan con diferentes colores:

Presaberes

Pista

Información adicional

Distribución de las clases: el libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y estas últimas compuestas por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase.

Además al finalizar cada unidad o cada lección siempre aparecen algunos problemas sobre todas las temáticas abordadas, estas clases reciben el nombre de **Practica lo aprendido**.

1. Programación anual

Trimestre	Mes	Unidad (horas)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Primero	Enero	U1: Operaciones algebraicas (20)	29 – 72 (1 – 20)	• Comunicación con símbolos. • Definición de monomio, polinomio y grado. • Reducción de términos semejantes en un polinomio. • Suma y resta de polinomios. • Multiplicación y división de un polinomio por un número y por un monomio. • Sustitución y valor numérico de polinomios. • Aplicación de los polinomios.
	Febrero Marzo	U2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (23)	73 – 121 (21 – 42)	• Sentido de la ecuación de primer grado con dos incógnitas. • Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. • Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales o fraccionarios. • Sistemas de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$. • Aplicaciones de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
	Abril	U3: Función lineal – continúa en el segundo trimestre (13)	123 – 164 (43 – 62)	• Sentido de la función lineal. • Razón de cambio. • Gráfica de la función lineal. • Relación entre la gráfica de la función $y = ax$ y la de $y = ax + b$. • Relación entre la razón de cambio y pendiente de la gráfica de $y = ax + b$. • Intercepto de la gráfica de función $y = ax + b$. • Relación entre tabla, ecuación y gráfica de la función lineal.
Segundo	Abril Mayo	U3: Función lineal – continuación (22)	165 – 223 (63 – 90)	• Trazo de la gráfica de la función lineal dada la pendiente y el intercepto. • Valores de y, cuando se delimitan los valores de x. • Expresión de una función en forma $y = ax + b$, mediante la lectura de la gráfica. • Ecuación de la función a partir de un punto de la gráfica y la pendiente, dos puntos de la gráfica o los interceptos con los ejes. • Gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. • Intercepto de la gráfica de dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$. • Aplicaciones de la función lineal.
		U4: Paralelismo y ángulos de un polígono (11)	225 – 256 (91 – 104)	• Suma de ángulos internos y externos de un polígono. • Ángulos opuestos por el vértice. • Ángulos entre paralelas: alternos internos, alternos externos y correspondientes. • Teorema de los ángulos internos de un triángulo.

				• Elementos de una demostración. • Aplicación de los ángulos entre paralelas.
		U5: Criterios de congruencia de triángulos (9)	257 – 280 (105 – 114)	• Congruencia de triángulos. • Criterios de congruencia de triángulos. • Demostración de congruencia de figuras mediante el uso de los criterios de congruencia. • Aplicación de los criterios de congruencia de triángulos.
	Julio	U6: Características de los triángulos y cuadriláteros – continúa en el tercer trimestre (13)	281 – 308 (115 – 127)	• Los ángulos de la base del triángulo isósceles. • Bisectriz de un triángulo isósceles. • Triángulos equiláteros. • Recíproco y contraejemplo de un teorema. • Criterios de congruencia de triángulos rectángulos. • Condiciones necesarias y suficientes. • Bisectrices de un triángulo.
Tercero	Julio Agosto	U6: Características de los triángulos y cuadriláteros – continuación (13)	309 – 344 (128 – 140)	• Características de los paralelogramos. • Características del rectángulo y rombo. • Relación entre paralelas y áreas.
		U7: Área y volumen de sólidos geométricos (2)	345 – 352 (141 – 144)	• Sólidos de revolución. • Características y elementos del cono y esfera.
	Septiembre	U7: Área y volumen de sólidos geométricos (15)	353 – 386 (145 – 160)	• Volumen del prisma y del cilindro. • Sólidos compuestos. • Desarrollo del cono y longitud de arco. • Área superficial del cono y la esfera. • Área superficial en sólidos compuestos.
		U8: Organización y análisis de datos estadísticos (3)	287 – 398 (161 – 165)	• Tablas de frecuencias.
	Octubre(21)	U8: Organización y análisis de datos estadísticos (16)	398 – 436 (166 – 188)	• Gráficas estadísticas: histogramas y polígonos de frecuencias. • Interpretación de datos estadísticos. • Medidas de tendencia central: media aritmética, moda y mediana. • Valor aproximado. • Dígitos significativos. • Cantidades en notación científica.

Para desarrollar todo el contenido establecido, se debe cumplir la programación mostrada.

2. Apartados de la Unidad

a) Competencia de la unidad: describe las capacidades que los estudiantes deben adquirir al finalizar la unidad.

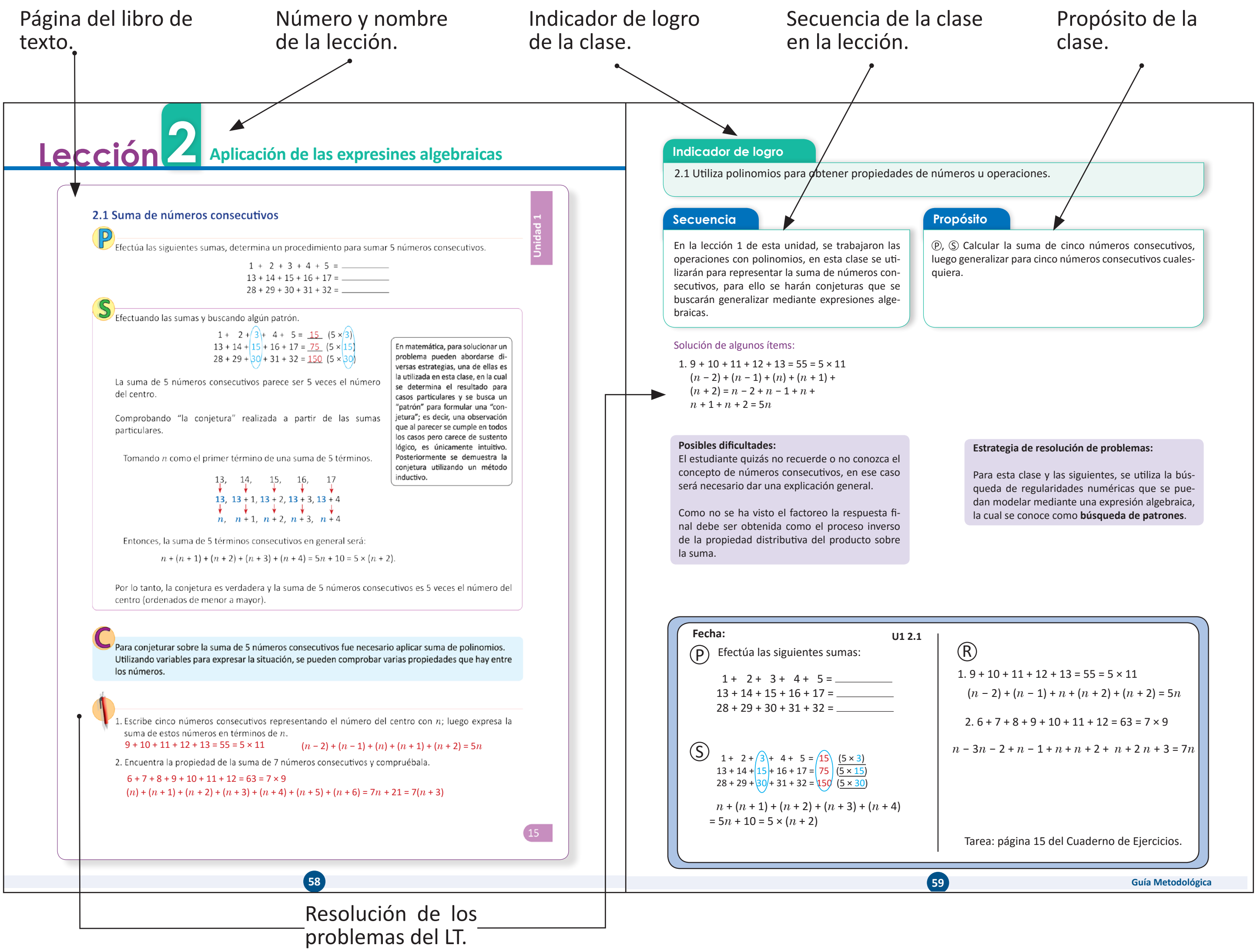
b) Relación y desarrollo (entre el grado anterior y el posterior): muestra en qué grado los estudiantes aprendieron los presaberes y en qué grado darán continuidad al contenido.

c) Plan de estudio de la unidad: presenta el contenido de cada clase.

d) Puntos esenciales de cada lección: describe los elementos importantes de las lecciones por unidad.

3. Elementos de las páginas de la GM

Una de las novedades de la segunda edición de la GM es que la página del LT y el plan de pizarra aparece más grande con el objetivo que facilite el desarrollo de la clase a los docentes.



En el desarrollo de los problemas de algunas clases, se presenta información adicional e importante para el docente, esto se hace a través de un cuadro como el siguiente:

Información importante para el docente.

4. Prueba de la Unidad

Se presenta un ejemplo de la prueba para medir tanto el nivel de comprensión por parte de los estudiantes como el nivel de alcance del objetivo de la unidad por parte de los docentes. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben pensar en cómo mejorarlo y al mismo tiempo, tratar que este bajo rendimiento no sea un obstáculo para el siguiente aprendizaje. De esta manera, los docentes podrán utilizar esta prueba para discutir los resultados con sus colegas, ya sea de la misma institución o de otras.

V. Orientación para el desarrollo de una clase de Matemática con base en la resolución de problemas

1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase

En consonancia con el Programa de Estudio anterior, esta nueva versión también sugiere el desarrollo de las clases de Matemática basándose en el socioconstructivismo a través del enfoque de Resolución de Problemas. En las clases impartidas con este enfoque el centro del proceso de los aprendizajes son los estudiantes, por lo que ellos mismos construyen sus conocimientos y procedimientos a partir de la situación didáctica o problemática planteada. En este proceso, el rol principal del docente es facilitar o asistir en el aprendizaje de los estudiantes; para lo cual deberá seguir el procedimiento que se detalla a continuación:

Pasos	Proceso de aprendizaje (estudiante)	Proceso de asistencia de aprendizajes (docente)	Puntos que se deben tomar en cuenta en la asistencia
1	Confirmación de la respuesta de los problemas de la tarea y recordatorio de presaberes.	Verificar la respuesta correcta de los problemas de la tarea y asegurarse que están realizando los primeros ítems de cada grupo de problemas en el CE.	Utilizar como máximo 3 minutos para este paso.
2	Resolución individual del problema inicial de la clase.	Orientar para que lean el problema inicial de la clase, confirmar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el tema y luego invitarles a que resuelvan de manera individual.	- Mientras los estudiantes resuelven el problema inicial, el docente debe desplazarse en el aula, para verificar los avances y las dificultades que presenten. - Si presentan dificultades, deberá indicarles que lean la solución del LT. - Utilizar como máximo 6 minutos.
3	Aprendizaje interactivo con sus compañeros.	Fomentar el trabajo entre compañeros para que consulten entre ellos las soluciones y dudas.	- En un primer momento, que trabajen por parejas, gradualmente puede aumentar el número de integrantes por equipo, hasta un máximo de cuatro. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT.
4	Socialización de la solución y la conclusión de la clase.	Orientar para que lean la solución y conclusión de la clase.	Si se considera necesario, se debe explicar la solución o invitarles a que socialicen la solución en plenaria.

5	Resolución del primer ítem de la sección de problemas y ejercicios (aprendizaje activo).	Indicar que resuelvan el primer ítem de la sección de problemas.	Si hay estudiantes que ya resolvieron el primer ítem, invitarles a que trabajen los demás.
6	Evaluación del primer ítem de los problemas.	Verificar la solución del primer ítem de todos los estudiantes y asegurarse que las respuestas son correctas.	- Mientras los estudiantes trabajan, el docente debe desplazarse en el aula revisando el primer ítem de todos los estudiantes. - Dependiendo de la dificultad, el docente puede explicar la solución o simplemente la respuesta.
7	Resolución del resto de ítems.	Orientar para que realicen el resto de ítems. Luego verificar si las respuestas son correctas y orientar para que hagan nuevamente los problemas en los que se equivocaron.	A los estudiantes que terminan primero, se les indica que apoyen a sus compañeros.
8	Tomar nota de la tarea para la casa.	Asignar la tarea del CE, o de los ítems que no se resolvieron del LT.	Si no se logran resolver todos los problemas de la clase del LT, se pueden asignar como tarea, pero analizando la cantidad de tareas que tengan los estudiantes.

Tal como se presentó en la estrategia para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, se deben garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo, esto se logrará si se sigue el proceso presentado anteriormente, sobre todo en los pasos 2, 3, 5 y 7.

2. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a. Uso adecuado del tiempo

En el Programa de Estudio se proporcionan los indicadores de logro y los contenidos que deben ser desarrollados en el número de horas de clase establecidas en este mismo documento curricular. Según el programa, se establece que una clase debe durar 45 minutos y la carga horaria anual es de 200 clases. De acuerdo con este lineamiento, en este tiempo se debe facilitar el aprendizaje de todos los contenidos planteados. En este sentido, se requiere una eficiencia en el aprendizaje en función del tiempo establecido. Alcanzar el indicador de logro en 45 minutos no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se presentan algunas técnicas para la facilitación de los aprendizajes.

■ Ubicación de los pupitres de los estudiantes

La forma para ubicar los escritorios o pupitres puede variar dependiendo del propósito de la clase, sin embargo, en la clase de Matemática básicamente se recomienda que los ubiquen en filas, es decir, todos los estudiantes viendo hacia la pizarra debido a las siguientes razones:

a. Facilidad para desplazarse entre los pupitres para verificar el aprendizaje de los estudiantes.
b. Facilidad para el aprendizaje interactivo entre compañeros.
c. Comodidad en la postura de los estudiantes para ver la pizarra.

■ Distribución del LT antes de iniciar la clase

En las aulas se tienen establecidas normas de conducta, pero será necesario que se incluya una más, que oriente a los estudiantes a tener preparados los recursos o materiales necesarios antes del inicio de la clase; por ejemplo, en el caso del LT de tercer ciclo, que debe utilizarse y luego se resguarda en la escuela; esta forma de proceder garantiza que los materiales estén protegidos, pero implica tiempo para la distribución al inicio de la clase. Una vez establecida esta norma, se puede asignar a algunos estudiantes la distribución del LT, de tal manera que se responsabilicen de repartirlos antes de iniciar la clase.

■ Tiempo que puede destinar para el recordatorio o repaso

El tiempo de una clase es limitado y cada una tiene su indicador de logro que todos los estudiantes deben alcanzar. Si se destinan más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos no se logrará alcanzar el indicador por falta de tiempo y este desfase irá provocando otros desfases en las clases posteriores; por consiguiente, en el año escolar no se conseguirá abordar todos los contenidos establecidos en el Programa de Estudio.

Cuando se detectan dificultades en la parte del recordatorio, muchas veces no se logra retroalimentar en un tiempo corto, sino que se requiere más tiempo para asegurar el presaber. Por ejemplo, en tercer ciclo usualmente se tienen dificultades en las operaciones básicas, pero para reforzar este dominio, se requiere de más tiempo para resolver problemas. Al desarrollar la parte del recordatorio entonces, el docente no debe olvidar que su propósito es dar una pista para poder resolver el problema de la clase de ese día, y el reforzamiento no es su propósito principal.

■ Tiempo que se debe destinar para la resolución individual en el Problema inicial de la clase

Tal como se estableció en el punto **1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase**, se deben utilizar 6 minutos. Muchas veces los estudiantes simplemente están esperando otra orientación del docente sin que sepan qué hacer en la resolución individual. En este caso, es mejor orientar un aprendizaje interactivo, invitándoles a que consulten con sus compañeros.

Tiempo insuficiente para terminar el contenido de una clase

Es posible que haya clases donde no alcance el tiempo por lo que quedarán ítems sin ser resueltos. Algunos docentes los toman como contenidos de otra clase y otros los asignan como tarea. Al tomar la primera medida, muchas veces se provocan desfases en el plan de enseñanza, y en el segundo caso, a veces quedan sobrecargadas las tareas, ya que los estudiantes además tendrán el CE cuyo uso principal es para las tareas. Por tanto, el docente puede tomar la decisión de reservar estos problemas sin resolverlos y utilizarlos para el reforzamiento previo a las pruebas o para asignar a los estudiantes que terminan rápido.

Formación del hábito de estudio en los tiempos extra en la escuela

En ocasiones, el tiempo de las clases no alcanza para la consolidación de los aprendizajes. En este caso, además de la asignación de la tarea, puede utilizar una alternativa de aprovechamiento del tiempo extra en la escuela. Según los horarios de las escuelas no hay un tiempo extra, pero en la práctica, sí existe. Por ejemplo, cuando el docente atiende alguna visita o emergencia antes de iniciar la clase o la jornada, antes de que esta termine o cuando termina una clase en menos de 45 minutos, etc., por lo que será mejor aprovechar este espacio de tiempo para realizar los problemas pendientes del LT. Principalmente, se puede aprovechar el tiempo para reforzar los contenidos básicos donde hay mayor dificultad.

Revisión de todos los problemas resueltos, garantizando que las respuestas son correctas

Revisar todos los problemas que hayan resuelto los estudiantes no es una tarea fácil, ya que implica bastante tiempo, por lo que se debe buscar una alternativa que resuelva esta situación. Para esto, es necesario formar dos hábitos en los estudiantes:

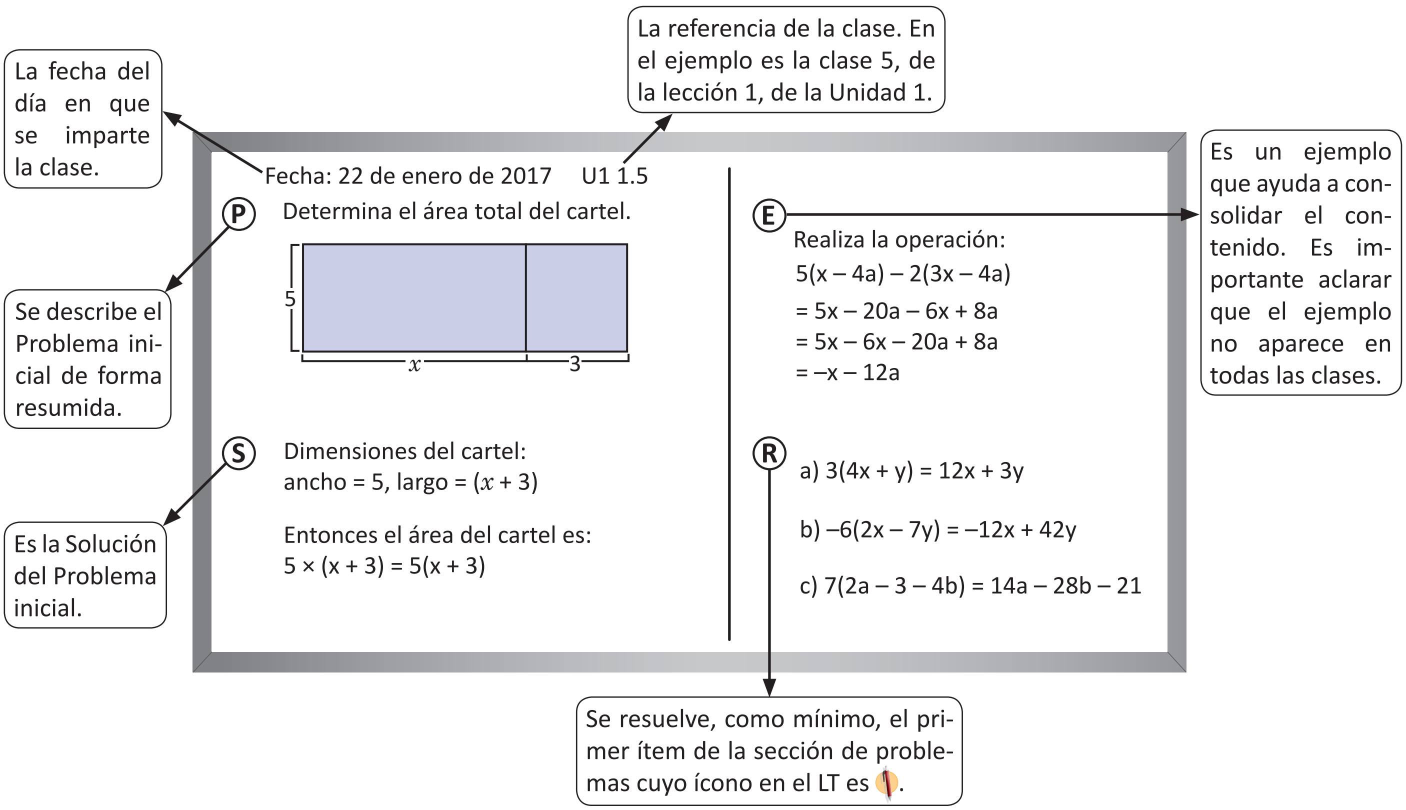
1. El hábito de autocorrección.
2. El hábito de realizar nuevamente los problemas donde se han equivocado.

Al formar el primer hábito, el docente consigue una opción para confirmar las respuestas correctas verbalmente o por escrito en la pizarra; para consolidarlo se puede invitar a los estudiantes a que intercambien los cuadernos para corregirse mutuamente. El segundo hábito permite que los estudiantes no se queden con dudas y esto ayudará a la formación de su personalidad ya que asigna valor al esfuerzo y motivación de lograr el aprendizaje.

Los siguientes puntos no se relacionan directamente con la gestión del tiempo, pero facilitarán la asistencia del docente en el proceso de aprendizaje.

b. Uso de la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo que en ella debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje de la clase. En esta guía se les propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:



En este documento se les propone el uso de la pizarra para cada clase, la pizarra debe ser completada con la información correspondiente según sean los tiempos de cada paso de la clase y considerando los tiempos de aprendizaje activo del grupo de estudiantes.

c. Planificación

En esta guía se propone la planificación de cada clase y puede basarse en alla para impartir la clase, por lo que no es necesario elaborar en otra hoja la planificación, guión o carta didáctica. Incluso, si lo considera necesario, puede escribir algunos puntos importantes con lápiz de grafito (ya que la guía pertenece a la escuela y no al docente, por lo que no debe escribir con lapicero). En caso que considere necesario realizar una adecuación de acuerdo con la particularidad de sus estudiantes, puede elaborar un plan aparte; pero en tal caso, también puede elaborar solamente un plan de pizarra de acuerdo con la estructura anterior, ya que la pizarra es el resumen de todo el proceso de aprendizaje de una clase. A continuación se propone un ejemplo del plan de uso de la pizarra.

Fecha: ________________ Unidad: ________ Lección: ________

Indicador de logro: ____

Plan de pizarra:

P

E

S

R

Tarea:

Número de estudiantes que resolvieron el primer ítem:

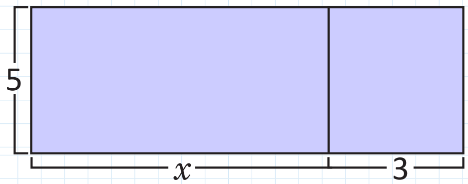
Observaciones:

d. Uso del cuaderno del estudiante

Cada docente puede establecer el uso de cuaderno de apuntes del estudiante siempre y cuando se incluya: fecha de la clase, página del LT, tema del día, solución, problemas con respuestas correctas. A continuación se presenta un ejemplo del uso del cuaderno.

Fecha: 22 de enero de 2017 U1 1.5

P Determina el área total del cartel.



S Dimensiones del cartel:
ancho = 5, largo = $(x + 3)$

Entonces el área del cartel es:
$5 \times (x + 3) = 5(x + 3)$

E Realiza la operación:

$5(x - 4a) - 2(3x - 4a)$
$= 5x - 20a - 6x + 8a$
$= 5x - 6x - 20a + 8a$
$= -x - 12a$

R
a) $3(4x + y) = 12x + 3y$
b) $-6(2x - 7y) = -12x + 42y$
c) $7(2a - 3 - 4b) = 14a - 28b - 21$

e. Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

Muchas veces se brinda asistencia individual a algunos estudiantes que han tenido dificultad, pero no alcanza el tiempo para atender a todos. La orientación debe realizarse de la siguiente manera: si el número de estudiantes que tienen dificultad es menor a cinco, brindar orientación individual, de lo contrario es mejor brindar otro tipo de orientación, tales como: explicación en plenaria, por grupo, a la hora de revisión de la respuesta correcta, entre otras.

f. Tratamiento a los estudiantes que terminan los problemas más rápido que el resto

Una sección está conformada por un grupo heterogéneo, por lo que siempre hay diferencias entre estudiantes, especialmente en el tiempo que se tardan en resolver los problemas. En la educación pública debe garantizarse igualdad de oportunidades para aprender, y en este sentido, si no se tiene orientación sobre qué hacer con los estudiantes que terminan los problemas antes que otros, ellos estarán perdiendo tiempo y se pueden convertir en un factor negativo para la disciplina del aula por no tener qué hacer. Para evitar esta situación y aprovechar el rendimiento de estos estudiantes, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces, ellos pueden orientar a sus compañeros. De esta manera, los que tienen dificultades pueden recibir orientación de sus compañeros, mientras los estudiantes que orientan también lograrán interiorizar el aprendizaje de la clase. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío, para que los estudiantes puedan seguir desarrollando sus capacidades.

g. Revisión de los cuadernos de apunte

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente puede que lo utilicen de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente su uso, en promedio, una vez al mes. La clave para esto es aumentar el número de revisiones al inicio del año escolar, de tal manera que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados y se forme en ellos un hábito. Si se revisa hasta el último detalle del cuaderno, tal vez se necesite más tiempo, por lo que se puede revisar si sigue solamente la estructura del cuaderno de apuntes que se enseñó al inicio del año, el nivel de comprensión en el primer ítem y escribir un comentario sencillo felicitando el buen uso del cuaderno.

h. Revisión de las tareas o CE

De la misma manera que en la revisión de los cuadernos de apuntes, es necesario brindar un monitoreo continuo sobre la realización de las tareas. Además de verificar la realización de la tarea en el primer proceso de las clases, se puede programar periódicamente la revisión de la tarea o CE, prestando especial atención a los estudiantes que hayan cumplido con todas, los que hayan autorevisado con las respuestas correctas y los que resolvieron de nuevo los problemas donde se habían equivocado.

i. Formación del hábito de estudio en el hogar

Según el resultado de la prueba de matemática en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), el resultado de los alumnos que estudian más de 30 minutos en el hogar es claramente mejor que los que estudian menos o nada. El tiempo ideal de estudio dependerá del grado, pero por lo general se consideran necesarios 10 minutos por grado, más 10 minutos. Por ejemplo, para el caso de 3.^{er} grado deberían ser $10 \times 3 + 10 = 40$ minutos. Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas.

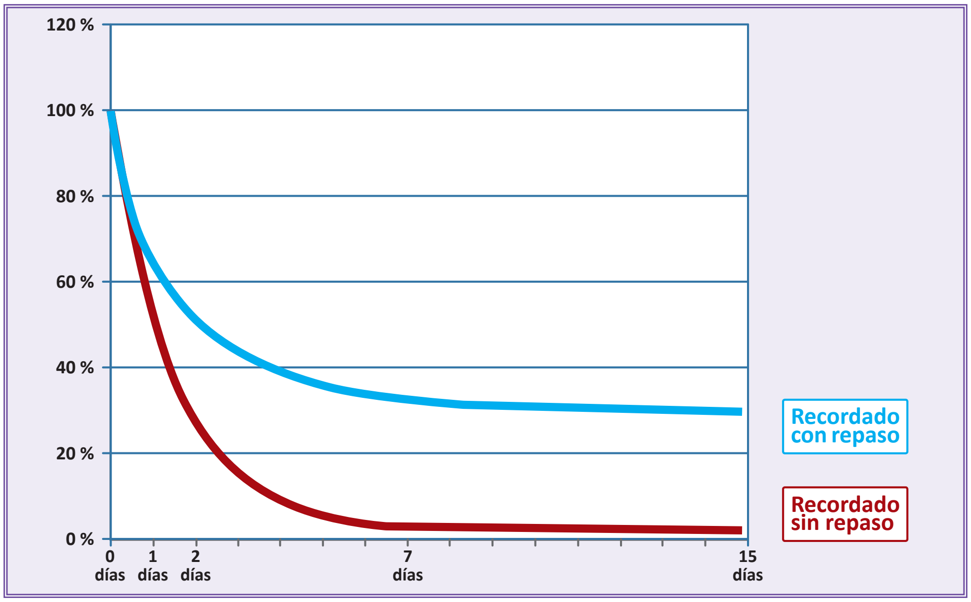
j. **Ciclo de orientación, verificación, reorientación y felicitación**

Como ciclo básico de todas las orientaciones que hace el docente, si se orienta una acción, se debe dar el monitoreo o verificación del cumplimiento de la misma. Luego, si los estudiantes cumplen, se les debe felicitar porque ya pueden hacerlo; en caso contrario, hay que orientar nuevamente sobre el asunto. Esto aplica en todas las orientaciones. Por ejemplo, si se asigna una tarea, se verifica si el estudiante la cumple, se le felicita y si no la realiza se debe reorientar. Este ciclo aplica también en la asistencia del aprendizaje, si se orienta respecto a un contenido y a través de la prueba se verifica que lo han hecho correctamente, se debe felicitar; en caso contrario, se debe reorientar. El ciclo parece sencillo, pero para cumplirlo continuamente se debe formar el hábito.

El CE que se le entrega a cada uno de los estudiantes como material fungible, tiene la finalidad de apoyar la fijación de los contenidos aprendidos ofreciendo los problemas para realizar en la casa, presentando algunos que tienen carácter de desafío para avanzar un poco más allá de lo que se aprende en la clase, integrar algunos temas transversales como la educación financiera, entre otros temas y formar el hábito de estudio en el hogar.

Muchas veces, al hablar de constructivismo, se da más énfasis al proceso de construcción de nuevos conocimientos por sí mismos, dejando de lado el proceso importante de la adquisición del buen dominio o interiorización de ese conocimiento como base para seguir construyendo otros conceptos más complejos. Para asegurar esta interiorización de un contenido se requiere mucha práctica.

Hermann Ebbinghaus, filósofo y psicólogo del siglo XIX, en la famosa **curva del olvido** muestra que como resultado de la memorización mecánica, un día después del aprendizaje, sin repasar, se mantiene en la memoria solamente el 50 % de lo memorizado, dos días después el 30 % y una semana después apenas el 3 %, tal como se muestra a continuación:



Tomando en cuenta este hecho, el Dr. Masaru Ogo experimentó en varios centros escolares de Japón una estrategia llamada "módulo de 3:3", donde los estudiantes refuerzan los problemas del mismo contenido durante tres días, obteniendo mejoras en el aprendizaje y logrando mejorar la curva del olvido, tal como se muestra en la línea celeste.

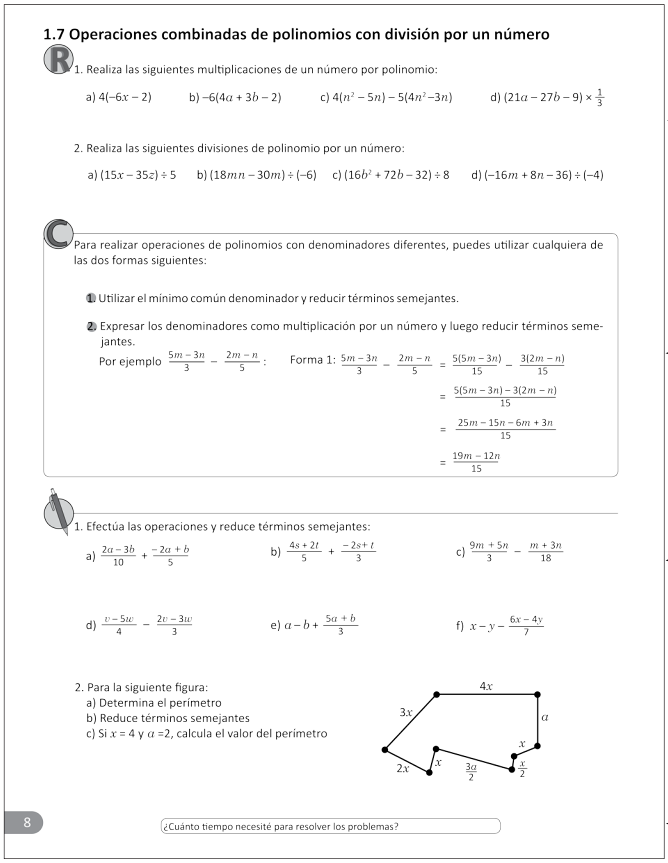
A veces, los problemas o ejercicios sencillos son catalogados como mecánicos; sin embargo, en estudios recientes, especialmente en el campo de neurología, hay una teoría de que los problemas simples activan más la parte de la corteza prefrontal del cerebro donde se encuentra la función de pensar, comunicar, controlar los sentimientos, etc., en comparación con los problemas complejos.

Para finalizar, la importancia de los problemas simples no debe faltar en los resultados de pruebas internacionales donde se evalúan clasificando los ítems, al menos en los dominios cognitivos del conocimiento y aplicación. En los resultados de estas pruebas siempre se obtiene mejor puntaje de conocimiento que de aplicación y claramente muestra correlación entre el puntaje del dominio del conocimiento y el puntaje del dominio de aplicación. De este hecho se puede interpretar que el dominio de conocimientos contribuye al dominio de aplicación, es decir, si se tiene buen dominio en conocimientos se puede mejorar el domino de aplicación.

Por medio del CE se pretende asegurar la interiorización de conocimientos básicos y luego desarrollar la aplicación.

Estructura del CE

Básicamente este documento está estructurado en correspondencia y de acuerdo con las páginas del LT. Para una clase del LT, hay una página correspondiente en el CE. Una página del CE tiene los siguientes elementos: recordatorio o retroalimentación de los contenidos de los días anteriores, conclusión del contenido del día y problemas del contenido del día. A continuación se presenta un esquema de la página:



1.7 Operaciones combinadas de polinomios con división por un número

R

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $4(-6x-2)$ b) $-6(4a+3b-2)$ c) $4(n^2-5n)-5(4n^2-3n)$ d) $(21a-27b-9)\times\frac{1}{3}$

2. Realiza las siguientes divisiones de polinomio por un número:

a) $(15x-35z)\div 5$ b) $(18mn-30m)\div(-6)$ c) $(16b^2+72b-32)\div 8$ d) $(-16m+8n-36)\div(-4)$

C

Para realizar operaciones de polinomios con denominadores diferentes, puedes utilizar cualquiera de las dos formas siguientes:

1. Utilizar el mínimo común denominador y reducir términos semejantes.
2. Expresar los denominadores como multiplicación por un número y luego reducir términos semejantes.

Por ejemplo $\frac{5m-3n}{3}-\frac{2m-n}{5}$: Forma 1: $\frac{5m-3n}{3}-\frac{2m-n}{5}=\frac{5(5m-3n)}{15}-\frac{3(2m-n)}{15}$

$=\frac{5(5m-3n)-3(2m-n)}{15}$

$=\frac{25m-15n-6m+3n}{15}$

$=\frac{19m-12n}{15}$

1. Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes:

a) $\frac{2a-3b}{10}+\frac{-2a+b}{5}$ b) $\frac{4s+2t}{5}+\frac{-2s+t}{3}$ c) $\frac{9m+5n}{3}-\frac{m+3n}{18}$

d) $\frac{v-5w}{4}-\frac{2v-3w}{3}$ e) $a-b+\frac{5a+b}{3}$ f) $x-y-\frac{6x-4y}{7}$

2. Para la siguiente figura:
   a) Determina el perímetro
   b) Reduce términos semejantes
   c) Si $x=4$ y $a=2$, calcula el valor del perímetro

8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de las clases anteriores para mejorar el aprendizaje, según la curva del olvido.

Es la misma conclusión del LT.

Problemas del mismo tipo de la clase actual que se desarrolló, pero que no sean iguales con los presentados en el LT.

El estudiante debe colocar el tiempo que utilizó para resolver los problemas.

Uso general del CE

Al final de la clase de Matemática, se debe indicar como tarea el número de la página que corresponde al contenido de la clase del día. En el inicio de la siguiente clase se corroboran las respuestas correctas.

Orientaciones específicas del uso del CE

- Orientar como tarea para el día que tenga la clase de Matemática. En caso de que se tengan dos clases en un día, lo cual no es tan favorable pedagógicamente, debe invitar a que trabajen dos páginas que correspondan a los contenidos del día o separar para realizarlas en dos días.
- En el CE se puede escribir y manchar.
- El docente debe revisar periódicamente, al menos los primeros ítems de cada grupo de problemas y hacer comentarios que orienten e incentiven a los estudiantes.
- Si se considera conveniente, solicitar a los padres de familia que escriban comentarios sobre el avance del estudio en el hogar.
- Si quedan algunas páginas sin ser resueltas, asignar como tarea para los días de las reflexiones pedagógicas, cuando los estudiantes no asisten a las clases.

1. Importancia de la aplicación de las pruebas

Los resultados que se obtienen al evaluar el aprendizaje de los estudiantes, proporcionan al docente información valiosa que le permite tener un panorama real sobre el avance obtenido. Con base en esto, el docente puede tomar decisiones con el fin de garantizar que sus estudiantes alcancen los indicadores de logro de cada clase, desarrollen las competencias transversales y cumplan a su vez con los objetivos de grado propuestos.

Cuando los resultados son positivos, el docente continúa mejorando su práctica, con el fin de que cada vez sea más efectiva.

Si los resultados no son tan favorables, será necesario que el docente autoevalúe su desempeño basado en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes y ponga todo su empeño y esfuerzo para dar lo mejor de sí. Para ello, debe participar en procesos de formación, debe investigar sobre los contenidos donde considere que tenga mayores dificultades y podría consultar con sus compañeros de trabajo.

Es importante destacar que el docente es uno de los actores más importantes en el ámbito educativo; por tal razón, debe asumir su rol como tal y autoevaluar su desempeño basado en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes.

Considerando lo anterior, debe hacer uso de las pruebas que contiene esta GM, las cuales buscan recolectar información valiosa y relacionada con la realidad de los aprendizajes, tanto adquiridos como no adquiridos.

2. Propósito de las pruebas

Resumiendo lo anterior, se podría concluir que el propósito es el siguiente:
- Obtener información en cuanto al nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes.
- Diseñar estrategias de mejora en los contenidos donde los estudiantes salieron deficientes.
- Evaluar el desempeño del docente y mejorar su práctica basado en el análisis de los resultados de la prueba.

3. Función de cada prueba

Son tres tipos de pruebas, de unidad, de trimestre y final. Todas tienen el mismo propósito planteado. Sin embargo, según su conveniencia, se pueden dar varias funciones a cada una de ellas. A continuación se plantean algunos ejemplos de cómo utilizarlas.

a. Prueba de Unidad

Los ítems que aparecen en dicha prueba corresponden a los principales indicadores de logro (curriculares) los cuales están enunciados en las clases de cada unidad. Por lo tanto, el docente puede conocer el nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes. Lo ideal es dar una retroalimentación una vez se detecten las dificultades; sin embargo, no siempre se tiene suficiente tiempo para impartir clases adicionales. En este caso, se puede invitar a los estudiantes para que ellos mismos revisen y trabajen los ítems que no pudieron resolver en el momento de la aplicación de la prueba.

Se puede entregar la copia de las respuestas de la prueba que está en este documento para que la analicen en grupos, de esta forma, ellos pueden aprender interactivamente con sus compañeros; luego, el docente puede recoger la prueba revisada por los estudiantes y ésta podría ser una información referencial sobre el avance de sus estudiantes.

Antes de la aplicación de dicha prueba, es recomendable anunciarles a los estudiantes con el fin de que ellos repasen con antelación los contenidos de la unidad a evaluar.

b. Prueba de Trimestre

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del respectivo trimestre. El momento ideal para aplicar dicha prueba será un día antes de finalizar el trimestre, ya que, en la última clase, se pueden retroalimentar los contenidos. Sin embargo, si no se puede hacer así, podría aplicarse en el último día del trimestre y dar la retroalimentación en la primera clase del próximo trimestre.

Además de esto, aprovechando las Reflexiones Pedagógicas, se puede compartir el resultado de las pruebas con docentes de otros centros educativos. Así se podrá consultar cuáles son las dificultades que han encontrado, qué tipo de esfuerzos han aplicado otros docentes, entre otros temas que contribuyan al mejoramiento de los aprendizajes. Una vez establecido un grado de confianza con otros docentes, se podría establecer comunicación vía redes sociales, para compartir información que facilite procesos y contribuya a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

c. Prueba Final

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del año lectivo. Sin duda alguna la aplicación de esta prueba generará mucha expectativa, sabiendo que el resultado será el reflejo de todo el esfuerzo profesional del docente durante todo el año escolar. El resultado le indicará qué es lo que tiene que hacer el próximo año lectivo a fin de mejorar la práctica docente. Además, para dar un uso objetivo a estas pruebas, el docente debe registrar en el expediente escolar, las áreas o contenidos que debe reforzar el docente que atenderá el próximo año a los estudiantes.

4. Uso de los resultados de la prueba

Ejemplo. Se supone que se aplica una prueba a estudiantes de octavo grado, y de ella se presentan dos situaciones:

Respuesta correcta:

	Efectúa las siguientes operaciones con polinomios $(4x + 3y) + (5x - 2y)$
Solución de los estudiantes	$9x + y$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	70 %

Respuesta incorrecta:

	Efectúa las siguientes operaciones con polinomios $(4x + 3y) + (5x - 2y)$
Solución de los estudiantes	$7xy + 3xy$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	60 %

Si se obtuvo el resultado planteado, ¿cómo se puede analizar?

Información que el docente puede obtener de este resultado:

Capacidad adquirida	Capacidad no adquirida
Concepto de la igualdad	Concepto de división
Algoritmo	Concepto de fracción

Estrategia para aprovechar los resultados para la retroalimentación:

Posible consideración a corto plazo	Posible consideración a mediano plazo
Para confirmar que el alumno comprende la solución de la ecuación, se deberá utilizar una, cuya respuesta sea un cociente, de lo contrario, no se podrá pasar a un nuevo tema porque no ha comprendido los contenidos anteriores.	Se deberá promover una actividad de "aprendizaje interactivo entre alumnos" con el fin de hacerles un recordatorio de los contenidos anteriores con el apoyo y sugerencia de sus compañeros.
Si se observa la misma situación con varios alumnos, será necesario reforzar haciéndoles un recordatorio en la pizarra sobre el mismo tipo de ítem.	Promover el autoestudio en la casa y en el centro educativo hasta que tengan dominio de este tipo de ítems.

Con lo anterior, el docente podrá dedicar su tiempo y esfuerzo a enfocarse en los contenidos que el estudiante no pudo contestar correctamente.

Para finalizar, a continuación se presenta el proceso del uso adecuado de las pruebas que el docente debe seguir:

a. Aplicar la prueba incluida en la GM en el momento oportuno.
   - Prueba de Unidad (cada vez que se finalice una unidad).
   - Prueba de Trimestre (antes de finalizar cada trimestre).
   - Prueba Final (antes de finalizar el grado).

b. Revisar la prueba aplicada.

c. Analizar la información que se obtenga con respecto a los resultados.

d. Diseñar una estrategia para la retroalimentación.

e. En el caso de la Prueba de Trimestre, se analizarán los resultados con los docentes de centros educacctivos cercanos durante la Reflexión Pedagógica para crear una estrategia de mejora.

Unidad 1. Operaciones algebraicas

Competencia de la Unidad

Realizar operaciones de polinomios utilizando las diferentes operaciones de números y las propiedades de potencia, para modelar situaciones en las cuales se use el lenguaje algebraico de los polinomios.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 4: Comunicación con símbolos
- Expresiones algebraicas
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Representación de relaciones entre expresiones matemáticas

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 1: Operaciones algebraicas
- Operaciones con polinomios
- Aplicación de las expresiones algebraicas

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 1: Multiplicación de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Operaciones con polinomios	1	1. Comunicación con símbolos
	1	2. Definición de monomio, polinomio y grado
	1	3. Reducción de términos semejantes en un polinomio
	1	4. Suma y resta de polinomios
	1	5. Multiplicación de un polinomio por un número
	1	6. División de un polinomio por un número
	1	7. Operaciones combinadas de polinomios con división por un número
	1	8. Practica lo aprendido
	1	9. Multiplicación de un monomio por un monomio
	1	10. División de un monomio por un monomio
	1	11. Multiplicación y división combinadas de monomios con monomios
	1	12. Sustitución y valor numérico de polinomios
	2	13. Practica lo aprendido
2. Aplicación de las expresiones algebraicas	1	1. Suma de números consecutivos
	1	2. Suma de un número con su invertido
	1	3. Sumas de días del calendario
	1	4. Resolución de problemas utilizando polinomios
	2	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 1

20 horas clase + prueba de la Unidad 1

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Operaciones con polinomios

A partir de las operaciones con monomios aprendidas en séptimo grado, se inicia con la introducción de las operaciones que involucran polinomios en algunos casos a partir de situaciones del entorno. Para facilitar la comprensión del desarrollo de las operaciones con polinomios se llevará la secuencia: conceptualización, reducción de términos semejantes, suma y resta y luego la multiplicación y división, primero por un número y luego por un monomio. Además, se determina el valor numérico de un polinomio, en este contenido se busca utilizar fórmulas matemáticas con el objetivo de que el estudiante se familiarice con ellas y conozca su significado.

Lección 2: Aplicación de las expresiones algebraicas

Luego de haber practicado las operaciones con polinomios, se busca modelar propiedades y características de los números mediante el uso de polinomios, así como resolver situaciones cotidianas. Entre las propiedades a modelar se tienen: suma de números consecutivos, suma de un número con su invertido, suma de números del calendario, etc.

1.1 Comunicación con símbolos

P

Efectúa las siguientes operaciones:

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

S

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$

Sustituyendo el valor de z:

$$2z - 5 = 2 \times 8 - 5$$
$$= 11$$

b) $(3x - 5) \times (-2)$

Multiplicando cada término de la expresión:

$$(3x - 5) \times (-2) = 3x \times (-2) - 5 \times (-2)$$
$$= -6x + 10$$

c) $(-8 + 4a) \div 2$

Efectuando la división:

$$(-8 + 4a) \div 2 = -8 \div 2 + 4a \div 2$$
$$= -4 + 2a$$
$$= 2a - 4$$

d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

Efectuando multiplicaciones y divisiones:

$$(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5) = -6y \div 3 + 15 \div 3 + 2x \times (-5) + 8 \times (-5)$$
$$= -2y + 5 - 10x - 40$$
$$= -10x - 2y - 35$$

1. Identifica los coeficientes y las variables en los siguientes términos:

a) $3x$ c: 3 v: x

b) $-6b$ c: -6 v: b

c) $-7mn$ c: -7 v: mn

2. Identifica los términos en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2x - 5$
T1: $2x$ y T2: -5

b) $7b - 3a - 1$
T1: $7b$, T2: $-3a$ y T3: -1

c) $2x + 7st - 4$
T1: $2x$, T2: $7st$ y T3: -4

3. Sustituye el valor de cada variable y determina el valor numérico de cada expresión algebraica.

a) $6a - 1$, si $a = 2$
$6(2) - 1 = 11$

b) $x - 4$, si $x = -5$
$-5 - 4 = -9$

c) $6y - 1$, si $y = \frac{1}{3}$
$6\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1$

d) $2a + 4$, si $a = -\frac{3}{2}$
$2\left(\frac{-3}{2}\right) + 4 = 1$

4. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(4x + 7) \times 2$
$8x + 14$

b) $(n - 5) \times 3$
$3n - 15$

c) $(3a + 2) \times (-4)$
$-12a - 8$

d) $(t - 5) \times (-3)$
$-3t + 15$

5. Realiza las siguientes divisiones:

a) $(8u + 24) \div 4$
$2u + 6$

b) $(-4n - 10) \div 2$
$-2n - 5$

c) $(9y + 3) \div (-3)$
$-3y - 1$

d) $(-15a - 5) \div (-5)$
$3a + 1$

6. Efectúa las siguientes operaciones y reduce términos semejantes:

a) $(-6y + 12) \div (-2) + (x + 5) \times 3$
$3x + 3y + 9$

b) $(-5y + 1) \times (-2) + (x - 8) \times 4$
$4x + 10y - 34$

Indicador de logro

1.1 Utiliza lo aprendido en séptimo grado para resolver operaciones con símbolos.

Secuencia

En la Unidad 4 de séptimo grado se trabajó por primera vez el contenido de comunicación con símbolos, donde se aprendió a representar situaciones mediante modelos matemáticos, determinar el valor numérico de una expresión y efectuar algunas operaciones con ellas. Con esta clase se busca que los estudiantes recuerden esos conocimientos para prepararlos a la introducción de nuevos contenidos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Recordar procesos aprendidos en séptimo grado. Determinar el valor numérico de una expresión y realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas con un número.

Ⓡ Desarrollar problemas de la misma naturaleza que los planteados en el Problema inicial; se retoman otros que implican procesos ya estudiados en séptimo grado, por ejemplo: identificar elementos de una expresión algebraica.

Posibles dificultades:
Es la primera clase del año lectivo y es posible que los estudiantes hayan olvidado lo que aprendieron o en casos extremos que no comprendieran los procesos cuando estudiaron esos contenidos; en ambas situaciones será necesario que se dé una retroalimentación de los procesos a realizar u organizar el trabajo por parejas o equipos de tres para que juntos vayan recordando lo aprendido.

Fecha: **U1 1.1**

Ⓟ Efectúa las operaciones:

a) Valor numérico de $2z - 5$, si $z = 8$
b) $(3x - 5) \times (-2)$
c) $(-8 + 4a) \div 2$
d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5)$

Ⓢ a) Sustituyendo el valor de z:
$2z - 5 = 2 \times 8 - 5 = 11$
b) $(3x - 5) \times (-2) = -6x + 10$
c) $(-8 + 4a) \div 2 = 2a - 4$
d) $(-6y + 15) \div 3 + (2x + 8) \times (-5) = -10x - 2y - 35$

Ⓡ 3. a) $6a - 1$, si $a = 2$
$6 \times 2 - 1 = 12 - 1 = 11$
c) $6y - 1$, si $y = \frac{1}{3}$
$6 \times \frac{1}{3} - 1 = 2 - 1 = 1$

4. a) $(4x + 7) \times 2 = 8x + 14$
5. a) $(8u + 24) \div 4 = 2u + 6$
6. a) $(-6y + 12) \div (-2) + (x + 5) \times 3$
$= (3y - 6) + (3x + 15)$
$= 3x + 3y + 9$

Tarea: página 2 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Definición de monomio, polinomio y grado

P

María tiene 5 veces la edad de Carlos y la edad de Carlos es igual a la suma de la edad de Ana y Antonio. Representa la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio.
Utiliza a para representar la edad de Ana y b para representar la edad de Antonio.

S

Como la edad de Carlos es la suma de la edad de Ana y la de Antonio:
Edad de Carlos = edad de Ana + edad de Antonio = $a + b$.

La edad de María es 5 veces la edad de Carlos:
Edad de María = 5 × edad de Carlos = $5 \times (a + b) = 5a + 5b$

Por lo tanto, la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio se representa por la expresión $\mathbf{5a + 5b}$.

C

La expresión algebraica formada por una o más variables con exponentes y un número llamado **coeficiente**, y que además solo hay operaciones de multiplicación se conoce como **término.**

Por ejemplo: $5x$, y, $2ay$, $\frac{3}{5}x^2$, b^2y, -7.

Coeficiente → $7x^2$ ← Exponente ← Variable

Observa que el número −7 es un monomio donde los exponentes de las variables son todos cero ($x^0 = 1$).

Las expresiones formadas por un término o por la suma de dos o más términos se conocen como **polinomios.**

Por ejemplo: $5a + 5x$, $4y - 2$, $2x^2 - 3ax + 5$.

Observa que el polinomio $2x^2 - 3ax + 5$ está formado por los términos $2x^2$, $-3ax$ y 5.

$$2x^2 - 3ax + 5 = \underbrace{\mathbf{2x^2} + (\mathbf{-3ax}) \mathbf{+ 5}}_{\text{Términos}}$$

Se define **monomio** como el polinomio formado por un solo término.

Se define **el grado de un término** como la suma de todos los exponentes de las variables.

Por ejemplo, el grado del término $-4xy^2$ es 3, porque $-4 \times \overbrace{x \times y \times y}^{\text{Grado 3}}$, la suma de los exponentes es 3.

Se define **el grado de un polinomio** como el mayor grado de los términos que conforman dicho polinomio.

Por ejemplo, el grado del polinomio $6x^3 + 5x^2 - 7x$ es 3, porque $\underbrace{6x^3}_{\text{Grado 3}} + \overbrace{5x^2}^{\text{Grado 2}} + (\underbrace{-7x}_{\text{Grado 1}})$ y el mayor grado de todos los términos es 3.

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:

a) $3a + 2x$
T1: $3a$, T2: $2x$

b) $6t + 5z - 2$
T1: $6t$, T2: $5z$, T3: -2

c) $-\frac{2}{3}a + 2x^3 - \frac{1}{2}$
T1: $-\frac{2}{3}a$, T2: $2x^3$, T3: $-\frac{1}{2}$

d) $-ab + 2tv^2$
T1: $-ab$, T2: $2tv^2$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:

a) $4x^3$
3

b) $-5xz$
2

c) $\frac{3}{5}x^2a^3$
2 + 3 = 5

d) $-\frac{2}{3}ab^2x^3$
1 + 2 + 3 = 6

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $-6xyz$
3

b) $7x + 3t$
1

c) $\frac{3}{4}x^2a^3 - xa^3$
5

d) $-uvw^2 + v^2 - \frac{t^2}{3}$
4

3

Indicador de logro

1.2 Identifica los elementos y características de los polinomios, aplicando la definición.

Secuencia

En séptimo grado se introdujeron las expresiones algebraicas, pero sin hacer ninguna clasificación, es en este momento que el estudiante además de fijar el concepto de **expresión algebraica** puede diferenciar sus elementos y hacer la clasificación según el número de términos. Es importante aclarar que en este caso el monomio será considerado como un polinomio de un solo término.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Representar situaciones mediante modelos matemáticos para resolverlas y luego introducir los conceptos básicos sobre elementos y clasificación de las expresiones algebraicas. Es importante que se caracterice cada uno de los elementos para que se comprendan los próximos contenidos.

Ⓒ Diferenciar entre el grado de un término y el grado de un polinomio.

Posibles dificultades:
Es posible que algunos estudiantes no puedan diferenciar con facilidad entre el grado de un término y el grado de un polinomio o en algunos casos particulares es posible que no se logren identificar los elementos de un término (por ejemplo: coeficiente, exponente, parte literal, etc.).

Fecha: **U1 1.2**

Ⓟ Representa la edad de María utilizando las edades de Ana y Antonio.
Utiliza a para representar la edad de Ana y b para representar la edad de Antonio.

Ⓢ Edad de María = 5 × edad de Carlos
= $5 \times (a + b)$
= $5a + 5b$

Ⓡ 1. a) $3a + 2x$
T1: $3a$, T2: $2x$

2. a) $4x^3 \longrightarrow$ grado 3
b) $-5xz \longrightarrow$ grado 1 + 1 = 2
c) $\frac{3}{5}x^2a^3 \longrightarrow$ grado 2 + 3 = 5

3. a) $-6xyz \longrightarrow$ grado 3
b) $7x + 3t \longrightarrow$ grado 1

Tarea: página 3 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Reducción de términos semejantes en un polinomio

P

Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3x + 5a - 2x + 4a$ b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

Los términos que poseen la misma variable elevada al mismo exponente se llaman: **términos semejantes.**

$$\underbrace{\overbrace{4x + 5a - 2x}^{\text{Términos semejantes}} + 4a}_{\text{Términos semejantes}}$$

Y se reducen así:

$ax + bx = (a + b)x$

S

a) $3x + 5a - 2x + 4a$

$= 3x - 2x + 5a + 4a$

$= (3 - 2)x + (5 + 4)a$

$= x + 9a$

$= 9a + x$

Ordenando términos semejantes.

Reduciendo términos semejantes.

b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

$= 2y^2 + 3y^2 + 8y - 9y$

$= (2 + 3)y^2 + (8 - 9)y$

$= 5y^2 - y$

C

Para reducir términos semejantes en un polinomio se realizan los siguientes pasos:

1. Se ordenan los términos semejantes.
2. Se reducen los términos semejantes.

Por ejemplo: $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c$.

1. $7c^2 + 2c - 4c^2 + 3c = 7c^2 - 4c^2 + 2c + 3c$
2. $ = (7 - 4)c^2 + (2 + 3)c$
$ = 3c^2 + 5c$

Si las variables de dos términos están elevadas a potencias diferentes, entonces los términos NO son semejantes.

Por ejemplo, $5x^2$ y $5x$ NO son términos semejantes.

1. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3a + 2a$
$5a$

b) $6x + 5x$
$11x$

c) $3x + 5a - 2x + 3a$
$8a + x$

d) $5y + 9b - 6b - 6y$
$3b - y$

e) $6t + 2z - t - 5z$
$5t - 3z$

f) $4x - y - 2y + x$
$5x - 3y$

g) $9t^2 + 2t - 7t^2 + 6t$
$2t^2 + 8t$

h) $3y - 3y^2 - 4y^2 + 9y$
$12y - 7y^2$

i) $a^2 + 5a - 5a^2 + a$
$-4a^2 + 6a$

j) $z^2 + 9z + 3z - z^2$
$12z$

k) $xy + \frac{2}{3}y - 3y + \frac{1}{2}xy$
$\frac{3}{2}xy - \frac{7}{3}y$

l) $a^2 - 2a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}a^2$
$\frac{4}{3}a^2 - \frac{9}{4}a$

2. Explica por qué el siguiente procedimiento para reducir términos semejantes en un polinomio es incorrecto.

$$\begin{aligned} 4x + 5a - 2x + 4a &= 4x - 2x + 5a + 4a \\ &= (4 - 2)x + (5 + 4)a \\ &= 2x + 9a \\ &= 11xa \end{aligned}$$

Porque se han reducido dos términos que no son semejantes.

Indicador de logro

1.3 Reduce términos semejantes de polinomios.

Secuencia

Los estudiantes ya se han familiarizado con el concepto de polinomio, identificando los términos y el grado tanto del polinomio como de cada uno de sus términos; se aprovecha esta clase para introducir la reducción de términos semejantes en un polinomio. Es importante que el estudiante aplique correctamente la ley de los signos, en caso de que la haya olvidado será necesario recordarla.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Reducir términos semejantes, para ello se busca ordenar los términos semejantes, con el objeto de operar únicamente los coeficientes, separándose de la parte literal.

Ⓡ Fijar el proceso de reducción de términos semejantes; y además el uso del coeficiente, cantidad de términos y tipo de variable que son presentados de una forma tal que a medida que se avanza en los literales, los coeficientes pasan de enteros a fracciones; considerando casos con igual signo, signos contrarios donde el resultado sea positivo o negativo, y en el caso de la variable que es usada de forma que evidencie si el estudiante comprendió el concepto de semejanza.

Posibles dificultades:
Puede ser que el estudiante no comprenda que aunque dos términos tengan igual parte literal, si el exponente es distinto, entonces no son semejantes.

Es posible que no utilice correctamente los signos o que reduzca dos términos que no tienen igual parte literal y escriba el resultado con la parte literal de los dos términos.

Fecha: U1 1.3

Ⓟ Reduce términos semejantes.

a) $3x + 5a - 2x + 4a$

b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2$

Ⓢ a) $3x + 5a - 2x + 4a$

$= 3x - 2x + 5a + 4a$

$= (3 - 2)x + (5 + 4)a$

$= 9a + x$

b) $2y^2 + 8y - 9y + 3y^2 = 5y^2 - y$

Ⓡ 1. a) $3a + 2a = (3 + 2)a = 5a$

b) $6x + 5x = (6 + 5)x = 11x$

c) $3x + 5a - 2x + 3a$

$= (5 + 3)a + (3 - 2)x$

$= 8a + x$

d) $5y + 9b - 6b - 6y$

$= (9 - 6)b + (5 - 6)y$

$= 3b - y$

e) $6t + 2z - t - 5z$

$= (6 - 1)t + (2 - 5)z$

$= 5t - 3z$

Tarea: página 4 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Suma y resta de polinomios

P

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$ b) $(2x + 5y) - (-3x + 9y)$

La ley de los signos es: "La multiplicación de dos números de igual signo es positiva y de dos números de diferente signo es negativa".

S

Utilizando la ley de los signos y expresando sin los paréntesis.

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$

$= 4x + 3y + 5x - 2y$

b) $(5y + 2x) - (9y - 3x)$

$= 5y + 2x - 9y + 3x$

Reduciendo términos semejantes:

a) $= 4x + 5x + 3y - 2y$

$= 9x + y$

b) $= 2x + 3x + 5y - 9y$

$= 5x - 4y$

Observa que puedes resolver utilizando la forma vertical:

a)
$$\begin{array}{rr} & 4x + 3y \\ (+) & \underline{5x - 2y} \\ & 9x + y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y \\ (-) & \underline{-3x + 9y} \\ & 5x - 4y \end{array}$$

C

Para efectuar sumas y restas de polinomios, se realizan los siguientes pasos:

1. Se utiliza la ley de los signos para expresarlos sin paréntesis.
2. Se reducen los términos semejantes.

Por ejemplo: $(3a + 5b) - (4a - 3b)$.

1. $(3a + 5b) - (4a - 3b) = 3a + 5b - 4a + 3b$
2. $= 3a - 4a + 5b + 3b$

$= -a + 8b$

Efectúa las siguientes operaciones con polinomios.

a)
$$\begin{array}{rr} & 6x + 2y \\ (+) & \underline{3x - 5y} \\ & 9x - 3y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (-) & \underline{7a - 9b} \\ & -3a + 14b \end{array}$$

Es igual a
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (+) & \underline{-7a + 9b} \end{array}$$

c) $(9x + 2y) + (7x - 5y)$
$16x - 3y$

d) $(x + 2y) + (6x - y)$
$7x + y$

e) $(5xy + 4y) - (7x - 8xy)$
$-7x + 13xy + 4y$

f) $(4ab - 3a) + (5a - 2ab)$
$2ab + 2a$

g) $(-6t + 2z) - (7z - 7t)$
$t - 5z$

h) $(6a^2 + 2a) - (a^2 - 5a)$
$5a^2 + 7a$

i) $(-2t + 2u) - (2t + 2u)$
$-4t$

j) $(-x + 7y - 2) + (4x - y + 6)$
$3x + 6y + 4$

k) $(-ab + 5a - 4) - (4a - ab + 9)$
$a - 13$

l) $(-8 + 5m - 4m^2) - (m^2 + 9 - m)$
$-5m^2 + 6m - 17$

Indicador de logro

1.4 Efectúa sumas y restas de polinomios.

Secuencia

En la clase anterior se introdujo la reducción de términos semejantes, para esta clase se iniciará con la suma y resta, con base en la reducción de términos semejantes; además se utiliza la ley de los signos para la multiplicación cuando aparezcan signos de agrupación; es importante hacer énfasis en que si el signo de agrupación aparece precedido de un signo menos (–) los términos invertirán su signo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Sumar y restar polinomios; estas dos operaciones son presentadas simultáneamente para que se identifiquen semejanzas y diferencias. También se presentan dos maneras de colocar los polinomios, horizontal y vertical.

Ⓡ Fijar el proceso de suma y resta de polinomios y además mantener los diferentes casos de la ley de signos; así como la combinación de distintas variables o la misma variable con distinto exponente con el objeto de garantizar el aprendizaje.

Posibles dificultades:
Puede que el estudiante no cambie el signo del polinomio sustraendo, en ese caso será necesario reforzar el concepto de diferencia.

También es posible que reduzcan términos que no son semejantes, en ese caso será necesario buscar la manera de reforzar el contenido de la clase anterior.

Fecha: U1 1.4

Ⓟ Efectúa las operaciones:

a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$

b) $(2x + 5y) - (-3x + 9y)$

Ⓢ a) $(4x + 3y) + (5x - 2y)$

$= 4x + 3y + 5x - 2y$

$= 9x + y$

b) $(5y + 2x) - (9y - 3x)$

$= 5y + 2x - 9y + 3x$

$= 2x + 3x + 5y - 9y$

$= 5x - 4y$

Ⓡ a)
$$\begin{array}{rr} & 6x + 2y \\ (+) & 3x - 5y \\ \hline & 9x - 3y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rr} & 4a + 5b \\ (-) & 7a - 9b \\ \hline & -3a + 14b \end{array}$$

c) $(9x + 2y) + (7x - 5y)$

$= (9 + 7)x + (2 - 5)y$

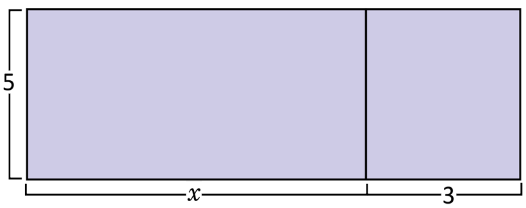
$= 16x - 3y$

Tarea: página 5 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Multiplicación de un polinomio por un número

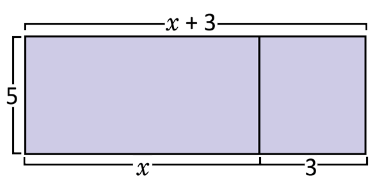
P

Para hacer un cartel fue necesario unir dos piezas como lo muestra la figura. Determina el área total del cartel.



S

El cartel tiene dimensiones 5 de ancho por $(x + 3)$ de largo.

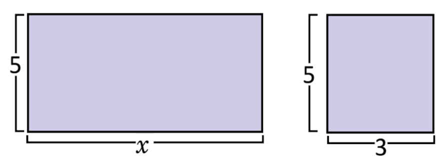


Entonces el área del cartel es $5 \times (x + 3) = 5(x + 3)$.

Y también se puede calcular el área de cada pliego y sumarlas.

Área 1: $5 \times x = 5x$

Área 2: $5 \times 3 = 15$



Entonces, el área total es: $5(x + 3) = 5x + 15$.

Por lo tanto: $5(x + 3) = 5x + 15$.

C

Para realizar la multiplicación de un polinomio por un número, se multiplica el número por cada término del polinomio. Por ejemplo: $-3(4x - 3y - 2)$

$$-3(4x - 3y - 2) = (-3) \times 4x + (-3) \times (-3y) + (-3) \times (-2)$$
$$= -12x + 9y + 6$$

E

Realiza la siguiente operación: $5(x - 4a) - 2(3x - 4a)$.

Se multiplica y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} 5(x - 4a) - 2(3x - 4a) &= 5x - 20a - 6x + 8a \\ &= 5x - 6x - 20a + 8a \\ &= -x - 12a \end{aligned}$$

Desarrolla las siguientes multiplicaciones de un número por polinomio:

a) $3(4x + y)$
$12x + 3y$

b) $-6(2x - 7y)$
$-12x + 42y$

c) $7(2a - 3 - 4b)$
$14a - 28b - 21$

d) $-5(5 - 4a - 6b)$
$20a + 30b - 25$

e) $6(4t - 3b) - 5(-t + 2b)$
$-28x + 29t$

f) $-2(8y^2 - 5y) - 3(-7y + y^2)$
$-19y^2 + 31y$

g) $-8\left(\frac{y}{4} - \frac{y^2}{2}\right)$
$-2y + 4y^2$

h) $(-2x + 4y - 12) \times \frac{1}{2}$
$-x + 2y - 6$

Indicador de logro

1.5 Realiza multiplicaciones de polinomios por un número.

Secuencia

En séptimo grado se aprendió a multiplicar expresiones algebraicas de dos términos por un número, en esta clase inicia la multiplicación de expresiones de dos o más términos por un número; pero con un recurso que facilita la comprensión: el cálculo de áreas de figuras planas. Además de aumentar el número de términos, también se busca utilizar la reducción de términos semejantes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Calcular el área de un rectángulo para introducir la multiplicación de un polinomio por un número. Es importante considerar que el resultado al cambiar el orden de los factores es el mismo, por lo que solamente se trabaja un número por un polinomio, cuyo resultado es igual a multiplicar el polinomio por un número.

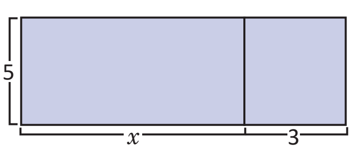
Ⓔ Efectuar una operación donde es necesario realizar dos multiplicaciones y luego reducir términos semejantes.

Posibles dificultades:
Es probable que en séptimo grado no se haya aprendido “el producto de un número por un binomio”, de ser así pedir que revisen la lección 2 de la Unidad 4 de séptimo grado y en caso extremo dar una explicación en la clase.

Tal vez los estudiantes no puedan operar con números fraccionarios, en ese caso pedirles que revisen la lección 2 de la Unidad 3 de séptimo grado.

Fecha: **U1 1.5**

Ⓟ Determina el área total del cartel.



Ⓢ Dimensiones del cartel:
ancho = 5, largo = $(x + 3)$
Entonces el área del cartel es:
$5 \times (x + 3) = 5(x + 3)$

Ⓔ Realiza la operación:

$5(x - 4a) - 2(3x - 4a)$
$= 5x - 20a - 6x + 8a$
$= 5x - 6x - 20a + 8a$
$= -x - 12a$

Ⓡ a) $3(4x + y) = 12x + 3y$

b) $-6(2x - 7y) = -12x + 42y$

c) $7(2a - 3 - 4b) = 14a - 28b - 21$

Tarea: página 6 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 División de polinomio por un número

P

Realiza la siguiente división de un polinomio por un número: $(10x - 4a) \div 2$.

S

Cambiando la división por la multiplicación con el número recíproco del divisor.

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x - 4a) \times \frac{1}{2}$$

Multiplicando el número con el polinomio (clase anterior):

$$(10x - 4a) \times \frac{1}{2} = 10x \times \frac{1}{2} - 4a \times \frac{1}{2}$$

$$= 5x - 2a$$

Distribuyendo la división en cada monomio.

$$(10x - 4a) \div 2 = (10x \div 2) + (-4a \div 2)$$

$$= (5x) + (-2a)$$

$$= 5x - 2a$$

Observa la simplificación de la solución de la izquierda.

$$\overset{5}{\cancel{10}}x \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad - \overset{2}{\cancel{4}}a \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

C

Para realizar la división de un polinomio por un número, se multiplica el recíproco del número por cada término del polinomio. Por ejemplo, $(15x - 6y - 9) \div (-3)$.

$$(15x - 6y - 9) \div (-3) = (15x - 6y - 9) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 15x \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 6y \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -5x + 2y + 3$$

E

Realiza la siguiente división de un polinomio por un número: $(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5)$.

Se multiplica por el recíproco y se reducen términos semejantes.

$$(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5) = (-30x^2 - 10x + 25) \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= -30x^2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) - 10x \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 25 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 6x^2 + 2x - 5$$

Efectúa las siguientes divisiones de un polinomio por un número.

a) $(16x - 8a) \div 2$
$8x - 4a$

b) $(-24b - 12) \div 6$
$-4b - 2$

c) $(9xy - 45y) \div (-3)$
$-3xy + 15y$

d) $(-21x^2 + 49x) \div (-7)$
$3x^2 - 7x$

e) $(45x^2 - 20x - 35) \div 5$
$9x^2 - 4x - 7$

f) $(-20y - 36x - 4) \div 4$
$-9x - 5y - 1$

g) $(16y + 24x + 48) \div (-8)$
$-3x - 2y - 6$

h) $(-63y + 27x + 54) \div (-9)$
$-3x + 7y - 6$

Indicador de logro

1.6 Realiza divisiones de polinomios por un número.

Secuencia

En séptimo grado se aprendió a dividir un monomio entre un número y a realizar operaciones combinadas de multiplicación y división; en esta clase se dividirá un polinomio entre un número; para eso se presentan dos formas de hacerlo, la primera es planteando la división como una multiplicación por el recíproco y la segunda, dividiendo cada término del polinomio por el número.

En caso de que la división no sea exacta, se utiliza la simplificación.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Realizar divisiones de polinomios por un número modelando dos maneras de hacerlo; ya sea multiplicando por el recíproco o aplicando la propiedad distributiva.

Posibles dificultades:
En caso de que se considere necesario los estudiantes que no hayan comprendido el proceso de división, entonces referirlos a la Unidad 3 de séptimo grado.

Fecha: **U1 1.6**

Ⓟ Realiza la división:
$(10x - 4a) \div 2$

Ⓢ $(10x - 4a) \div 2$
$= (10x - 4a) \times \frac{1}{2}$
$= 10x \times \frac{1}{2} - 4a \times \frac{1}{2}$
$= 5x - 2a$

Ⓔ Realiza la siguiente división:
$(-30x^2 - 10x + 25) \div (-5)$
$= (-30x^2 - 10x + 25) \times (-\frac{1}{5})$
$= 6x^2 + 2x - 5$

Ⓡ a) $(16x - 8a) \div 2 = 8x - 4a$

b) $(-24b - 12) \div 6 = -4b - 2$

c) $(9xy - 45y) \div (-3) = -3xy + 15y$

d) $(-21x^2 + 49x) \div (-7) = 3x^2 - 7x$

Tarea: página 7 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Operaciones combinadas de polinomios con división por un número

P

Efectúa las operaciones y reduce los términos semejantes: $\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6}$.

S

Expresando con un término equivalente:

$$\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6} = \frac{2(5x+2y)}{6} - \frac{2y-x}{6},$$

colocando como una sola fracción:

$$= \frac{2(5x+2y)-(2y-x)}{6},$$

expresando sin los paréntesis:

$$= \frac{10x+4y-2y+x}{6},$$

ordenando términos semejantes:

$$= \frac{10x+x+4y-2y}{6},$$

reduciendo términos semejantes:

$$= \frac{11x+2y}{6}.$$

Expresando como multiplicación de un número por un polinomio:

$$\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6} = \frac{1}{3}(5x+2y) - \frac{1}{6}(2y-x),$$

efectuando los productos:

$$= \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x,$$

ordenando términos semejantes:

$$= \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y,$$

reduciendo términos semejantes:

$$= \frac{11}{6}x + \frac{1}{3}y.$$

Observa que las respuestas de ambos procedimientos son iguales:

$$\frac{11x+2y}{6} = \frac{11}{6}x + \frac{1}{3}y$$

C

Para realizar operaciones de polinomios con denominadores diferentes, se puede utilizar cualquiera de las dos formas:

1. Utilizar el mínimo común denominador y reducir términos semejantes.
2. Expresar los denominadores como multiplicación por un número y luego reducir términos semejantes.

E

Realiza las operaciones y reduce términos semejantes: $\frac{2x-y}{3} - \frac{x-5y}{6}$

$$\frac{2x-y}{3} - \frac{x-5y}{6} = \frac{2(2x-y)}{6} - \frac{(x-5y)}{6}$$

$$= \frac{2(2x-y)-(x-5y)}{6}$$

$$= \frac{4x-2y-x+5y}{6}$$

$$= \frac{3x+3y}{6} = \frac{3(x+y)}{6} = \frac{x+y}{2}$$

Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes:

a) $\frac{4x+y}{9} + \frac{3y-2x}{3} = \frac{-2x+10y}{9}$

b) $\frac{6z+5t}{3} + \frac{3t-z}{2} = \frac{9z+19t}{6}$

c) $\frac{4x+7y}{2} - \frac{2y-3x}{4} = \frac{11x+12y}{4}$

d) $\frac{3a-4y}{5} - \frac{a-y}{2} = \frac{a-3y}{10}$

e) $x+y+\frac{y+5x}{3} = \frac{8x+4y}{3}$

f) $x-y-\frac{4y-3x}{7} = \frac{10x-11y}{7}$

Indicador de logro

1.7 Efectúa operaciones combinadas de polinomios que incluyen división por un número.

Secuencia

En las clases anteriores de esta unidad, los estudiantes han aprendido la suma y resta de polinomios, así como la división de polinomio por un número. Por lo que en esta clase se presenta la combinación de suma y resta con división por un número; es importante hacer énfasis en el orden lógico que se aplica cuando se tienen operaciones combinadas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Introducir las operaciones con división por un número, para ello se presentan dos maneras de hacerlo, la primera llevando a un denominador común y la segunda multiplicando por el recíproco del denominador. Es importante que se evidencie que en ambos casos se obtiene igual resultado.

Solución de algunos ítems:

d) $\frac{3a-4y}{5} - \frac{a-y}{2}$

$= \frac{6a-8y}{10} - \frac{5a-5y}{10}$

$= \frac{6a-8y-5a+5y}{10}$

$= \frac{a-3y}{10}$

e) $x + y + \frac{y+5x}{3}$

$= \frac{3x+3y+y+5x}{3}$

$= \frac{8x+4y}{3}$

Fecha: **U1 1.7**

Ⓟ Efectúa las operaciones:

$\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6}$

Ⓢ $\frac{5x+2y}{3} - \frac{2y-x}{6}$

$= \frac{2(5x+2y)}{6} - \frac{2y-x}{6}$

$= \frac{2(5x+2y)-(2y-x)}{6}$

$= \frac{10x+4y-2y+x}{6}$

$= \frac{11x+2y}{6}$

Ⓔ $\frac{2x-y}{3} - \frac{x-5y}{6}$

$= \frac{2(2x-y)}{6} - \frac{(x-5y)}{6}$

$= \frac{3x+3y}{6}$

Ⓡ a) $\frac{4x+y}{9} + \frac{3y-2x}{3} = \frac{-2x+10y}{9}$

b) $\frac{6z+5t}{3} + \frac{3t-z}{2} = \frac{9z+19t}{6}$

c) $\frac{4x+7y}{2} - \frac{2y-3x}{4} = \frac{11x+12y}{4}$

Tarea: página 8 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Practica lo aprendido

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios:

a) $9st + 5x$
$9st,\ 5x$

b) $3t^2 + 7zs - 21$
$3t^2,\ 7zs,\ -21$

2. Determina el grado de los siguientes monomios:

a) $8xyz$
3

b) $-5x^3z$
4

3. Determina el grado de los siguientes polinomios:

a) $7xa + 3t^3$
3

b) $6 - 6xyz$
3

4. Reduce los términos semejantes en los siguientes polinomios:

a) $3a + 2a$
$5a$

b) $6x + 5x$
$11x$

c) $5a + 7x + 3a - 2x$
$8a + 5x$

5. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a)
$$\begin{array}{rr} & 3x + 7y \\ (+) & \underline{4x - 9y} \\ & 7x - 2y \end{array}$$

b) $(4ab + 4a^2) - (6a^2 - 8ab)$
$12ab - 2a^2$

c) $(-5n^2 + 9n + 3) - (-2n^2 - 4n + 1)$
$-3n^2 + 13n + 2$

6. Realiza las siguientes multiplicaciones de un número por un polinomio:

a) $-5(-2s + 6t)$
$10s - 30t$

b) $3(4x - 3y) - 2(5x - 2y)$
$2x - 5y$

c) $(6x - 15y - 36) \times \frac{1}{3}$
$2x - 5y - 12$

7. Desarrolla las siguientes divisiones de polinomio con un número:

a) $(-9s + 24t) \div 3$
$-3s + 8t$

b) $(-54x^2 + 18x) \div -9$
$6x^2 - 2x$

c) $(36x^2 - 12x + 28) \div 4$
$9x^2 - 3x + 7$

8. Efectúa las operaciones y reduce los términos semejantes:

a) $\frac{10x + 4y}{32} + \frac{-3x + y}{8}$
$\frac{-x + 4y}{16}$

b) $\frac{2a + 5b}{10} - \frac{3a - 6b}{40}$
$\frac{5a + 26b}{40}$

c) $s - t - \frac{2s - 5t}{6}$
$\frac{4s - t}{6}$

Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas utilizando operaciones algebraicas.

Solución de algunos ítems:

6. b) $3(4x - 3y) - 2(5x - 2y)$
$= 12x - 9y - 10x + 4y$
$= 2x - 5y$

c) $(6x - 15y - 36) \times \frac{1}{3}$
$= \frac{6}{3}x - \frac{15}{3}y - \frac{36}{3}$
$= 2x - 5y - 12$

7. a) $(-9s + 24t) \div 3$
$= \frac{9}{3}s + \frac{24}{3}t$
$= -3s + 8t$

c) $(36x^2 - 12x + 28) \div 4$
$= \frac{36}{4}x^2 - \frac{12}{4}x + \frac{12}{4}$
$= 9x^2 - 3x + 7$

8. a) $\frac{10x + 4y}{32} + \frac{-3x + y}{8}$

$= \frac{(10x + 4y)}{32} + \frac{4(-3x + y)}{32}$

$= \frac{(10x + 4y) + (-12x + 4y)}{32}$

$= \frac{10x + 4y - 12x + 4y}{32}$

$= \frac{-2x + 8y}{32} = \frac{2(-x + 4y)}{32}$

$= \frac{-x + 4y}{16}$

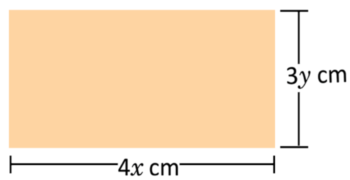
Tarea: página 9 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.9 Multiplicación de un monomio por un monomio

P

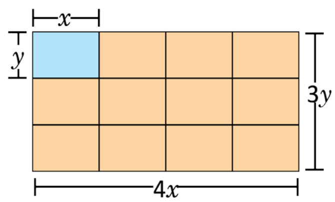
Determina el área de un rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho.



S

El área del rectángulo será el resultado de la multiplicación $4x \times 3y$.

Dividiendo el rectángulo en rectángulos más pequeños de y cm de ancho y x cm de largo.



El área de cada rectángulo pequeño es $x \times y = xy$ (base × altura).

Hay 4 rectángulos de área xy a lo largo y 3 a lo ancho.

Por lo tanto, el área del rectángulo que tiene $4x$ cm de largo y $3y$ cm de ancho es la suma del área de los $4 \times 3 = 12$ rectángulos de área xy, así:

$A = 4x \times 3y = 4 \times 3 \times x \times y = 12xy$.

> Observa que la multiplicación de los monomios $4x \times 3y$ se realiza así:
>
> $$\begin{aligned} \mathbf{4x} \times \mathbf{3y} &= 4 \times x \times 3 \times y \\ &= 4 \times 3 \times x \times y \\ &= \mathbf{12xy} \end{aligned}$$

C

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes de los monomios y luego se multiplican las variables. Por ejemplo: $7x \times (-5y)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{7x} \times (\mathbf{-5y}) &= 7 \times (-5) \times x \times y \\ &= \mathbf{-35xy} \end{aligned}$$

> Al multiplicar dos potencias de la misma base se puede expresar como una sola potencia:
>
> $b \times b^2 = b \times (b \times b) = b^3$.

E

Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $2b \times 5b^2$

Se multiplican los coeficientes y las variables.

$$\begin{aligned} 2b \times 5b^2 &= 2 \times 5 \times b \times b^2 \\ &= 10b^3 \end{aligned}$$

b) $(-4n)^3$

Se multiplican los coeficientes y las variables.

$$\begin{aligned} (-4n)^3 &= (-4n) \times (-4n) \times (-4n) \\ &= (-4) \times (-4) \times (-4) \times n \times n \times n \\ &= -64n^3 \end{aligned}$$

R

Efectúa las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $5x \times 6y$
$30xy$

b) $8b \times (-3a)$
$-24ab$

c) $-7m \times (-3n)$
$21mn$

d) $9x \times 4x^3$
$36x^4$

e) $-9a^2 \times a^3$
$-9a^5$

f) $(-2n)^3$
$-8n^3$

g) $-6ab \times (-8a^2b)$
$48a^3b^2$

h) $-9ab \times 3(-a)^2$
$-27a^3b$

Indicador de logro

1.9 Realiza multiplicaciones de monomios con monomios.

Secuencia

En séptimo grado se aprendió a multiplicar un monomio por un número y en la clase 1.5 de esta unidad se introdujo la multiplicación de un polinomio por un número, para esta clase se trabajará la multiplicación de un monomio por un monomio; esto mediante el cálculo del área de un rectángulo utilizando rectángulos más pequeños de dimensiones xy.

Es importante enfatizar en la aplicación de las propiedades de los exponentes cuando se multiplica la parte literal.

Propósito

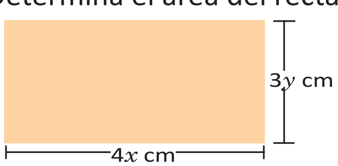
Ⓟ, Ⓢ Multiplicar un monomio por un monomio utilizando un modelo geométrico, la ley de los signos para la multiplicación y las respectivas propiedades de los exponentes.

Ⓔ Realizar la multiplicación de monomios evidenciando dos propiedades de los exponentes, producto de potencias de igual base en el literal a) y la potencia de un producto en el literal b).

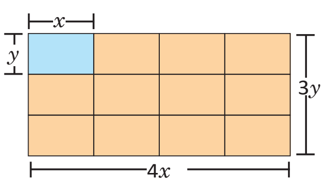
Fecha:

U1 1.9

Ⓟ Determina el área del rectángulo



Ⓢ



Hay 4 rectángulos de área xy a lo largo y 3 a lo ancho, haciendo un total de 12.

$A = 12xy$

Ⓔ Realiza la siguiente multiplicación

a) $2b \times 5b^2 = 2 \times 5 \times b \times b^2$
$= 10b^3$

b) $(-4n)^3 = (-4n) \times (-4n) \times (-4n)$
$= -64n^3$

Ⓡ a) $5x \times 6y = 5 \times 6 \times x \times y$
$= 30xy$

b) $8b \times (-3a) = 8 \times (-3) \times b \times a$
$= -24ab$

Tarea: página 10 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 División de un monomio por un monomio

P

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

b) $12ab \div (-4b)$

S

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

Expresando como división de fracciones, utilizando el recíproco del número y simplificando.

$$\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz = \frac{y^2z}{3} \div \frac{5yz}{9}$$
$$= \frac{y^2z}{3} \times \frac{9}{5yz}$$
$$= \frac{y \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{1}{\cancel{z}} \times \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \times 5 \times \underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{z}}}$$
$$= \frac{3}{5}y$$

b) $12ab \div (-4b)$

Expresando la división como una fracción y simplificando.

$$12ab \div (-4b) = \frac{12ab}{-4b}$$
$$= -\frac{12ab}{4b}$$
$$= -\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}$$
$$= -3a$$

Además, para el literal b) se observa que se puede aplicar la multiplicación por el recíproco de la siguiente manera:

$$12ab \div (-4b) = 12ab \times \frac{1}{-4b}$$
$$= -\frac{12ab}{4b}$$
$$= -\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times a \times \overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{b}}}$$
$$= -3a$$

Al dividir dos potencias puedes simplificar:

$$y^2z \div yz = \frac{y^2z}{yz} = \frac{y \times \overset{1}{\cancel{y}} \times \overset{1}{\cancel{z}}}{\underset{1}{\cancel{y}} \times \underset{1}{\cancel{z}}} = y$$

C

Para dividir dos monomios se expresa como división de fracciones, se utiliza la multiplicación por el recíproco y se simplifica a la mínima expresión.

Realiza las siguientes divisiones de monomios:

a) $18xy \div 6x$ — $3y$

b) $24x^3 \div (-6x)$ — $-4x^2$

c) $15mn \div (-12n)$ — $\frac{-5m}{4}$

d) $-8a^2b \div 6ab^2$ — $\frac{-4a}{3b}$

e) $6ab \div \frac{1}{4}bc$ — $\frac{24a}{c}$

f) $10y^2z^2 \div \frac{5}{2}yz$ — $4yz$

g) $-\frac{3}{5}t^3u \div \frac{3}{10}t^2u$ — $-2t$

h) $-\frac{5}{8}y^4 \div \frac{1}{2}y^2$ — $\frac{-5y^2}{4}$

Indicador de logro

1.10 Efectúa divisiones de monomios con monomios.

Secuencia

En séptimo grado se aprendió a dividir un monomio entre un número y en la clase 1.6 de esta unidad se dividió un polinomio entre un número. Para esta clase se introducirá la división de un monomio entre un monomio, para ello es importante el uso de la ley de los signos y las propiedades de los exponentes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Dividir un monomio por otro monomio de una manera análoga al producto de un monomio por un número.

Solución de algunos ítems:

3\. f) $= 10y^2z^2 \div \frac{5}{2}yz$

$= \dfrac{10\,y^2z^2}{\frac{5}{2}\,yz}$

$= \dfrac{20\,y^2z^2}{5yz}$

$= 4yz$

3\. g) $= -\frac{3}{5}t^3u \div \frac{3}{10}t^2u$

$= -\dfrac{\frac{3}{5}\,t^3u}{\frac{3}{10}t^2u}$

$= -\dfrac{30\,t^3u}{15\,t^2u}$

$= -2t$

Fecha: **U1 1.10**

Ⓟ Realiza las divisiones:

a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz$

b) $12ab \div (-4b)$

Ⓢ a) $\frac{1}{3}y^2z \div \frac{5}{9}yz = \frac{y^2z}{3} \times \frac{9}{5yz} = \frac{3}{5}y$

b) $12ab \div (-4b) = -\frac{12ab}{4b} = -3a$

Ⓡ a) $18xy \div 6x = \frac{18xy}{6x} = 3y$

b) $24x^3 \div (-6x) = \frac{24x^3}{-6x} = -4x^2$

c) $15mn \div (-12n) = \frac{15mn}{-12n} = \frac{-5}{4}m$

d) $-8a^2b \div 6ab^2 = \frac{-8a^2b}{6ab^2} = -\frac{4a}{3b}$

e) $6ab \div \frac{1}{4}bc = \frac{6ab}{\frac{1}{4}bc} = \frac{24a}{c}$

Tarea: página 11 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Multiplicación y división combinadas de monomios con monomios

P

Realiza las siguientes operaciones, luego simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x)$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b)$

S

Expresando las operaciones como una fracción.

a) $$7x^2 \times 6y \div (-3y^2x) = -\frac{7\overset{x}{\cancel{x^2}} \times \overset{2}{\cancel{6}}\overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\underset{y}{\cancel{y^2}}\underset{1}{\cancel{x}}}$$

$$= -\frac{7x \times 2}{y}$$

$$= -\frac{14x}{y}$$

b) $$-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b) = \frac{(\overset{1}{\cancel{2}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{1}{\cancel{b}}) \times (\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{b}})}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{6}}\underset{1}{\cancel{a}}\underset{\underset{1}{\cancel{b}}}{\cancel{b^2}}}$$

$$= \frac{a \times 1}{1}$$

$$= a$$

C

Para operar multiplicaciones y divisiones combinadas de monomios, primero se determina el signo (utilizando la ley de los signos), y luego se expresa como una sola fracción hasta simplificar a la mínima expresión.

E

Realiza la siguiente operación, simplifica el resultado a su mínima expresión: $(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right)$.

$$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(-\frac{2a}{3}\right) = -8a^3 \times 4a^2 \times \left(\frac{3}{2a}\right)$$

$$= -\frac{\overset{4a^2}{\cancel{8}\cancel{a^3}} \times 4a^2 \times 3}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{a}}}$$

$$= -\frac{4a^2 \times 4a^2 \times 3}{1}$$

$$= -48a^4$$

Efectúa las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $2x^2 \times 6x \div 3x^4$

$\frac{4}{x}$

b) $10yz \div 4z^2 \times (-6z)$

$-15y$

c) $a^2b \div (-ab) \times (-b^2)$

$+ab^2$

d) $-s^2t \times (-st^2) \div (-s^2t^2)$

$-st$

e) $(-2a)^2 \div 6ab^2 \times 9b$

$\frac{6a}{b}$

f) $-xy \div (-2xy)^3 \times (-4x)$

$\frac{-1}{2xy^2}$

g) $3y^3 \times 6y \div (-3y)^2$

$2y^2$

h) $24a^2b^2 \div 8ab \times 3b$

$9ab^2$

i) $(-2st)^3 \times (-2s) \div (-3s^2)$

$\frac{16s^2t^3}{3}$

j) $\frac{3}{5}ab^2 \times 5a \div \frac{1}{3}ab$

$9ab$

k) $(-\frac{1}{2}xz)^2 \div 6xz^3 \times (-4)$

$\frac{-x}{6z}$

l) $-\frac{2}{5}t^2 \div (-t^3) \times (-\frac{5}{2}t^2)$

$-t$

Indicador de logro

1.11 Realiza operaciones combinadas de polinomios que incluyen división por un número o por un monomio.

Secuencia

En la clase 1.9 y 1.10, se trabajó con la multiplicación y división de monomios respectivamente; en esta clase se trabajará con las dos operaciones combinadas, cuidando siempre el uso correcto de la ley de los signos y las propiedades de los exponentes para ambas operaciones.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Realizar multiplicaciones y divisiones de monomios, considerando dos casos: cuando se tiene un número impar de monomios con signo negativo y cuando se tiene un número par.

Ⓔ Ilustrar un caso donde al menos un monomio tiene coeficiente fraccionario. Se tiene un número impar de monomios con signo negativo y todos tienen la misma variable en la parte literal.

Solución de algunos ítems:

b) $= 10yz \div 4z^2 \times (6z)$

$= 10yz \times \frac{1}{4z^2}(-6z)$

$= \frac{-60\ yz^2}{4\ z^2}$

$= -15y$

c) $= a^2b \div (-ab) \times (-b^2)$

$= a^2b \times \left(-\frac{1}{ab}\right) \times (-b^2)$

$= \frac{a^2b^3}{ab}$

$= ab^2$

Fecha: **U1 1.11**

Ⓟ Realiza las siguientes operaciones:

a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x)$

b) $-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b)$

Ⓢ a) $7x^2 \times 6y \div (-3y^2x) = -\frac{7x^2 \times 6y}{3y^2x}$

$= -\frac{7x \times 2}{y}$

$= -\frac{14x}{y}$

b)

$-2a^2b \div 6ab^2 \times (-3b) = \frac{(\cancel{2}\cancel{a^2}\cancel{b}) \times (\cancel{3}\cancel{b})}{\cancel{6}\cancel{a}\cancel{b^2}}$

$= \frac{a \times 1}{1}$

Ⓔ Realiza la siguiente operación:

$(-2a)^3 \times (-4a^2) \div \left(\frac{2a}{3}\right)$

$= -8a^3 \times 4a^2 \times \left(\frac{3}{2a}\right)$

$= -\frac{8a^3 \times 4a^2 \times 3}{2a}$

$= -48a^4$

Ⓡ a) $2x^2 \times 6x \div 3x^4 = 2x^2 \times 6x \times \left(\frac{1}{3x^4}\right)$

$= \frac{2x^2 \times 6x}{3x^4}$

$= \frac{4}{x}$

Tarea: página 12 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.12 Sustitución y valor numérico de polinomios

P

Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio, utilizando los valores dados para las variables.

$(4x - 5y) - (x - y)$ si $x = 6$, $y = -4$

S

Sustituyendo el valor de las variables en cada polinomio:

$(4x - 5y) - (x - y) = 4x - 5y - x + y$

$= 3x - 4y$

$= 3 \times 6 - 4 \times (-4)$; sustituyendo el valor de las variables.

$= 18 + 16$

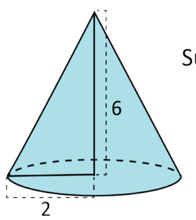
$= 34$

C

Para encontrar el valor numérico de un polinomio sustituyendo el valor de las variables, primero se reducen los términos semejantes.

E

El volumen de un cono está dado por el polinomio $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde π es una constante (número), r es el radio de la base del cono y h es la altura. Determina el volumen de un cono de 2 cm de radio y 6 cm de altura.



Sustituyendo los valores de las variables r y h en el polinomio del volumen del cono.

$r = 2$
$h = 6$

Entonces, para este caso, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 6 = 8\pi$.

Por lo tanto, el volumen del cono de radio 2 cm y altura 6 cm es $8\pi \text{cm}^3$.

1. Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio utilizando los valores de las variables indicadas.

a) $(3x - 2y) + (x - y)$ si $x = 5$, $y = -2$
$4x - 3y$; VN: 26

b) $(x + 3y) - (x - y)$ si $x = 1$, $y = -4$
$4y$; VN: −16

c) $(x - y) - 2(x - y)$ si $x = 8$, $y = -2$
$-x + y$; VN: −10

d) $3(x - 2y) - (2x - 5y)$ si $x = -4$, $y = 5$
$x - y$; VN: −9

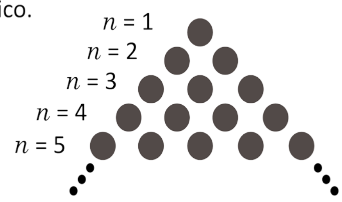
e) $(6x - y) - 2(3x - 5y)$ si $x = -2$, $y = 3$
$9y$; VN: 27

f) $(4x - y) - (5x - 3y)$ si $x = -6$, $y = 4$
$-x + 2y$; VN: 14

2. Analiza y determina cuál de los siguientes polinomios representa la suma de las primeras filas, en la siguiente figura, n representa el número de fila. Auxíliate del gráfico.

a) $2n - 1$

b) $\frac{1}{2}n(n + 1)$



Indicador de logro

1.12 Utiliza la sustitución de variables para determinar el valor numérico de un polinomio.

Secuencia

En séptimo grado de la clase 14 a la 17 de la lección 1, Unidad 4, se determinó el valor numérico de expresiones algebraicas. Ahora se determinará el valor numérico de un polinomio y/o fórmulas matemáticas, para ello se realizará primero la sustitución de los valores dados para la variable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar el valor numérico de una expresión algebraica de manera análoga al proceso aprendido en séptimo grado.

Ⓔ Determinar el valor numérico de una fórmula matemática conocida para modelar la aplicación del contenido para resolver situaciones.

Solución de algunos ítems:

1. b) $= (x + 3y) - (x - y)$
$= x + 3y - x + y$
$= 4y$

Valor numérico:
$4(-4) = -16$

c) $(x - y) - 2(x - y)$
$= x - y - 2x + 2y$
$= -x + y$

Valor numérico:
$-x + y = -8 - 2$
$= -10$

Posibles dificultades:
Puede que no se sustituya correctamente el valor de cada variable, en ese caso sugerir que se revisen los valores respectivos.

Además de la aplicación de la ley de los signos y propiedades de los exponentes, sugerir que revisen nuevamente y si es posible anotarlos en una tabla para tenerlos listos.

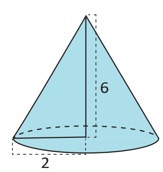
Fecha: **U1 1.12**

P Efectúa las operaciones y determina el valor numérico:
$(4x - 5y) - (x - y)$ si $x = 6$, $y = -4$

S $(4x - 5y) - (x - y) = 4x - 5y - x + y$
$= 3x - 4y$

Sustituyendo los valores conocidos.
$3x - 4y = 3 \times 6 - 4 \times (-4)$
$= 18 + 16$
$= 34$

E Determina el volumen del cono.



$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 6 = 8\pi$

R 1. a) $(3x - 2y) + (x - y)$, si $x = 5$, $y = -2$
$(3x - 2y) + (x - y) = 3x - 2y + x - y$
$= 4x - 3y$

Valor numérico:
$4x - 3y = 4 \times 5 - 3 \times (-2)$
$= 20 + 6$
$= 26$

Tarea: página 13 del Cuaderno de Ejercicios.

1.13 Practica lo aprendido

1. Identifica los términos que conforman los siguientes polinomios, el grado de cada término y el grado del polinomio.

a) $5xyz + 2t^2$
$5xyz,\ 2t^2$

b) $5x^4 + 7z^3 - 21xz$
$5x^4,\ 7z^3,\ -21xz$

c) $6ab - 6st^2$
$6ab,\ -6st^2$

d) $3xyz$
$3xyz$

2. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(10a - 7b + 9) - (-3a - b + 5)$
$13a - 6b + 4$

b) $(5xy - 5y^2) + (-8xy + 8y^2)$
$-3xy + 3y^2$

c) $(8t^2 + 2 - 4t) - (-t^2 - 2t + 7)$
$9t^2 - 2t - 5$

3. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de un número por un polinomio:

a) $-7(10m - 8n)$
$-70m + 56n$

b) $10(2a - 5b) - 7(-2a + 3b)$
$34a - 71b$

c) $(35x - 5z) \div 5$
$7x - z$

d) $(-64x^2 + 16x) \div (-8)$
$8x^2 - 2x$

4. Efectúa las operaciones y reduce términos semejantes.

a) $\frac{6m - 3n}{27} + \frac{m - 2n}{3}$
$\frac{15m - 21n}{27}$

b) $\frac{2a + 5b}{3} - \frac{-3a + 6b}{5}$
$\frac{19a + 7b}{15}$

c) $y - z - \frac{-9y - 3z}{7}$
$\frac{16y - 4z}{7}$

d) $t - 2u - \frac{5t - u}{2}$
$\frac{-3t - 3u}{2}$

1.14 Practica lo aprendido

1. Realiza las siguientes multiplicaciones de monomios:

a) $9t \times 6s$
$54st$

b) $(-4n^2) \times 6n^3$
$-24n^5$

c) $7a \times 8ab$
$56a^2b$

d) $(-7a)^2$
$49a^2$

2. Desarrolla las siguientes divisiones de monomios:

a) $36mx \div 9x$
$4m$

b) $(-18st^2) \div 10s^2t$
$\frac{-9t}{5s}$

c) $12ay^3 \div \frac{3}{5}a^2y$
$\frac{20y^2}{a}$

d) $-\frac{2}{9}w^3 \div \frac{2}{3}w$
$\frac{w^2}{3}$

3. Realiza las siguientes operaciones, simplifica el resultado a su mínima expresión.

a) $4y \times 15y^3 \div 10y^2$
$6y^2$

b) $(-5n)^2 \div 15mn^2 \times 12m$
4

c) $(-4ab)^3 \times (-2b) \div (-6b^4)$
$\frac{64a^3}{3}$

d) $(-\frac{2}{3}w^4) \div (-w^3) \times (-\frac{9}{10}w)$
$\frac{-3w^2}{5}$

4. Efectúa las operaciones indicadas y luego determina el valor numérico de cada polinomio, utilizando los valores de las variables indicadas.

a) $(2x - 5y) + (-4x + y)$ si $x = 3$, $y = -3$
$-2x - 4y$; VN: 6

b) $2(-x + y) - (3x - y)$ si $x = -1$, $y = 4$
$-5x + 3y$; VN: 17

c) $(-4x - 3y) + 5(x + y)$ si $x = 7$, $y = -5$
$x + 2y$; VN: -3

d) $-5(x - 2y) - (-4x - 6y)$ si $x = -4$, $y = 5$
$-x + 16y$; VN: 84

Indicador de logro

1.13 y 1.14 Resuelve problemas utilizando operaciones algebraicas.

Solución de algunos ítems:

Clase 1.13

1. a) $5xyz - 2t^2$
   Términos: $5xyz, -2t^2$
   Grado del término $5xyz$: 3
   Grado del término $2t^2$: 2
   Grado del polinomio: 3

2. a) $(10a - 7b + 9) - (-3a - b + 5)$
   $= 10a - 7b + 9 + 3a + b - 5$
   $= 13a - 6b + 4$

Clase 1.14

2. a) $36mx \div 9x$

   $= \frac{36mx}{9x} = 4m$

3. a) $4y \times 15y^3 \div 10y^2$

   $= 4y \times 15y^3 \div \frac{1}{10y^2}$

   $= \frac{60y^4}{10y^2}$

   $= 6y^2$

4. a) $(2x - 5y) + (-4x + y)$
   $= -2x - 4y$

   Valor numérico:
   $-2x - 4y = -2(3) - 4(-3)$
   $= -6 + 12$
   $= 6$

Tarea: página 14 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Suma de números consecutivos

P

Efectúa las siguientes sumas, determina un procedimiento para sumar 5 números consecutivos.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \_\_\_\_\_\_$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \_\_\_\_\_\_$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \_\_\_\_\_\_$$

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \underline{15} \quad (5 \times 3)$$
$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = \underline{75} \quad (5 \times 15)$$
$$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = \underline{150} \quad (5 \times 30)$$

La suma de 5 números consecutivos parece ser 5 veces el número del centro.

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares.

Tomando n como el primer término de una suma de 5 términos.

$$13,\quad 14,\quad 15,\quad 16,\quad 17$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{13},\ \mathbf{13}+1,\ \mathbf{13}+2,\ \mathbf{13}+3,\ \mathbf{13}+4$$
$$\downarrow$$
$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$$

Entonces, la suma de 5 términos consecutivos en general será:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5 \times (n + 2).$$

Por lo tanto, la conjetura es verdadera y la suma de 5 números consecutivos es 5 veces el número del centro (ordenados de menor a mayor).

En matemática, para solucionar un problema pueden abordarse diversas estrategias, una de ellas es la utilizada en esta clase, en la cual se determina el resultado para casos particulares y se busca un "patrón" para formular una "conjetura"; es decir, una observación que al parecer se cumple en todos los casos pero carece de sustento lógico, es únicamente intuitivo. Posteriormente se demuestra la conjetura utilizando un método inductivo.

C

Para conjeturar sobre la suma de 5 números consecutivos fue necesario aplicar suma de polinomios. Utilizando variables para expresar la situación, se pueden comprobar varias propiedades que hay entre los números.

1. Escribe cinco números consecutivos representando el número del centro con n; luego expresa la suma de estos números en términos de n.
   $9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55 = 5 \times 11$ $\quad (n - 2) + (n - 1) + (n) + (n + 1) + (n + 2) = 5n$
2. Encuentra la propiedad de la suma de 7 números consecutivos y compruébala.
   $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63 = 7 \times 9$
   $(n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) = 7n + 21 = 7(n + 3)$

Indicador de logro

2.1 Utiliza polinomios para obtener propiedades de números u operaciones.

Secuencia

En la lección 1 de esta unidad, se trabajaron las operaciones con polinomios, en esta clase se utilizarán para representar la suma de números consecutivos, para ello se harán conjeturas que se buscarán generalizar mediante expresiones algebraicas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Calcular la suma de cinco números consecutivos, luego generalizar para cinco números consecutivos cualesquiera.

Solución de algunos ítems:

1. $9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55 = 5 \times 11$
   $(n - 2) + (n - 1) + (n) + (n + 1) + (n + 2) = n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 5n$

Estrategia de resolución de problemas:
Para esta clase y las siguientes, se utiliza la búsqueda de regularidades numéricas que se puedan modelar mediante una expresión algebraica, la cual se conoce como **búsqueda de patrones**.

Posibles dificultades:
El estudiante quizás no recuerde o no conozca el concepto de números consecutivos, en ese caso será necesario dar una explicación general.

Como no se ha visto el factoreo la respuesta final debe ser obtenida como el proceso inverso de la propiedad distributiva del producto sobre la suma.

Fecha: U1 2.1

Ⓟ Efectúa las siguientes sumas:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$ ______
$13 + 14 + 15 + 16 + 17 =$ ______
$28 + 29 + 30 + 31 + 32 =$ ______

Ⓢ

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad (5 \times 3)$
$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 75 \quad (5 \times 15)$
$28 + 29 + 30 + 31 + 32 = 150 \quad (5 \times 30)$

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$
$= 5n + 10 = 5 \times (n + 2)$

Ⓡ

1. $9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55 = 5 \times 11$
   $(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 2) + (n + 2) = 5n$

2. $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 63 = 7 \times 9$

$n - 3n - 2 + n - 1 + n + n + 2 + n + 2\,n + 3 = 7n$

Tarea: página 15 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Suma de un número con su invertido

P

Efectúa las siguientes sumas de un número con su invertido, demuestra si se cumple alguna regla.

12 + 21 = ______
63 + 36 = ______
91 + 19 = ______

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón.

12 + 21 = 33 = 11 × 3
63 + 36 = 99 = 11 × 9
91 + 19 = 110 = 11 × 10

La suma de un número con su invertido es un múltiplo de 11, ¿se cumplirá siempre esta afirmación?

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares de arriba, se toma y como el dígito de las unidades y x como el dígito de las decenas, escribiendo el número mediante la expresión de los números base 10.

63 = 60 + **3**
63 = 10 × **6** + **3**
= 10 × x + y

Observa que en este caso, las variables x y y representan dígitos; es decir, números entre 0 y 9, y no se está tomando en cuenta el valor posicional de las decenas.

Entonces, la suma de un número con su invertido utilizando las variables x y y, es:

$$(10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y$$

$$= 11(x + y)$$

Por lo tanto, la suma de un número con su invertido siempre es múltiplo de 11.

C

Para comprobar las propiedades de los números, hay que utilizar variables adecuadamente según la situación, identificar regularidades y aplicar las operaciones algebraicas necesarias para representarlas.

1. Determina si la suma de un número de 4 cifras con su invertido es múltiplo de 11. Considera los casos a continuación:

a) 1 234 + 4 321 = 5 555 = 11 × 505

b) 1 032 + 2 301 = 3 333 = 11 × 303

c) 1 121 + 1 211 = 2 332 = 11 × 212

2. Comprueba tus resultados del numeral 1.

a) $(1\,000w + 100x + 10y + z) + (1\,000z + 100y + 10x + w)$
$1\,001w + 110x + 110y + 1\,001z = 11(91w + 10x + 10y + 91z)$

Indicador de logro

2.2 Utiliza polinomios para obtener propiedades de números u operaciones.

Secuencia

Anteriormente se modeló la suma de x números consecutivos, en esta clase se utilizarán las operaciones con polinomios para modelar la suma de un número con su invertido, siempre continuando con la representación algebraica de propiedades de los números.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la suma de un número con su invertido mediante operaciones algebraicas. Es importante que el estudiante comprenda la importancia de identificar regularidades y representar un número mediante una variable.

Solución de algunos ítems:

2. a) $(1\,000w + 100x + 10y + z) +$
$(1\,000z + 100z + 10x + w)$

$= (1\,001w + 110x + 110y + 1\,001z)$
$= (11 \times 91w + 11 \times 10x + 11 \times 10y + 11 \times 91z)$
$= 11(91w + 10x + 10y + 91z)$

Posibles dificultades:
Puede que el estudiante no comprenda el concepto de número invertido, en ese caso será importante ejemplificar de manera general.

Como no se ha visto el factoreo la respuesta final debe ser obtenida como el proceso inverso de la propiedad distributiva del producto sobre la suma, tal como se hizo en la clase anterior.

Fecha: **U1 2.2**

Ⓟ Efectúa las siguientes sumas:

$12 + 21 =$ ______
$63 + 36 =$ ______
$91 + 19 =$ ______

Ⓢ
$12 + 21 = \underline{33} = 11 \times 3$
$63 + 36 = \underline{99} = 11 \times 9$
$91 + 19 = \underline{110} = 11 \times 10$

$63 = 60 + 3$
$63 = 10 \times 6 + 3$

$= 10 \times x + y$

$= 11x + 11y = 11(x + y)$

Ⓡ 1. a) $1\,234 + 4\,321 = 5\,555 = 11 \times 505$
b) $1\,032 + 2\,301 = 3\,333 = 11 \times 303$
c) $1\,121 + 1\,211 = 2\,332 = 11 \times 212$

2. a) $1\,234 = 1 \times 1\,000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$
$4\,321 = 4 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 1$

Generalizando:
$1\,000w + 100x + 10y + 1z$
$1\,000z + 100y + 10x + 1w$
Suma: $11(91w + 10y + 10x + 91z)$

Tarea: página 16 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Sumas de días del calendario

P

Efectúa la suma de los días del calendario que están sombreados, demuestra si se cumple alguna regla en general.

Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

S

Efectuando las sumas y buscando algún patrón:

Color rosado: $2 + 8 + \mathbf{9} + 10 + 16 = 45 = 5 \times \mathbf{9}$
Color azul: $14 + 20 + \mathbf{21} + 22 + 28 = 105 = 5 \times \mathbf{21}$

Las sumas de los cinco días coloreados parecen ser 5 veces el número que queda al centro.

Comprobando "la conjetura" realizada a partir de las sumas particulares de arriba; se toma n como el término del centro de la parte sombreada.

Entonces, un día después será denotado por $n + 1$ y un día antes por $n - 1$.
Además, para denotar el mismo día, pero de la semana anterior, será $n - 7$ y el mismo día la semana siguiente será $n + 7$.

La suma de los 5 días coloreados estará dado por:

$$14 + 20 + 21 + 22 + 28$$
$$\downarrow$$
$$(\mathbf{21} - 7) + (\mathbf{21} - 1) + \mathbf{21} + (\mathbf{21} + 1) + (\mathbf{21} + 7)$$
$$\downarrow$$
$$(n - 7) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 7) = 5n$$

Por lo tanto, la suma de los días sombreados en esta forma en el calendario es 5 veces el número que queda al centro.

C

Cuando se trata de varios números, es importante elegir el número que se representará con la variable conveniente, para identificar los patrones y expresarlos mediantes expresiones algebraicas.

Utiliza polinomios para comprobar la regla que hay en la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios:

a) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

$5n$

b) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

$3n$

c) Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

$5n$

Indicador de logro

2.3 Aplica polinomios para resolver problemas en los que se tengan que reconocer patrones.

Secuencia

En las clases 2.1 y 2.2, se modelaron algunas propiedades de los números, y para esta clase se utilizarán las operaciones algebraicas para determinar la suma de subconjuntos de números del calendario que guardan regularidades entre sí.

Es importante que se haga énfasis en el uso de las expresiones algebraicas en diferentes ciencias, como la química, física, biología, etc., para ir cambiando el concepto del álgebra que se ha tenido en el sistema educativo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Reconocer regularidades entre los números que están ubicados en posiciones donde se pueden identificar dichas regularidades y representarlas mediante una expresión algebraica.

Posibles dificultades:
Probablemente no logren identificar las regularidades, en ese caso puede asignarse trabajo por parejas o equipos de 3 estudiantes, para que analicen e identifiquen las relaciones con el apoyo de los compañeros, fortaleciendo así las relaciones interpersonales.

Fecha: **U1 2.3**

Ⓟ Demuestra si se cumple alguna regla general para la suma de los días indicados:

Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

Ⓢ

$$2 + 8 + 9 + 10 + 16 = 45 = 5 \times 9$$

$$14 + 20 + 21 + 22 + 28 = 105 = 5 \times 21$$

$$14 + 20 + 21 + 22 + 28$$

$$(21 - 7) + (21 - 1) + 21 + (21 + 1) + (21 + 7)$$

$$(n - 7) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 7) = 5n$$

Ⓡ

a) $9 + 15 + 16 + 17 + 23 = 80 = 5 \times 16$

$$9 + 15 + 16 + 17 + 23$$

$$(16 - 7) + (16 - 1) + 16 + (16 + 1) + (16 + 7)$$

$$(n - 7) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 7) = 5n$$

b) $8 + 15 + 22 = 45 = 3 \times 15$

$$(n - 7) + n + (n + 7) = 3n$$

c) $3 + 9 + 15 + 21 + 27 = 75 = 5 \times 15$

$$(n - 12) + (n - 6) + n + (n + 6) + (n + 12) = 5n$$

Tarea: página 17 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Resolución de problemas utilizando polinomios

P

Carlos tiene 25 centavos de dólar para comprar dulces en la tienda, si los dulces de miel cuestan 3 centavos y los de eucalipto 2.5 centavos cada uno. Tomando a como la cantidad de dulces de miel, b como la cantidad de dulces de eucalipto, establece el polinomio que representa la situación. Luego responde, Carlos compra 5 dulces de miel, ¿cuántos dulces de eucalipto puede comprar con el vuelto?

S

Cada dulce de miel cuesta 3 centavos de dólar y cada dulce de eucalipto 2.5, se gastan 25 centavos, entonces se puede plantear la siguiente ecuación:

Costo de los dulces de miel $\longrightarrow 3a + 2.5b = 25 \longleftarrow$ Dinero que tiene Carlos.

Costo de los dulces de eucalipto.

El problema pide la cantidad de dulces de eucalipto que puede comprar Carlos, es decir b; si compra 5 dulces de miel, es decir $a = 5$. Trabajando la ecuación:

$$3a + 2.5b = 25$$

Multiplicando ambos lados por 2,

$$6a + 5b = 50$$

transponiendo el término $6a$,

$$5b = 50 - 6a$$

dividiendo ambos lados por 5.

$$b = \frac{50 - 6a}{5} = -\frac{6a}{5} + 10$$

Finalmente para determinar cuántos dulces de eucalipto puede comprar Carlos hay que sustituir el valor numérico de $a = 5$ en el polinomio $-\frac{6a}{5} + 10$, se tiene $\frac{-6 \times 5}{5} + 10 = -6 + 10 = 4$.

C

Para resolver problemas utilizando polinomios se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se identifican las variables del problema.
2. Se plantea una ecuación con las variables identificadas en el paso anterior.
3. Se despeja la variable que soluciona el problema planteado.
4. Se sustituye el valor numérico de una variable en el polinomio que resulta después de despejar.

E

Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que aparece entre corchetes [].

$\frac{1}{3}ab = 5$ [a, $b = 5$]. Entonces, $\frac{1}{3}ab = 5$ $\quad ab = 15 \quad a = \frac{15}{b}$. Por lo tanto, $a = \frac{15}{5} = 3$.

Multiplicando por 3 ambos lados. Dividiendo por b ambos lados.

1. Despeja la variable indicada y sustituye el valor numérico que aparece entre corchetes [].

   a) $5x - 6y = 25$ [x, $y = 10$] $x = 17$

   b) $3.5t + u = 7$ [u, $t = 4$] $u = -7$

   c) $\frac{1}{6}wz = 10$ [w, $z = 15$] $w = 4$

2. Un arquitecto trabaja en el diseño de las paredes de una casa; cuenta con dos tipos de ladrillo, el primer tipo es de 10 pulgadas de altura y el segundo de 6 pulgadas de altura. Si la pared mide 72 pulgadas de alto, tomando w como la cantidad de ladrillos del tipo 1, z como la cantidad de ladrillos del tipo 2, establece el polinomio que representa la situación. Además, el arquitecto decide que esta pared debe tener 6 filas de ladrillos del primer tipo, ¿cuántas filas del segundo tipo debe tener la pared? $10w + 6z = 72$; $z = 2$

Indicador de logro

2.4 Utiliza polinomios para resolver situaciones cotidianas.

Secuencia

En las clases anteriores de esta lección, se han modelado algunas propiedades de los números; en esta clase se utilizarán las expresiones algebraicas y sus operaciones para resolver situaciones cotidianas. Estas expresiones tienen dos variables y se conoce solo el valor de una de ellas, para resolverlas se debe hacer referencia a lo aprendido en la Unidad 5 de séptimo grado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver situaciones cotidianas mediante el uso de polinomios, utilizando dos variables donde solo se conoce el valor de una de ellas (luego de sustituir el valor conocido, el proceso se reduce a la solución de una ecuación con una incógnita).

Ⓔ Despejar una variable en una ecuación que tiene dos incógnitas donde el valor de una de ellas es conocido.

Fecha:

U1 2.4

Ⓟ Carlos tiene 25 centavos de dólar; si los dulces de miel cuestan 3 centavos y los de eucalipto 2.5 centavos cada uno. Si compra 5 de miel, ¿cuántos de eucalipto puede comprar con el vuelto?

Ⓢ
$$3a + 2.5b = 25$$
$$6a + 5b = 50$$
$$5b = 50 - 6a$$
$$b = \frac{50 - 6a}{5} = -\frac{6a}{5} + 10$$

Como $a = 5$, entonces $b = \frac{-6 \times 5}{5} + 10 = -6 + 10 = 4$

Ⓔ $\frac{1}{3}ab = 5 \quad [a, b = 5]$

$\frac{1}{3}ab = 5 \qquad ab = 15 \qquad a = \frac{15}{b}$

Ⓡ a) $5x - 6y = 25 \quad [x, y = 10]$

$x = 17$

b) $3.5t + u = 7 \quad [u, t = 4]$

$u = -7$

c) $\frac{1}{6}wz = 10 \quad [w, z = 15]$

$w = 4$

Tarea: página 18 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Practica lo aprendido

1. Determina un procedimiento para sumar 9 números consecutivos.
   $9n$, donde n es el número que está justo en el centro si se consideran los datos ordenados.

2. Demuestra que si un número de tres cifras tiene la cifra de las decenas dos unidades mayor que la de las centenas y dos unidades menos que la de las unidades, entonces al sumarlo con su invertido el resultado es múltiplo de 111. $100(x - 2) + 10(x) + (x + 2)$: número
   $100(x + 2) + 10(x) + (x - 2)$: invertido
   Suma: $222x$, es múltiplo de 11

3. Utiliza polinomios para encontrar la regla que hay en la suma de los días sombreados en los siguientes calendarios:

a)

Febrero 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

$7n$

b)

Marzo 2017

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

$5n$

4. Carlos compra 3 pupusas de queso con loroco y 2 revueltas, en total debe pagar \$2.20. Si Carlos sabe que las pupusas de queso con loroco valen \$0.50, ¿qué precio tienen las pupusas revueltas? Resuélvelo utilizando polinomios y valor numérico. Cuestan 0.35 centavos
   $3x + 2y = 2.20$
   $y = 0.35$

5. ¿Cuántos cuadrados de 10 m^2 de área son necesarios para cubrir un área de 200 m^2 si ya se han utilizado 7 cuadrados de 20 m^2 de área? $10x + 20y = 200$
   $x = 6$ Se necesitan 6 cuadrados

6. El abuelito de Ana tiene problemas con uno de sus riñones y el nefrólogo le ha recomendado que tome 2 litros de agua al día. Para cumplir la recomendación del médico, Ana quiere conocer la capacidad que tienen los vasos de su casa, y así podrá saber cuántos vasos con agua tendrá que beberse al día el abuelo. Considerando que los vasos tienen forma cilíndrica. Determina cuántos vasos con agua debe beber cada día el abuelo de Ana; ¿cómo se resuelve esto?

   Nota: para resolver esta situación, toma las medidas de un vaso cilíndrico que esté en tu escuela o en tu casa.

7. Una de las propiedades de la sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...) es que "la suma de diez elementos consecutivos cualesquiera de la sucesión es igual a 11 veces el séptimo elemento de ese grupo". No es necesario que comience por el primer término de la sucesión. Ilustra la propiedad con dos ejemplos y escribe una expresión algebraica tomando como x el séptimo elemento del grupo.
   $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 = 11 \times 13$
   $2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 = 143 = 11 \times 34$
   Sea x el número que ocupa la posición 7 y y el que ocupa la posición anterior a x.
   $(5x - 8y) + (5y - 3x) + (2x - 3y) + (2y - x) + (x - y) + (y) + (x) + (x + y) + (2x + y) + (3x + 2y) = 11x.$

Indicador de logro

2.5 Resuelve situaciones de diferentes contextos del entorno, utilizando las operaciones con polinomios.

Solución de algunos ítems:

1.
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$
$= 45 = 9 \times 5$
$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 9n$

2. Se tiene que el número es de la forma:

$100\ (x - 2) + 10\ x + (x + 2)$
$= 100x - 200 + 10\ x + x + 2$
$= 111x - 198$

Mientras que el invertido:
$100(x + 2) + 10\ x + (x - 2)$
$= 100x + 200 + 10\ x + x - 2$
$= 111x + 198$

Luego sumando el número con su invertido se tiene que

$111x - 198 + (111x + 198)$
$= 222x - 198 + 198$
$= 222x$

Se tiene que $222x$ es múltiplo de 11.

4. Se tiene la siguiente relación:
$3x + 2y = 2.20$, como $x = 0.50$

$$\begin{aligned} 3(0.50) + 2y &= 2.20 \\ 1.5 + 2y &= 2.20 \\ 2y &= 0.7 \\ y &= 0.35 \end{aligned}$$

Tarea: página 19 del Cuaderno de Ejercicios.

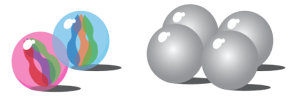
2.6 Practica lo aprendido

Expresa los siguientes problemas como ecuaciones con polinomios, luego resuélvelos utilizando valor numérico.

1. Carmen compra 2 chibolas de cristal y 4 metálicas por \$1.90, ¿cuánto cuestan las chibolas metálicas si las de cristal cuestan \$0.25 cada una?

   $2x + 4y = 1.9$

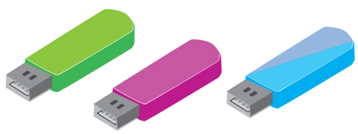
   $y = 0.35$



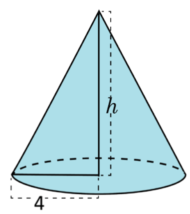
2. Mario necesita 1 024 MB para hacer un respaldo de sus archivos de la computadora, para ello cuenta con 3 memorias *USB* con capacidad de 256 MB. ¿Cuántas memorias *USB* con capacidad de 128 MB necesita Mario para esta labor?

   $256x + 128y = 1\,024$

   $y = 2$



3. El volumen de un cono es $8\pi \text{cm}^3$. Si el cono tiene un radio de 4 cm, determina la medida de la altura de dicho cono. $h = \frac{3}{2}$



4. Beatriz vende pan dulce y ha olvidado el precio de la semita de piña, pero recuerda que ayer Miguel compró 2 semitas y 3 salpores y pagó \$0.83. Si Beatriz sabe que cada salpor cuesta \$0.11, ¿cómo podría Beatriz saber el precio de la semita de piña?

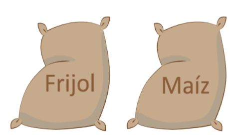
   $2x + 3y = 0.83$

   $y = 0.25$

5. José cultiva maíz y frijol, este año venderá 5 quintales de frijol y 3 de maíz, él se ha proyectado recaudar \$500 con la venta de su cosecha. Si piensa vender el quintal de frijol a \$85, ¿qué precio debe tener el quintal de maíz para que José logre su proyección?

   $3x + 5y = 500$

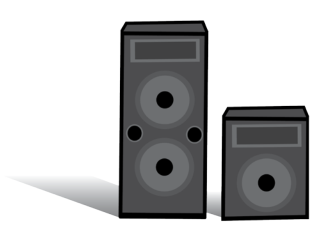
   $x = 25$



6. En la escuela de María se celebrará el día del amor y la amistad, por lo que se requiere instalar algunos parlantes, con el cuidado de que no sobrepasen los 120 decibeles de sonido. Si se cuenta con 2 parlantes de 40 decibeles cada uno, ¿cuántos parlantes de 20 decibeles se necesitan?

   $40x + 20y = 120$

   $y = 2$



Indicador de logro

2.6 Resuelve situaciones de diferentes contextos del entorno, utilizando las operaciones con polinomios.

Solución de algunos ítems:

1. Se tiene la siguiente relación:
   $2x + 4y = 1.9$ como $x = 0.25$
   $2(0.25) + 4y = 1.9$
   $0.5 + 4y = 1.9$
   $4y = 1.4$
   $y = 0.35$

2. Sustituyendo $x = 3$ en
   $256x + 128y = 1\,024$
   $256(3) + 128y = 1\,024$
   $768 + 128y = 1\,024$
   $128y = 256$
   $y = 2$

3. Como el volumen del cono es:
   $V = \frac{1}{3}Ah,$

   Y como el $A = \pi(4^2) = 16\pi,$
   además $V = 8\pi,$
   $V = 8\pi = \frac{1}{3}(16\pi)h.$

   De aquí que

   $$h = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

Tarea: página 20 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 2. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Competencia de la Unidad

Utilizar los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, para resolver situaciones del entorno, aplicando el método de solución que considere más adecuado.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 4: Comunicación con símbolos
- Expresiones algebraicas
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Representación de relaciones entre expresiones matemáticas

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 1: Operaciones algebraicas
- Operaciones con polinomios
- Aplicación de las expresiones algebraicas

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 1: Multiplicación de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Métodos para resolver la ecuación de primer grado con dos incógnitas	1	1. Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita
	1	2. Aplicación de ecuaciones de primer grado con una incógnita
	1	3. Sentido de la ecuación de primer grado con dos incógnitas
	1	4. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
	1	5. Sentido del método de reducción
	1	6. Método de reducción por adición
	1	7. Método de reducción por adición o sustracción, parte 1
	1	8. Método de reducción por adición o sustracción, parte 2
	1	9. Sentido del método de sustitución
	1	10. Método de sustitución
	1	11. Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
	1	12. Sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales
	1	13. Sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios
	1	14. Sistemas de ecuaciones que contienen signos de agrupación
	1	15. Sistemas de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$
	2	16. Practica lo aprendido
2. Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas	1	1. Aplicación de sistemas de ecuaciones en geometría
	1	2. Aplicación de sistemas de ecuaciones en ciencias naturales
	1	3. Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 1

	1	4. Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 2
	2	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 2

23 horas clase + prueba de la Unidad 2

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Métodos para resolver la ecuación de primer grado con dos incógnitas
A partir de la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, se introducen las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas con el objeto de resolver situaciones cotidianas, luego se trabaja con los métodos para resolver sistemas de ecuaciones (el de reducción por adición o sustracción y el método de sustitución), esto cuidando la secuencia del uso del número como coeficiente desde coeficientes enteros e iguales hasta el uso de coeficientes decimales o fraccionarios con distinto valor absoluto; y se finaliza con sistemas de ecuaciones donde se tienen operaciones indicadas.

Se busca fortalecer las competencias de los estudiantes de tal manera que estén en condiciones de resolver un sistema de ecuaciones eligiendo el método más adecuado independientemente del tipo de coeficientes que acompañan a las incógnitas.

Lección 2: Aplicación de la ecuación de primer grado con dos incógnitas
Una vez que se haya aprendido a resolver los sistemas de ecuaciones, se busca aplicarlos para la solución de situaciones de distintos contextos, entre los que se pueden mencionar: geometría, ciencias naturales, aritmética, etc. Es importante garantizar el desarrollo de las competencias del estudiante para que sea él quien esté en condiciones de identificar cuándo es necesario utilizar los sistemas de ecuaciones en la solución de situaciones del entorno.

Lección 1 Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1.1 Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

P

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$ b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$ c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

S

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

$$\begin{aligned} 3 + 4x - 8 &= -3 - 5x + 25 \\ 4x - 5 &= -5x + 22 \\ 4x + 5x &= 22 + 5 \\ 9x &= 27 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

$$\begin{aligned} 20x - 3 &= 17x + 21 \\ 20x - 17x &= 21 + 3 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

$$\begin{aligned} 12 \times \tfrac{7}{12}x + 12 \times \tfrac{5}{6} &= 12 \times x \\ 7x + 10 &= 12x \\ 7x - 12x &= -10 \\ -5x &= -10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

1. Determina el valor de x que satisface las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 8 = 4$
$x = 4$

b) $-4x - 2 = -18$
$x = 4$

c) $2x - 3 = -x - 9$
$x = -2$

d) $11x - 15 = 12 + 2x$
$x = 3$

e) $5(2x - 3) - 6 = 4x + 3$
$x = 4$

f) $3(x - 2) + x = 5(x - 3) + 9$
$x = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0.5x - 1.2 = 0.4x + 3.3$
$x = 45$

b) $3 + 0.8x = 2.4 + 0.9x$
$x = 6$

c) $0.2x - 0.04 = 0.16x + 0.28$
$x = 8$

d) $1.31x + 0.04 = 1.35x - 0.04$
$x = 2$

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x$
$x = 12$

b) $-\frac{x}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{3}$
$x = \frac{3}{2}$

c) $-\frac{1}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}$
$x = -\frac{7}{10}$

d) $-\frac{x + 5}{2} = \frac{3}{4}$
$x = \frac{-13}{2}$

e) $\frac{x - 3}{3} = \frac{1}{6}x$
$x = 6$

f) $-\frac{5x - 4}{3} = -\frac{3}{4}$
$x = \frac{5}{4}$

g) $\frac{x + 5}{12} = \frac{x + 7}{24}$
$x = -3$

h) $-\left(\frac{x + 3}{2}\right) - \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$
$x = -4$

Indicador de logro

1.1 Utiliza lo aprendido en 7° grado para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Secuencia

En la Unidad 5 de séptimo grado se abordó por primera vez el contenido de ecuaciones de primer grado, donde se aprendió a resolver situaciones mediante expresiones matemáticas que permiten determinar el valor que satisface la expresión.

En esta clase se busca recordar esos contenidos para preparar al estudiante para la introducción de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Recordar el proceso de solución de una ecuación de primer grado y determinar el valor de la variable que satisface la igualdad, utilizando adecuadamente las operaciones algebraicas con diferentes tipos de números.

Solución de algunos ítems:

2. c) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

$0.2x - 0.17x = 0.21 + 0.03$

$0.03x = 0.24$

$x = 8$

Posibles dificultades:
Es la primera clase de la unidad, se espera que en séptimo grado hayan aprendido a resolver ecuaciones, en caso que lo olvidaran o en algunos casos extremos que no comprendieran los procesos cuando vieron esos contenidos; será necesario que se retroalimenten los procesos a realizar u organizar el trabajo por parejas o equipos de tres para que juntos vayan recordando lo aprendido.

Fecha: **U2 1.1**

Ⓟ Resuelve las ecuaciones:

a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

b) $0.2x - 0.03 = 0.17x + 0.21$

c) $\frac{7}{12}x + \frac{5}{6} = x$

Ⓢ a) $3 + 4(x - 2) = -3 - 5(x - 5)$

$3 + 4x - 8 = -3 - 5x + 25$

$4x - 5 = -5x + 22$

$4x + 5x = 22 + 5$

$9x = 27$

$x = 3$

Será necesario presentar la solución de las 3 ecuaciones.

Ⓡ 1. a) $3x - 8 = 4$

$3x = 12$

$x = 4$

2. b) $-4x - 2 = -18$

$-4x = -16$

$x = 4$

3. c) $2x - 3 = -x - 9$

$2x + x = -6$

$x = -2$

4. d) $11x - 15 = 12 + 2x$

$9x = 12 + 15$

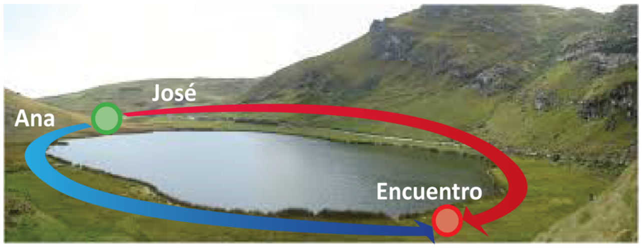
$x = 3$

Tarea: página 24 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Aplicación de las ecuaciones de primer grado con una incógnita

P

Resuelve la siguiente situación: una laguna tiene 1 200 m de perímetro, Ana corre a una velocidad de 140 m/min en dirección horaria, mientras que José corre a una velocidad de 160 m/min en sentido antihorario. Si ambos salen del mismo punto al mismo tiempo, ¿en cuántos minutos se vuelven a encontrar?



S

La suma de las distancias recorridas por Ana y José es equivalente a 1 200 m.

	Ana	José
Velocidad (metros/minutos)	140 m/min	160 m/min
Tiempo (minutos)	x	x
Distancia (metros)	$140x$	$160x$

$$140x + 160x = 1\,200$$
$$300x = 1\,200$$
$$x = \frac{1\,200}{300}$$
$$x = 4$$

Ana y José se encontrarán después de 4 minutos.

1. Julia tiene una librería, ella tiene $5 de ganancias por cada libro que vende y sus gastos mensuales de funcionamiento son de $150, ¿cuál es la mínima cantidad de libros que necesita vender para no quedar endeudada? 30 libros.

2. Un tanque está lleno de agua. Al utilizar la cuarta parte por la mañana y la octava parte por la tarde quedan en el tanque 100 galones, ¿cuál es la capacidad del tanque? 160 galones.

3. Marta renta un equipo multimedia a $20 por día de uso, más una cuota única de $10, cuando se retira el equipo del local. José tiene un negocio del mismo tipo en el que cobra $18 por día de uso del equipo, más una cuota única de $26 al retirar el equipo. Carlos desea alquilar el equipo por 5 días, ¿a los cuántos días el costo del alquiler es el mismo en los dos negocios?, ¿en cuál negocio debe alquilar el equipo Carlos? A los 8 días y Carlos debe alquilar el equipo donde Marta.

4. Se contrata un bus para hacer una excursión, si se hubieran completado los asientos el costo del pasaje por persona hubiera sido de $10, pero faltaron 10 personas, entonces el costo del pasaje por persona es de $15. ¿Cuántos asientos tiene el bus? 30 asientos.

5. Un vehículo sale de la ciudad A a la velocidad de 60 km/h, dos horas más tarde sale de la misma ciudad otro vehículo, siguiendo al primero, con una velocidad de 90 km/h.
   a) ¿En cuántas horas alcanza el otro vehículo al primero? 4 horas.
   b) Si la distancia entre la ciudad A y otra ciudad B fuera 350 km, ¿lograría el segundo auto alcanzar al primero? No logra alcanzarlo, pues lo alcanzará cuando haya recorrido 360 km.

Indicador de logro

1.2 Utiliza lo aprendido sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita para resolver situaciones cotidianas.

Secuencia

En séptimo grado se resolvieron situaciones mediante el uso de ecuaciones de primer grado, en esta clase se recordará el proceso resolviendo situaciones análogas para que se retroalimente y fije el aprendizaje sobre las aplicaciones de las ecuaciones de primer grado con una incógnita; y así preparar al estudiante para el estudio de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Modelar una situación mediante una expresión algebraica que permita determinar el valor de la variable desconocida (tiempo).

Solución de algunos ítems:

5. a):

x: número de horas en que alcanza al otro automóvil.

$$\begin{aligned} 60(x+2) &= 90x \\ 60x + 120 &= 90x \\ -30x &= -120 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Posibles dificultades:

Algunos estudiantes podrían tener dificultades para modelar las situaciones, o en algunos casos extremos, en resolver las ecuaciones.

En esos casos será necesario verificar el total de estudiantes y si son pocos pueden organizarse por equipos para que superen dificultades con el apoyo entre estudiantes, y si es la mayoría, será necesario dar una explicación general.

Fecha:

U2 1.2

Ⓟ Perímetro de la laguna: 1 200 m
Velocidad de Ana: 140 m/min
Velocidad de José: 160 m/min
Si ambos salen del mismo punto al mismo tiempo, ¿en cuántos minutos se vuelven a encontrar?

Ⓢ Distancia recorrida por Ana: $140x$
Distancia recorrida por José: $160x$

$$\begin{aligned} 140x + 160x &= 1\,200 \\ 300x &= 1\,200 \\ x &= \frac{1\,200}{300} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ⓡ 1. $5x = 150$; $x = 30$

2. $x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x = 100$; $x = 160$

3. $20x + 10 = 18x + 26$;
$x = 8$; en la sucursal de Marta.

4. $10x = 15(x - 10)$; $x = 30$

Tarea: página 25 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Sentido de la ecuación de primer grado con dos incógnitas

P

Carlos es un jugador de baloncesto, y en la final de 2015 acertó 7 tiros en total, ¿cuántos tiros libres y de 2 puntos acertó?

a) Considerando que acertó x tiros libres y y tiros de 2 puntos, escribe una ecuación que represente la condición "acertó 7 tiros."

b) Construye una tabla para determinar los valores para x y y.

S

a) Considerando x tiros libres y y tiros de 2 puntos, entonces al formar la ecuación con la condición "acertó 7 tiros", se obtiene $x + y = 7$.

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
Total acertado	7	7	7	7	7	7	7	7

Las ecuaciones de la forma $x + y = 7$ se llaman **ecuaciones de primer grado con dos incógnitas**, y tal como se desarrolló anteriormente, para estas ecuaciones existe más de un par de valores que las satisfacen.

Las ecuaciones que se aprendieron en séptimo grado se llaman ecuaciones de primer grado con una incógnita, por ejemplo:

$$5x + 6 = 21$$

Ahora se tienen dos valores desconocidos: x y y, por lo que se les denomina con dos incógnitas.

E

Según Carlos, por acertar 7 tiros obtuvo 10 puntos. ¿Cuántos tiros libres y cuántos de 2 puntos acertó?

a) Escribe una ecuación que represente la condición "obtuvo 10 puntos."

b) Agrega una fila a la tabla anterior y encuentra los pares de valores que cumplen la nueva condición.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
Total acertado: $x + y$	7	7	7	7	7	7	7	7
Total de puntos: $x + 2y$	14	13	12	11	10	9	8	7

Se considera siempre que ha acertado x tiros libres y y tiros de 2 puntos, entonces al formar una expresión con la condición "obtuvo 10 puntos", se obtiene $x + 2y = 10$.

C

Para satisfacer las dos condiciones y encontrar los valores de x y y que satisfagan las dos condiciones, se plantean las dos ecuaciones de forma simultánea $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

A la combinación de dos ecuaciones se le llama **sistema de dos ecuaciones** y la solución del sistema será el par de valores que satisfacen las dos ecuaciones. En el ejemplo, la solución del sistema es $x = 4$, $y = 3$.

Lee la siguiente situación:

Ana tiene en su cartera 8 billetes, haciendo un total de \$55, unos billetes son de \$5 y otros de \$10. ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene, considerando que Ana tiene x billetes de \$5 y y de \$10?

a) Escribe una ecuación que represente la condición "Ana tiene 8 billetes". $x + y = 8$

b) Escribe una ecuación que represente la condición "un total de \$55 ". $5x + 10y = 55$

c) Elabora la tabla y determina cuántos billetes de cada tipo tiene. $x = 5$, $y = 3$

24

Indicador de logro

1.3 Resuelve una situación mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Secuencia

Los estudiantes han recordado y practicado la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, es el momento de ampliar el conocimiento sobre ecuaciones y se inicia con una situación en la que intervienen dos incógnitas, con el objeto de generar la necesidad de su uso para resolver situaciones del entorno.

Se espera que con los conocimientos previos los estudiantes puedan resolverla y que al finalizar se pueda concretizar el concepto de ecuación de primer grado con dos incógnitas; así como el concepto de sistema.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar todos los valores que satisfacen la condición establecida sobre el número de tiros acertados por el jugador, mediante el cual se formalizará el concepto de ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Ⓔ Resolver una situación que tiene una doble condición para introducir el concepto de sistema de ecuaciones, mediante el uso de tablas como apoyo visual.

Posibles dificultades:
Puede que algunos estudiantes no logren representar algebraicamente las condiciones dadas en las situaciones, en ese caso es importante hacer énfasis en la relación entre lenguaje común y el lenguaje algebraico.

Fecha: U2 1.3

Ⓟ ¿Cuántos tiros libres y de 2 puntos acertó?

Si acertó x tiros libres y y tiros de 2 puntos. Escribe la ecuación que representa la condición.

Determinar los valores para x y y

Ⓢ $x + y = 7$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
Total	7	7	7	7	7	7	7	7

Ⓔ

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
$x + y$	7	7	7	7	7	7	7	7
$x + 2y$	14	13	12	11	10	9	8	7

Ⓡ a) $x + y = 8$

b) $5x + 10y = 55$

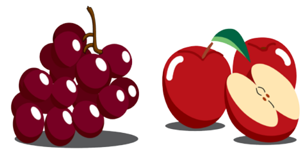
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$x + y$	8	8	8	8	8	8	8	8	8
$5x + 10y$	80	75	70	65	60	55	50	45	40

Tarea: página 26 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

P

En la tienda Vida Sana, una libra de uvas y una de manzanas cuesta \$5 y una libra de uvas y tres de manzanas cuesta \$11. ¿Cuál es el precio de una libra de uvas y una libra de manzanas?



a) Representa cada condición con una ecuación.
b) Construye una tabla para determinar los pares de valores que cumplen cada ecuación.

S

a) Considera como x el precio de la libra de uvas y como y el precio de la libra de manzanas.

Costo de una libra de uvas + costo de una libra de manzanas $\longrightarrow$ $x + y = 5$

Costo de una libra de uvas + costo de tres libras de manzanas $\longrightarrow$ $x + 3y = 11$

b) Para elaborar la tabla, considera las dos condiciones $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

x	0	1	**2**	3	4	5
y	5	4	**3**	2	1	0
$x + y$	5	5	**5**	5	5	5
$x + 3y$	15	13	**11**	9	7	5

Los valores para x y y que cumplen las dos condiciones son $\boldsymbol{x = 2, y = 3}$; entonces, el precio de una libra de uvas es de \$2 y el de manzanas \$3.

C

Los valores que cumplen las dos condiciones del problema se les llama **solución del sistema**, entonces **resolver un sistema de ecuaciones** es encontrar los valores que satisfacen las dos ecuaciones.

1. De los siguientes pares de valores, ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + y = 32 \end{cases}$?

a) $x = 15, \quad y = 5$
b) $x = 20, \quad y = 6$
c) $x = 14, \quad y = 4$

El literal c)

2. ¿A cuál sistema de ecuaciones corresponde la solución $x = 3$, $y = 1$?

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

El literal c)

Indicador de logro

1.4 Determina el valor de las incógnitas que cumplen un sistema de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

Secuencia

En la clase anterior se introdujo el concepto de ecuación de primer grado con dos incógnitas y el concepto de sistemas de ecuaciones; para esta clase se trabajará con el concepto de **solución del sistema**, en un primer momento mediante el uso de la tabla como recurso auxiliar, luego se espera que puedan verificar si un par de valores corresponden a la solución del sistema, sustituyendo los respectivos valores para las variables y realizando las operaciones necesarias.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la solución de un sistema mediante el uso de una tabla como recurso de apoyo.

Ⓔ Fijar el concepto de solución de un sistema. En esta clase se consideran tres casos:

1. En el Problema inicial, dado que el sistema utiliza la tabla para determinar la solución.
2. En el ejercicio 1, dado un sistema y algunos pares de valores para las incógnitas, el estudiante deberá hacer una sustitución en el sistema para que al realizar las operaciones necesarias pueda determinar cuál es la solución.
3. En el ejercicio 2, dado un par de valores y algunos sistemas, debe determinar de cuál de los sistemas es solución el par de valores.

   En el caso 1 y 2, es necesario el uso de la sustitución de valor numérico en las ecuaciones.

Posibles dificultades:
Es probable que los estudiantes no hagan la sustitución adecuada o que las operaciones indicadas no sean realizadas utilizando la ley de los signos adecuadamente.

En ambos casos será importante buscar la manera de superarlas, para ello se puede tomar como opción organizar a los estudiantes de tal forma que los más aventajados puedan dar apoyo a los que presenten dificultades.

Fecha:

U2 1.4

Ⓟ a) Representa cada condición con una ecuación.
b) Construye una tabla de valores que cumplen cada ecuación.

Ⓢ x: precio de lb de uvas
y: precio de lb de manzanas
1 lb uvas + 1 lb M: $x + y = 5$
1 lb uvas + 3 lb M: $x + 3y = 11$

x	0	1	**2**	3	4	5
y	5	4	**3**	2	1	0
$x + y$	5	5	**5**	5	5	5
$x + 3y$	15	13	**11**	9	7	5

Ⓡ 1. $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + y = 32 \end{cases}$

c) $x = 14, \quad y = 4$

2. De cuál sistema de ecuaciones es solución, $x = 3$, $y = 1$?

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$

Tarea: página 27 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Sentido del método de reducción

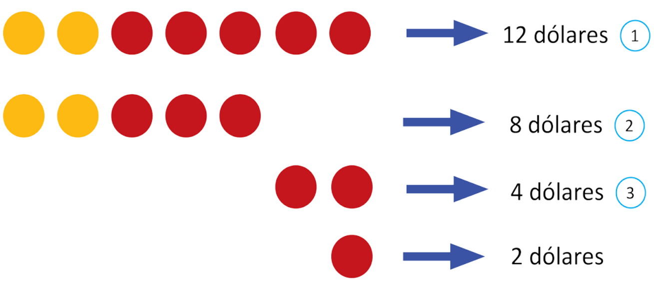
P

En el Mercado Central el precio de 2 piñas y 5 sandías es de 12 dólares y el de 2 piñas y 3 sandías es de 8 dólares, ¿cuál es el precio de 1 piña y de 1 sandía?

S

Si se representa gráficamente:

Precio de 1 piña ●, precio de 1 sandía ●.



El precio de 1 piña es de \$1 y el de la sandía de \$2.

Llamando x dólares al precio de la piña y y dólares al de la sandía, al representar la solución gráfica 1 y 2 se tiene:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 & (1) \\ 2x + 3y = 8 & (2) \end{cases}$$

A partir de estas dos ecuaciones se obtiene: $2y = 4$ (3)

$y = 2$

$2x + 3 \times 2 = 8$, de donde se obtiene $x = 1$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones en el que los coeficientes de una de las incógnitas tienen igual signo e igual valor absoluto:

1. Se encuentra la diferencia restando los miembros izquierdos y derechos de las dos ecuaciones, respectivamente.
2. Se obtiene una nueva ecuación con una incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema.

$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y = 12 \\ (-) & 2x + 3y = 8 \\ \hline & 2y = 4 \\ & y = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x + 3 \times 2 &= 8 \\ 2x + 6 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Al proceso descrito se le llama **reducción**. Por ejemplo, para el sistema resuelto, x tiene coeficientes de igual valor absoluto e igual signo.

$$\begin{cases} \mathbf{2x} + 5y = 12 \\ \mathbf{2x} + 3y = 8 \end{cases}$$

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando reducción por sustracción.

a) $\begin{cases} 2x + 7y = 22 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$ $x = 4,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$ $x = 10,\ y = 5$

c) $\begin{cases} -x + 34y = 0 \\ 2x + 34y = 9 \end{cases}$ $x = 3,\ y = \frac{3}{34}$

Indicador de logro

1.5 Resuelve un sistema de ecuaciones con dos incógnitas en el que una de ellas tiene coeficientes de igual signo e igual valor absoluto, mediante el método de reducción por sustracción.

Secuencia

Anteriormente se trabajó una forma para determinar la solución de un sistema y una manera de verificar si un par de valores son o no solución del sistema. En esta clase se introducirá un método para determinar la solución de un sistema de una manera más práctica.

Se comienza con el uso de recursos gráficos que le permitan asimilar con facilidad los pasos a seguir y de manera simultánea se van concretizando los pasos de manera algebraica para formalizar el método utilizado

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Ilustrar el paso a paso del método de reducción por sustracción para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en los casos en que los coeficientes son iguales.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 2x + 7y = 22 & (1) \\ 2x + 3y = 14 & (2) \end{cases}$

Restando miembro a miembro:

$$\begin{array}{rr} & 2x + 7y = 22 \\ (-) & 2x + 3y = 14 \\ \hline & 4y = 8 \\ & y = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ 2x + 3 \times 2 &= 14 \\ 2x + 6 &= 14 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Fecha:

U2 1.5

Ⓟ El precio de 2 piñas y 5 sandías es \$12.
El de 2 piñas y 3 sandías es \$8.
¿Cuál es el precio de 1 piña y de 1 sandía?

Ⓢ $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

$$\begin{array}{rr} & 2x + 5y = 12 \\ (-) & 2x + 3y = 8 \\ \hline & 2y = 4 \\ & y = 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 \times 2 &= 8 \\ 2x + 6 &= 8 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ⓡ a) $\begin{cases} 2x + 7y = 22 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

$x = 4,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

$x = 10,\ y = 5$

c) $\begin{cases} -x + 34y = 0 \\ 2x + 34y = 9 \end{cases}$

$x = 3,\ y = \frac{3}{34}$

Tarea: página 28 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Método de reducción por adición

P

Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 5y = 25 & (1) \\ 5x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$

Considera los signos de los coeficientes e indica qué operación realizar para aplicar el método de reducción.

Considera el signo y valor absoluto de los coeficientes de la letra y.

S

Al sumar los miembros izquierdo y derecho, respectivamente, de las dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 5y = 25 & \longrightarrow & (1) \\ (+) & 5x + 5y = 15 & \longrightarrow & (2) \\ \hline & 8x \quad\; = 40 & & \\ & x = 5 & & \end{array}$$

Generalmente, en álgebra, se suprime el símbolo × y se expresa la multiplicación con paréntesis; por ejemplo, 5 × 5 = 5(5).

Sustituye $x = 5$ en (2) y encuentra el valor de y,

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= 15 \\ 5(5) + 5y &= 15 \\ 5y &= 15 - 25 \\ 5y &= -10 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, aplicando reducción, es necesario considerar siempre el valor absoluto y el signo de los coeficientes de las incógnitas.

Si los coeficientes de una de ellas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, se suman respectivamente los términos en ambos miembros de las dos ecuaciones.

Por ejemplo, en el sistema resuelto anteriormente, los coeficientes de y tienen igual valor absoluto, pero distinto signo:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 25 \\ 5x + 5y = 15 \end{cases}$$

Tal como se muestra, cuando se resuelve un sistema de ecuaciones aplicando reducción, se obtiene una tercera ecuación con una incógnita:

- Si la ecuación obtenida no contiene a y, se dice **reducir** y.
- Si la ecuación obtenida no contiene a x, se dice **reducir** x.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición.

a) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases}$

$x = 5$, $y = 8$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 5y = -4 \end{cases}$

$x = 7$, $y = 2$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -3x - 4y = -2 \end{cases}$

$x = 2$, $y = -1$

d) $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$

$x = 5$, $y = 6$

Indicador de logro

1.6 Aplica el método de reducción por adición para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, en las que el valor absoluto de los coeficientes de una de ellas es igual, pero con distinto signo.

Secuencia

En la clase anterior se resolvieron ecuaciones en las que únicamente se resta miembro a miembro para reducirlas a una ecuación con una incógnita. En esta clase se resolverán ecuaciones en las que una de las incógnitas tiene igual coeficiente pero con signo distinto, por lo que únicamente será necesario sumar miembro a miembro para reducirlas a una ecuación con una sola incógnita.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un sistema de ecuaciones para modelar el proceso de reducción por adición, haciendo énfasis en la naturaleza del número y signo de los coeficientes.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases}$

Sumando miembro a miembro:

$$\begin{array}{rrl} & 7x - 4y = 3 & \longrightarrow (1) \\ (+) & 2x + 4y = 42 & \longrightarrow (2) \\ \hline & 9x \quad\;\; = 45 & \\ & x = 5 & \end{array}$$

Sustituye $x = 5$ en (2) y calcula el valor de y:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 42 \\ 2(5) + 4y &= 42 \\ 4y &= 42 - 10 \\ 4y &= 32 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 8$.

Fecha:

U2 1.6

Ⓟ Resuelve:

$\begin{cases} 3x - 5y = 25 & (1) \\ 5x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$

Ⓢ

$$\begin{array}{rrl} & 3x - 5y = 25 & \longrightarrow (1) \\ (+) & 5x + 5y = 15 & \longrightarrow (2) \\ \hline & 8x \quad\;\; = 40 & \\ & x = 5 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5x + 5y &= 15 \\ 5(5) + 5y &= 15 \\ 5y &= -10 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Ⓡ

a) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases}$ $x = 5,\ y = 8;$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ -2x + 5y = -4 \end{cases}$ $x = 7,\ y = 2;$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -3x - 4y = -2 \end{cases}$ $x = 2,\ y = -1;$

d) $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$ $x = 5,\ y = 6;$

Tarea: página 29 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Método de reducción por adición o sustracción, parte 1

P

¿Cómo puedes reducir un sistema cuando los valores absolutos de los coeficientes de la incógnita a reducir no son iguales?

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 3y = -4 & (1) \\ 4x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

S

(1) $\times 4 \longrightarrow$ $4x + 12y = -16$

(2) $\longrightarrow$ $(-)\ 4x + 2y = 4$

$$\begin{aligned} 10y &= -20 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo y en (1)

$$\begin{aligned} x + 3y &= -4 \\ x + 3(-2) &= -4 \\ x - 6 &= -4 \\ x &= -4 + 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -2$.

Recuerda la propiedad de las igualdades: cuando multiplicas una ecuación por un número, se multiplica todos los términos de ambos miembros. Por ejemplo, si multiplicas la ecuación $x + 3y = -4$ por 4:

$$4(x + 3y) = 4(-4)$$

C

Para resolver el sistema de ecuaciones donde ninguna de las incógnitas tiene coeficiente con igual valor absoluto, pero al analizar los coeficientes para una de las incógnitas uno es múltiplo del otro, es necesario:

1. Identificar la incógnita que conviene reducir.
2. Multiplicar una ecuación por un número de modo que el valor absoluto del coeficiente sea igual al coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación.
3. Determinar qué operación realizar: suma o resta.
4. Resolver la ecuación reducida.
5. Sustituir el valor encontrado en el numeral 4 en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Para el ejemplo resuelto se eligió reducir x, pues tiene coeficiente 1 en (1).

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición o sustracción.

a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}$ $x = 4, y = 1$

b) $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ $x = -2, y = 3$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 25 \\ 9x + 5y = 64 \end{cases}$ $x = 1, y = 11$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$ $x = -2, y = 1$

Identificar la incógnita en la que se desea reducir, luego pensar un número por el que se debe multiplicar para que sus coeficientes tengan igual valor absoluto.

Indicador de logro

1.7 Utiliza el método de reducción por adición o sustracción para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, donde en una de ellas un coeficiente es múltiplo del otro.

Secuencia

En las dos clases anteriores de esta unidad, se ha aprendido el método de solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; pero en ambos casos se tiene una incógnita cuyos coeficientes tienen igual valor absoluto y que únicamente presentan diferencia en signos, por lo que en un caso se resta y en el otro se realiza una suma para reducir las ecuaciones a una sola con dos incógnitas. Para esta clase se resolverán sistemas en los que es necesario transformar una de las ecuaciones para obtener uno de los dos casos conocidos, para ello se buscará multiplicar cada uno de los términos por un número conveniente.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un sistema de ecuaciones en el que es necesario transformar una de las ecuaciones multiplicando por un número adecuado en ambos miembros para aplicar el método de reducción por adición o sustracción.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 2x + y = 9 & (1) \\ 3x + 5y = 17 & (2) \end{cases}$

(1) × 5

(2) →

$$\begin{array}{rrl} & 10x + 5y &= 45 \\ (-) & 3x + 5y &= 17 \\ \hline & 7x &= 28 \\ & x &= 4 \end{array}$$

Sustituyendo x en (1)

$$2x + y = 9$$
$$2(4) + y = 9$$
$$8 + y = 9 - 8$$
$$y = 1$$

La solución del sistema es:
$x = 4,\ y = 1$

Posibles dificultades:
No haberse fijado bien el proceso de solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita; en ese caso será necesario asignar algunos ejercicios para que los estudiantes practiquen.

Fecha:

U2 1.7

Ⓟ Resuelve $\begin{cases} x + 3y = -4 & (1) \\ 4x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

Ⓢ (1) × 4 →

(2) →

$$\begin{array}{rrl} & 4x + 12y &= -16 \\ (-) & 4x + 2y &= 4 \\ \hline & 10y &= -20 \\ & y &= -2 \end{array}$$

Sustituyendo y en (1)

$$x + 3y = -4$$
$$x + 3(-2) = -4$$
$$x - 6 = -4$$
$$x = -4 + 6$$
$$x = 2$$

Ⓡ a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x + 5y = 17 \end{cases}$ $x = 4,\ y = 1$

b) $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ $x = -2,\ y = 3$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 25 \\ 9x + 5y = 64 \end{cases}$ $x = 1,\ y = 11$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$ $x = -2,\ y = 1$

Tarea: página 30 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Método de reducción por adición o sustracción, parte 2

P

Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 3 & (1) \\ 2x - 3y = 1 & (2) \end{cases}$

¿Qué debes hacer para que los coeficientes de una de las incógnitas tengan igual valor absoluto y aplicar el método de reducción?

S

$$\begin{array}{ll} (1) \times 2 \longrightarrow & 6x - 8y = 6 \\ (2) \times 3 \longrightarrow & (-)\ 6x - 9y = 3 \\ \hline & y = 3 \end{array}$$

Sustituyendo y en (2)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 2x - 3(3) &= 1 \\ 2x - 9 &= 1 \\ 2x &= 1 + 9 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

$$\begin{array}{ll} (1) \times 3 \longrightarrow & 9x - 12y = 9 \\ (2) \times 4 \longrightarrow & (-)\ 8x - 12y = 4 \\ \hline & x \quad = 5 \end{array}$$

Sustituyendo x en (1)

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 3 \\ 3(5) - 4y &= 3 \\ 15 - 4y &= 3 \\ -4y &= 3 - 15 \\ -4y &= -12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

C

Para resolver el sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aplicando reducción, es necesario:

1. Identificar la incógnita que se va a reducir.
2. Multiplicar cada una de las ecuaciones por un número de tal manera que la incógnita que se va a reducir tenga coeficientes de igual valor absoluto.
3. Identificar si se suma o resta para reducir.
4. Resolver la ecuación reducida.
5. Sustituir el valor obtenido en la ecuación reducida, en una de las ecuaciones del sistema.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción por adición o sustracción.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 18 \\ 7x - 5y = 41 \end{cases}$

$x = 8$, $y = 3$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 37 \\ 3x + 5y = 58 \end{cases}$

$x = 11$, $y = 5$

c) $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

$x = 4$, $y = 5$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 6 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 0 \end{cases}$

$x = 6$, $y = \frac{3}{2}$

Para igualar los valores absolutos de los coeficientes primero piensa la incógnita que vas a reducir

Para tener coeficientes del mismo valor absoluto, se puede pensar en el mcm de los coeficientes para que los cálculos sean más sencillos.

Indicador de logro

1.8 Resuelve un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, en las que el valor absoluto de los coeficientes es diferente, mediante el método de reducción.

Secuencia

Anteriormente se resolvieron sistemas de ecuaciones en las que es necesario transformar una de las ecuaciones para poder aplicar el método de reducción por adición o sustracción dependiendo de los signos que acompañan a la variable seleccionada; para esta clase se resolverán sistemas en los que será necesario transformar las dos ecuaciones para poder eliminar una incógnita.

Para transformar las ecuaciones será necesario pensar en multiplicar un número que lleve a una incógnita a coeficientes iguales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un sistema de ecuaciones donde es necesario transformar las dos ecuaciones multiplicando por números adecuados para poder reducirlas a una con una incógnita.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 18 & (1) \\ 7x - 5y = 41 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{lrl} (1) \times 5 & & 15x - 10y = 90 \\ (2) \times 2 & (-) & 14x - 10y = 82 \\ \hline & & x \qquad\quad = 8 \end{array}$$

Sustituyendo x en (1)

$$3(8) - 2y = 18$$
$$-2y = 18 - 24$$
$$y = 3$$

La solución del sistema es: $x = 8$, $y = 3$

Posibles dificultades:
Probablemente no puedan seleccionar adecuadamente el número por el que se deba multiplicar cada una de las ecuaciones para reducir en la variable seleccionada; en ese caso será necesario hacer un recordatorio sobre el mínimo común múltiplo para que se les facilite identificar por cuál número multiplicar y de ser necesario asignar algunos ejercicios para que practiquen.

Fecha:

U2 1.8

Ⓟ Resuelve $\begin{cases} 3x - 4y = 3 & (1) \\ 2x - 3y = 1 & (2) \end{cases}$

Ⓢ

$$\begin{array}{lrl} (1) \times 2 \longrightarrow & & 6x - 8y = 6 \\ (2) \times 3 \longrightarrow & (-) & 6x - 9y = 3 \\ \hline & & y = 3 \end{array}$$

Sustituyendo y en (2)

$$2x - 3(3) = 1$$
$$2x - 9 = 1$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

La solución del sistema es $x = 5$, $y = 3$.

Ⓡ

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 18 \\ 7x - 5y = 41 \end{cases}$ $x = 8, y = 3;$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 37 \\ 3x + 5y = 58 \end{cases}$ $x = 11, y = 5;$

c) $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$ $x = 4, y = 5;$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 6 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 0 \end{cases}$ $x = 6, y = \frac{3}{2};$

Tarea: página 31 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Sentido del método de sustitución

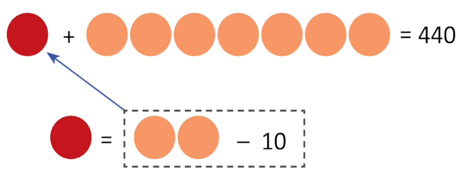
P

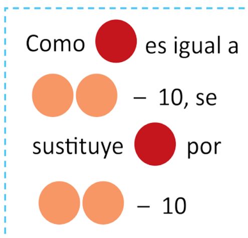
En el Mercado Central el costo de 1 quintal de frijol y 7 quintales de maíz es de 440 dólares y el costo de 1 quintal de frijol es de 10 dólares menos que el de 2 quintales de maíz. ¿Cuál es el precio de un quintal de frijol y de uno de maíz?

S

Si se representa gráficamente:

Precio de un quintal de frijol, precio de un quintal de maíz.





Representando por x el precio del quintal de frijol y por y el de maíz, para satisfacer las dos condiciones se forma el sistema:

$$\begin{cases} x + 7y = 440 & (1) \\ x = 2y - 10 & (2) \end{cases}$$

En la ecuación (2) puede verse que $x = 2y - 10$.

Al sustituir (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} (2y - 10) + 7y &= 440 \\ 2y - 10 + 7y &= 440 \\ 9y &= 440 + 10 \\ 9y &= 450 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor obtenido $y = 50$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} x &= 2(50) - 10 \\ x &= 100 - 10 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

$$x = 2y - 10$$
$$\downarrow$$
$$x + 7y = 440$$
$$\downarrow$$
$$(2y - 10) + 7y = 440$$

C

De las dos ecuaciones del sistema se obtuvo una nueva ecuación con una incógnita, sustituyendo la incógnita x en la ecuación $x + 7y = 440$, y al resolverla se obtiene que el costo del quintal de maíz es de \$50 y el de frijol de \$90.

Tal como se muestra en el ejemplo, el método que reduce en una incógnita al sustituir una de las incógnitas por su expresión equivalente, se llama **sustitución.**

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando sustitución.

a) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x = 9y - 3 \end{cases}$ $x = 6, y = 1$

b) $\begin{cases} 9x - 3y = 12 \\ y = 11 - 2x \end{cases}$ $x = 3, y = 5$

c) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 10 \\ \frac{1}{2}y = 9 - 2x \end{cases}$ $x = \frac{19}{5}, y = \frac{14}{5}$

d) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2y = 7 - x \end{cases}$ $x = 1, y = 3$

Indicador de logro

1.9 Conoce el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Secuencia

En las clases de la 1.5 a la 1.8, se han resuelto sistemas de ecuaciones mediante el método de reducción por adición o sustracción, en cada clase se han analizado diferentes casos con relación a los coeficientes, variando los valores y signos; para esta clase se introducirá otro método de solución de los sistemas de ecuaciones y para facilitar la comprensión se hace uso del recurso gráfico.

Es importante hacer énfasis en las características que tiene el tipo de sistemas que conviene resolver mediante este método.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Introducir el método de sustitución utilizando un ejemplo donde una de las incógnitas está expresada en términos de la otra.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} x - 3y = 3 & (1) \\ x = 9y - 3 & (2) \end{cases}$

Sustituyendo x en (1)

$(9y - 3) - 3y = 3$
$9y - 3 - 3y = 3$
$6y = 3 + 3$
$6y = 6$
$y = 1$

Sustituyendo y en (2)

$x = 9(1) - 3$
$x = 9 - 3$
$x = 6$

Posibles dificultades:
No realizar adecuadamente el despeje de una incógnita o que cuando se sustituya no se realicen adecuadamente las operaciones indicadas.

En ambos casos se sugiere que se haga un recordatorio para que los estudiantes aclaren dudas y de ser posible asignar ejercicios para que cada uno pueda practicar, cuidando los tiempos para no afectar el desarrollo de todos los contenidos propuestos en octavo grado.

Fecha:

U2 1.9

Ⓟ 1 qq de frijol y 7 qq de maíz = \$440
1 qq de frijol = 2 qq de maíz menos \$10
¿Cuál es el precio de un quintal de frijol y el de uno de maíz?

$\begin{cases} x + 7y = 440 & (1) \\ x = 2y - 10 & (2) \end{cases}$

Ⓢ Al sustituir (2) en (1) se obtiene:

$(2y - 10) + 7y = 440$
$9y = 440 + 10$
$y = 50$

Sustituyendo $y = 50$ en la ecuación (2)

$x = 2(50) - 10$
$x = 90$

Ⓡ a) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x = 9y - 3 \end{cases}$ $x = 6, y = 1;$

b) $\begin{cases} 9x - 3y = 12 \\ y = 11 - 2x \end{cases}$ $x = 3, y = 5;$

c) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = 10 \\ \frac{1}{2}y = 9 - 2x \end{cases}$ $x = \frac{19}{5}, y = \frac{14}{5};$

d) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2y = 7 - x \end{cases}$ $x = 1, y = 3;$

Tarea: página 32 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 Método de sustitución

P Aplica el método de sustitución para resolver el siguiente sistema y describe el proceso realizado:

$$\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

S Se tiene el sistema:

$$5x + y = 14 \quad ①$$
$$2x + 3y = 16 \quad ②$$

Despeja la incógnita que tenga coeficiente 1.

Se despeja y en la ecuación ① y se obtiene: $y = 14 - 5x$,
se sustituye y por $14 - 5x$ en la ecuación ②

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 16 \\ 2x + 3(14 - 5x) &= 16 \\ 2x + 42 - 15x &= 16 \\ -13x + 42 &= 16 \\ -13x &= 16 - 42 \\ -13x &= -26 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$5x + y = 14 \;\downarrow\; y = 14 - 5x \;\downarrow\; 2x + 3y = 16 \;\downarrow\; 2x + 3(14 - 5x) = 16$$

Al sustituir $x = 2$ en $y = 14 - 5x$

$$\begin{aligned} y &= 14 - 5x \\ y &= 14 - 5(2) \\ y &= 14 - 10 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 4$.

C Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aplicando sustitución, es necesario considerar:

1. Identificar la incógnita que resulta más fácil despejar.
2. Realizar el despeje.
3. Sustituir la incógnita despejada en el numeral 2 en la otra ecuación.
4. Resolver la ecuación obtenida.

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$ $x = 5,\ y = 9$

b) $\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$ $x = 7,\ y = 6$

Para identificar la incógnita que resulta más fácil despejar se puede ver los coeficientes.

c) $\begin{cases} x = y + 9 \\ 7x - 2y = 57 \end{cases}$ $x = \frac{39}{5},\ y = \frac{-6}{5}$

d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$ $x = -3,\ y = -11$

Indicador de logro

1.10 Resuelve un sistema de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de sustitución.

Secuencia

En la clase anterior se introdujo el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en los casos presentados ya se tenía despejada la variable a sustituir; en esta clase se resolverán sistemas donde para realizar el proceso de sustitución primero será necesario despejar la variable a reducir.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución, despejando la incógnita que tiene coeficiente 1 previamente al proceso de sustitución.

Solución de algunos ítems:

$$\begin{cases} 3x + y = 24 & (1) \\ 7x - 3y = 8 & (2) \end{cases}$$

Se despeja y, y se tiene $y = 24 - 3x$ y se sustituye en la ecuación 2.

a)
$$\begin{aligned} 7x - 3y &= 8 \\ 7x - 3(24 - 3x) &= 8 \\ 7x - 72 + 9x &= 8 \\ 16x &= 80 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 5$ en $y = 24 - 3x$

$$\begin{aligned} y &= 24 - 3x \\ y &= 24 - 3(5) \\ y &= 24 - 15 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

Fecha:

U2 1.10

Ⓟ Resuelve por sustitución:

$$\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

Ⓢ Se despeja y en la ecuación (1) y se obtiene:
$y = 14 - 5x$

Se sustituye y en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 2x + 3(14 - 5x) &= 16 \\ 2x + 42 - 15x &= 16 \\ -13x &= -26 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 2$ en $y = 14 - 5x$

$$\begin{aligned} y &= 14 - 5(2) \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Ⓡ a) $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$ $x = 5, y = 9;$

b) $\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 2y = 40 \end{cases}$ $x = 7, y = 6;$

c) $\begin{cases} x = y + 9 \\ 7x - 2y = 57 \end{cases}$ $x = \frac{39}{5}, \; y = \frac{-6}{5};$

d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$ $x = -3, y = -11;$

Tarea: página 33 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

P

Dado el sistema $\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ 3y = 4x + 2 \end{cases}$

- Indica el método que consideras más adecuado para resolverlo. Justifica tu respuesta.
- Determina la solución.

S

- Aplicando reducción.

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 10x - 3y = 4 \\ (+) & -4x + 3y = 2 \\ \hline & 6x \qquad = 6 \\ & x = 1 \end{array}$$

- En (2) sustituye $x = 1$

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$.

- Aplicando sustitución.

$$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases}$$

- Sustituye $3y$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 10x - 3y &= 4 \\ 10x - (4x + 2) &= 4 \\ 10x - 4x - 2 &= 4 \\ 6x &= 4 + 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Sustituye $x = 1$ en (2)

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ 3y &= 4 + 2 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones, se puede seleccionar un método según los tipos de ecuaciones.

- Cuando las incógnitas tienen coeficientes del mismo valor absoluto o uno de sus coeficientes es múltiplo del otro, es más fácil aplicar el método de **reducción**.
- Cuando una ecuación tiene despejada una incógnita o la incógnita tiene coeficiente 1, es más fácil aplicar **sustitución**.

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método que consideres más adecuado.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2y = 5x - 2 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 4$

b) $\begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ 9x - 8y = -18 \end{cases}$ $x = -2,\ y = 0$

c) $\begin{cases} y = 2x + 11 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases}$ $x = -4,\ y = 3$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ $x = 2,\ y = -3$

2. ¿En qué casos es más útil emplear el método de sustitución? ¿En qué casos es más útil emplear el método de reducción?

Reducción: si una de las incógnitas tiene coeficientes del mismo valor absoluto o uno de sus coeficientes es múltiplo del otro.
Sustitución: si una ecuación tiene despejada una incógnita o la incógnita tiene coeficiente 1.

Indicador de logro

1.11 Resuelve un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, aplicando el método más adecuado.

Secuencia

Anteriormente se resolvieron sistemas de ecuaciones donde era necesario despejar una variable para sustituir en la otra ecuación. Para esta clase se resolverán sistemas de ecuaciones donde se utiliza el método de sustitución; pero sin despejar la variable, este puede utilizarse para simplificar el proceso de solución. Es importante aclarar que se puede utilizar el proceso completo, en el caso de que no se retome el proceso sugerido.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un sistema de ecuaciones mediante el uso de dos métodos, reducción y sustitución.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 & (1) \\ 2y = 5x - 2 & (2) \end{cases}$

Se sustituye $2y = 5x - 2$, en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 14 \\ 3x + (5x - 2) &= 14 \\ 8x - 2 &= 14 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 2$ en $2y = 5x - 2$

$$\begin{aligned} 2y &= 5x - 2 \\ 2y &= 5(2) - 2 \\ 2y &= 10 - 2 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Posibles dificultades:
Puede que el estudiante no identifique el método más adecuado para resolver un sistema, en ese caso es importante enfatizar en que se debe utilizar el método que simplifique el proceso de solución, aunque se debe dar por aceptada la solución en caso de que se aplique correctamente el método seleccionado.

Fecha: U2 1.11

Ⓟ Resuelve $\begin{cases} 10x - 3y = 4 \\ 3y = 4x + 2 \end{cases}$

Ⓢ Aplicando reducción.

$\begin{cases} 10x - 3y = 4 & (1) \\ 3y = 4x + 2 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{lrl} & 10x - 3y &= 4 \\ (+) & -4x + 3y &= 2 \\ \hline & 6x & = 6 \\ & x &= 1 \end{array}$$

Sustituyendo $x = 1$, en (2)

$$\begin{aligned} 3y &= 4(1) + 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ⓡ a) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2y = 5x - 2 \end{cases}$ $x = 2, y = 4;$

b) $\begin{cases} -3x + 4y = 6 \\ 9x - 8y = -18 \end{cases}$ $x = -2, y = 0;$

c) $\begin{cases} y = 2x + 11 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases}$ $x = -4, y = 3;$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ $x = 2, y = -3;$

Tarea: página 34 del Cuaderno de Ejercicios.

1.12 Sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales

P

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 0.4x + 1.7y = 5.8 & ① \\ 0.1x + 0.3y = 1.2 & ② \end{cases}$$

Convierte los coeficientes en números enteros y aplica uno de los métodos estudiados.

S

1. Se convierten en ecuaciones con coeficientes enteros:

$$① \times 10 \longrightarrow 4x + 17y = 58$$
$$② \times 10 \longrightarrow x + 3y = 12$$

2. Se despeja x en ②

$$x + 3y = 12$$
$$x = 12 - 3y \quad ③$$

3. Se sustituye x en la ecuación ①

$$\begin{aligned} 4x + 17y &= 58 \\ 4(12 - 3y) + 17y &= 58 \\ 48 - 12y + 17y &= 58 \\ 5y &= 58 - 48 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

4. Se sustituye $y = 2$ en ③

$$x = 12 - 3(2)$$
$$x = 6$$

La solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$.

Cuando se multiplica un número decimal por 10, 100 o 1 000, es equivalente a mover el punto decimal a la derecha tantas unidades como ceros acompañan a la unidad.

$0.123 \times 10 = 1.23$	$0.2 \times 10 = 2$
$0.123 \times 100 = 12.3$	$0.2 \times 100 = 20$
$0.123 \times 1\,000 = 123$	$0.2 \times 1\,000 = 200$

Recuerda multiplicar todos los términos de ambos miembros de la ecuación.

C

Tal como se muestra en el ejemplo desarrollado, para resolver el sistema de ecuaciones cuyos coeficientes son decimales, se multiplica cada ecuación por un número tal que los coeficientes se conviertan en números enteros, luego se aplica el método que se considere más adecuado.

Resuelve el sistema aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 0.2x + 0.4y = 3 \\ 5x + y = 21 \end{cases}$

$x = 3$, $y = 6$

b) $\begin{cases} 0.15x + 0.08y = 1 \\ 0.5x + 0.3y = 3.5 \end{cases}$

$x = 4$, $y = 5$

c) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 0.1 \\ x + 0.5y = 3.5 \end{cases}$

$x = 5$, $y = -3$

d) $\begin{cases} 0.8x + 2y = 0.9 \\ 0.4x - 3y = -0.55 \end{cases}$

$x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$

¿Por cuánto se debe multiplicar cada ecuación para convertir los coeficientes en números enteros?

Aunque no se conviertan en enteros los coeficientes se puede resolver el sistema, pero el cálculo será más complejo.

Intenta resolver los sistemas sin convertir los coeficiente a números enteros, luego compara tus resultados.

Indicador de logro

1.12 Determina la solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas cuyos coeficientes son decimales, utilizando el método más adecuado.

Secuencia

En clases anteriores se estudiaron dos métodos de solución de sistemas de ecuaciones considerando variantes en los coeficientes y sus respectivos signos; para esta clase se resolverán sistemas de ecuaciones que pueden ser resueltos por cualquiera de los métodos estudiados; la variante a considerar es el uso del coeficiente decimal.

Es importante enfatizar en que se pueden convertir los coeficientes a números enteros o trabajarlos directamente con coeficientes decimales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas donde los coeficientes son números decimales; convirtiéndolos a números naturales y multiplicando por potencias de 10.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 0.2x + 0.4y = 3 & (1) \\ 5x + y = 21 & (2) \end{cases}$

Se sustituye $y = 21 - 5x$, en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} 0.2x + 0.4y &= 3 \\ 0.2x + 0.4(21 - 5x) &= 3 \\ 0.2x + 8.4 - 2x &= 3 \\ -1.8x &= -5.4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 3$ en $y = 21 - 5x$

$$\begin{aligned} y &= 21 - 5x \\ y &= 21 - 5(3) \\ y &= 21 - 15 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Este sistema se ha resuelto directamente con los coeficientes decimales, para modelar la información adicional del Libro de Texto.

Fecha: **U2 1.12**

Ⓟ Resuelve $\begin{cases} 0.4x + 1.7y = 5.8 & (1) \\ 0.1x + 0.3y = 1.2 & (2) \end{cases}$

Ⓢ (1) $\times 10 \longrightarrow 4x + 17y = 58$

(2) $\times 10 \longrightarrow x + 3y = 12$

Se despeja x en (2)

$x + 3y = 12$

$x = 12 - 3y$ (3)

Se sustituye x en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 4(12 - 3y) + 17y &= 58 \\ 48 - 12y + 17y &= 58 \\ 5y &= 58 - 48 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Se sustituye $y = 2$ en (3)

$x = 12 - 3(2)$

$x = 6$

La solución del sistema es $x = 6$, $y = 2$

Ⓡ a) $\begin{cases} 0.2x + 0.4y = 3 \\ 5x + y = 21 \end{cases}$

$x = 3$, $y = 6$

b) $\begin{cases} 0.15x + 0.08y = 1 \\ 0.5x + 0.3y = 3.5 \end{cases}$

$x = 4$, $y = 5$

Tarea: página 35 del Cuaderno de Ejercicios.

1.13 Sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios

P

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & (1) \\ \frac{7}{9}x + y = 15 & (2) \end{cases}$$

Convierte los coeficientes en números enteros y luego aplica uno de los métodos estudiados: reducción o sustitución.

S

1. Se convierten en ecuaciones con coeficientes enteros:

$$(1) \times 12 \longrightarrow 8x + 9y = 144$$
$$(2) \times 9 \longrightarrow 7x + 9y = 135$$

2. Se reduce en y, restando (2) de (1)

$$\begin{array}{lrl} (1) \longrightarrow & & 8x + 9y = 144 \\ (2) \longrightarrow & (-) & 7x + 9y = 135 \\ \hline & & x \quad\quad = 9 \end{array}$$

Se debe aplicar las propiedades de las igualdades estudiadas en séptimo grado.

No olvidar multiplicar todos los términos de ambos miembros de las ecuaciones.

3. Se sustituye $x = 9$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 8(9) + 9y &= 144 \\ 9y &= 144 - 72 \\ 9y &= 72 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 9$, $y = 8$.

C

Tal como se muestra en el ejemplo desarrollado, para resolver el sistema de ecuaciones cuyo coeficiente es un número fraccionario, se multiplica cada ecuación por un número tal que los coeficientes fraccionarios se conviertan en números enteros, luego se aplica el método de solución que se considere más adecuado.

Aunque no se conviertan en enteros los coeficientes se puede resolver el sistema, pero el cálculo será más complejo.

Intenta resolver los sistemas sin convertir los coeficiente a números enteros, luego compara tus resultados.

Resuelve los sistemas aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ 3x + 5y = 63 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 9$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 4$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -4 \\ x + \frac{1}{3}y = 7 \end{cases}$

$x = 4,\ y = 9$

d) $\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{2}{5}y = -2 \\ \frac{1}{3}x + y = 4 \end{cases}$

$x = -3,\ y = 5$

Para saber por cuál número multiplicar, considera el mcm de los denominadores.

Indicador de logro

1.13 Utiliza el método más adecuado para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, cuyos coeficientes son fraccionarios.

Secuencia

En la clase anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones con coeficientes decimales utilizando cualquiera de los métodos estudiados; ahora se considerará el uso de coeficientes fraccionarios. Es importante hacer énfasis en que se pueden convertir los coeficientes a números enteros o trabajarlos directamente con coeficientes fraccionarios, tal como se trabajó con los coeficientes decimales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios utilizando como estrategia convertirlos a enteros.

Solución de algunos ítems:

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -4 & (1) \\ x + \frac{1}{3}y = 7 & (2) \end{cases}$

Se sustituye $\frac{1}{3}y = 7 - x$, en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{2}{3}y &= -4 \\ \tfrac{1}{2}x - 2(7 - x) &= -4 \\ \tfrac{1}{2}x - 14 + 2x &= -4 \\ \tfrac{5}{2}x - 14 &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Al sustituir $x = 4$ en $\frac{1}{3}y = 7 - x$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}y &= 7 - 4 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

Posibles dificultades:
El estudiante podría tener dificultades para convertir números fraccionarios a decimales o para operar con números fraccionarios; en ambos casos será necesario mostrar un ejemplo del proceso a seguir, para aclarar dudas.

Fecha: **U2 1.13**

Ⓟ Resuelve $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 & (1) \\ \frac{7}{9}x + y = 15 & (2) \end{cases}$

Ⓢ Se convierten en enteros los coeficientes:

$(1) \times 12 \longrightarrow 8x + 9y = 144$

$(2) \times 9 \longrightarrow 7x + 9y = 135$

Se reduce en y, restando (2) de (1).

$$\begin{array}{lr} (1) \longrightarrow & 8x + 9y = 144 \\ (2) \longrightarrow & (-)\ 7x + 9y = 135 \\ \hline & x \qquad = 9 \end{array}$$

Se sustituye $x = 9$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 8(9) + 9y &= 144 \\ 9y &= 72 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 9$, $y = 8$

Ⓡ a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \\ 3x + 5y = 63 \end{cases}$ $x = 6, y = 9$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ $x = 6, y = 4$

Tarea: página 36 del Cuaderno de Ejercicios.

1.14 Sistemas de ecuaciones que contienen signos de agrupación

P

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 8x - 3(x - y) = 50 & (1) \\ 3(x + y) - (6y - 5x) = 41 & (2) \end{cases}$$

Suprimir los signos de agrupación para obtener un sistema equivalente y luego aplicar uno de los métodos estudiados: reducción o sustitución.

S

1. Realiza las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned} &(1) \longrightarrow 8x - 3x + 3y = 50 \longrightarrow 5x + 3y = 50 \\ &(2) \longrightarrow 3x + 3y - 6y + 5x = 41 \longrightarrow 8x - 3y = 41 \end{aligned}$$

2. Reduce en y, sumando (1) y (2)

$$\begin{aligned} (1) &\longrightarrow & 5x + 3y &= 50 \\ (2) &\longrightarrow & (+)\ 8x - 3y &= 41 \\ \hline & & 13x \quad &= 91 \\ & & x &= 7 \end{aligned}$$

En séptimo grado se aprendió a suprimir los signos de agrupación efectuando las operaciones indicadas y aplicando la ley de los signos.

3. Sustituye x en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 50 \\ 5(7) + 3y &= 50 \\ 3y &= 50 - 35 \\ 3y &= 15 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 7$, $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que tiene signos de agrupación, como el que se muestra en el ejemplo, es necesario:

- Suprimir los signos de agrupación y efectuar las operaciones indicadas.
- Resolver el sistema aplicando el método que se considere más adecuado.

Resuelve el sistema aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 4(y - x) + y = -27 \end{cases}$ $x = 3, y = -3$

b) $\begin{cases} 2(x - y) + 34 = 0 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$ $x = -\frac{23}{2}, y = \frac{11}{2}$

c) $\begin{cases} 2x + 5(2x + y) = 19 \\ 5(6x + y) - 10 = 45 \end{cases}$ $x = 2, y = -1$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}(4x - 4) + \frac{3}{2}y = 2 \\ 3(2x + 34) - 5y = -4 \end{cases}$ $x = -\frac{139}{19}, y = \frac{236}{19}$

Indicador de logro

1.14 Determina la solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que comprende operaciones indicadas con signos de agrupación.

Secuencia

Anteriormente se resolvieron sistemas de ecuaciones con coeficientes fraccionarios utilizando los métodos estudiados, para esta clase se considerará el uso de signos de agrupación; es importante hacer énfasis en que para resolverlos es necesario primero realizar las operaciones indicadas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas que contienen operaciones indicadas, utilizando cualquier método.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 21 & (1) \\ 4(y - x) + y = -27 & (2) \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ -4x + 5y = -27 \end{cases}$

Reduce en x, sumando 1 y 2.

$$\begin{array}{rr} & 4x - 3y = 21 \\ (+) & -4x + 5y = -27 \\ \hline & 2y = -6 \\ & y = -3 \end{array}$$

Al sustituir $y = -3$ en $4x - 3y = 21$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 21 \\ 4x - 3(-3) &= 21 \\ 4x + 9 &= 21 \\ 4x &= 21 - 9 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Posibles dificultades:
Los estudiantes pueden tener dificultades con la ley de los signos al realizar las operaciones indicadas, en ese caso, se puede hacer referencia a las clases sobre multiplicación de un polinomio por un número, desarrolladas en la Unidad 1 de octavo grado.

Fecha:

U2 1.14

Ⓟ Resuelve

$\begin{cases} 8x - 3(x - y) = 50 & (1) \\ 3(x + y) - (6y - 5x) = 41 & (2) \end{cases}$

Ⓢ 1 $\longrightarrow$ $5x + 3y = 50$

2 $\longrightarrow$ $8x - 3y = 41$

Reduce en y, sumando 1 y 2

$$\begin{array}{lrr} (1) \longrightarrow & & 5x + 3y = 50 \\ (2) \longrightarrow & (+) & 8x - 3y = 41 \\ \hline & & 13x \quad = 91 \\ & & x = 7 \end{array}$$

Sustituye $x = 7$ en 1

$$\begin{aligned} 5(7) + 3y &= 50 \\ 3y &= 50 - 35 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 7$, $y = 5$

Ⓡ a) $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 4(y - x) + y = -27 \end{cases}$

$x = 3, \; y = -3$

b) $\begin{cases} 2(x - y) + 34 = 0 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

$x = -\frac{23}{2}, y = \frac{11}{2}$

Tarea: página 37 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.15 Sistemas de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

P

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.8x + 1.3y - 14.5 = 0 & (1) \\ 0.4x - 0.3y - 2.5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Transformar cada una de las ecuaciones del sistema a la forma $ax + by = -c$, dejando los dos términos con incógnitas a un solo miembro de la igualdad.

S

1. Transpone el término independiente c para llevar a la forma $ax + by = -c$.

$$(1) \longrightarrow 0.8x + 1.3y = 14.5$$
$$(2) \longrightarrow 0.4x - 0.3y = 2.5$$

2. Multiplica por 10 para convertir los coeficientes a números enteros.

$$\times 10 \longrightarrow 8x + 13y = 145$$
$$\times 10 \longrightarrow 4x - 3y = 25$$

3. Reduce x, restando 2 veces (2) de (1)

$$\begin{array}{lrl} (1) \longrightarrow & & 8x + 13y = 145 \\ (2) \times 2 \longrightarrow & (-) & \underline{8x - 6y = 50} \\ & & 19y = 95 \\ & & y = 5 \end{array}$$

4. Sustituye $y = 5$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 25 \\ 4x - 3(5) &= 25 \\ 4x - 15 &= 25 \\ 4x &= 25 + 15 \\ 4x &= 40 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 10$, $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de la forma $ax + by + c = 0$, como el que se muestra en el ejemplo, se debe:

- Llevar las ecuaciones a la forma $ax + by = -c$, efectuando la transposición de términos.
- Resolver el sistema aplicando el método que se considere más adecuado.

Resuelve los sistemas aplicando el método más adecuado.

a) $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

$x = 2$, $y = -1$

b) $\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 15y = 4x + 3 \end{cases}$

$x = 3$, $y = 1$

Intenta también resolver los sistemas sin llevar a la forma $ax + by = -c$.

Indicador de logro

1.15 Resuelve un sistema de ecuaciones con dos incógnitas cuya forma es $ax + by + c = 0$.

Secuencia

En la clase anterior se resolvieron sistemas de ecuaciones que contienen operaciones indicadas, estos pueden solucionarse mediante el método que se considere más adecuado; para esta clase se resolverán sistemas de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$, donde será necesario realizar primero una transposición de términos para llevarlos a la forma que se ha venido trabajando, igualando a un número distinto de cero, $ax + by = -c$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Practicar el proceso de solución de sistemas de ecuaciones donde se realiza previamente una transposición de términos.

Solución de algunos ítems:

a) $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 & (1) \\ 3x - 2y - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

Reduce en x, sumando (1) y (2).

$$\begin{array}{lrr} (1) \times 3 \longrightarrow & & 6x + 15y = -3 \\ (2) \times 2 \longrightarrow & (-) & 6x - 4y = 16 \\ \hline & & 19y = -19 \\ & & y = -1 \end{array}$$

Al sustituir $y = -1$ en $3x - 2y = 8$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 3x - 2(-1) &= 8 \\ 3x + 2 &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Posibles dificultades:
Es probable que los estudiantes tengan dificultades para realizar la transposición de términos, en este caso indicar que se revise la lección 2 de la Unidad 5 de séptimo grado.

Fecha:

U2 1.15

Ⓟ Resuelve $\begin{cases} 0.8x + 1.3y - 14.5 = 0 & (1) \\ 0.4x - 0.3y - 2.5 = 0 & (2) \end{cases}$

Ⓢ
$(1) \longrightarrow 0.8x + 1.3y = 14.5$
$(2) \longrightarrow 0.4x - 0.3y = 2.5$
$\times 10 \longrightarrow 8x + 13y = 145$
$\times 10 \longrightarrow 4x - 3y = 25$

Reduce x, restando 2 veces (2) de (1)

$$\begin{array}{lrr} (1) \longrightarrow & & 8x + 13y = 145 \\ (2) \times 2 \longrightarrow & (-) & 8x - 6y = 50 \\ \hline & & 19y = 95 \\ & & y = 5 \end{array}$$

4. Sustituye $y = 5$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} 4x - 3(5) &= 25 \\ 4x - 15 &= 25 \\ 4x &= 25 + 15 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Ⓡ a) $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$ $\quad x = 2, y = -1$

b) $\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 15y = 4x + 3 \end{cases}$ $\quad x = 3, y = 1$

Tarea: página 38 del Cuaderno de Ejercicios.

1.16 Practica lo aprendido

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

   $x = 1,\ y = 1$

2. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = -16 \end{cases}$

   $x = -2,\ y = 3$

3. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 6x - 5y = -11 \end{cases}$

   $x = -1,\ y = 1$

4. $\begin{cases} x + y = 16 \\ 5x - 3y = 32 \end{cases}$

   $x = 10,\ y = 6$

5. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0.8x - 0.5y = -2 \end{cases}$

   $x = 10,\ y = 20$

6. $\begin{cases} 0.8x - 0.2y = 7 \\ 0.4x + 2y = 14 \end{cases}$

   $x = 10,\ y = 5$

1.17 Practica lo aprendido

Resuelve los sistemas de ecuaciones aplicando el método más adecuado.

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

   $x = 9,\ y = 1$

2. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -4 \end{cases}$

   $x = 3,\ y = 10$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{x-5}{4} = x + 2y \end{cases}$

   $x = 1,\ y = -1$

4. $\begin{cases} x - 2(x + y) = 3y - 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

   $x = 12,\ y = -2$

5. $\begin{cases} 6x - 5y - 7 = 0 \\ -13x + 30y - 4 = 0 \end{cases}$

   $x = 2,\ y = 1$

6. $\begin{cases} 0.2x + 0.3y + 0.2 = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$

   $x = 5,\ y = -4$

Indicador de logro

1.16 y 1.17 Resuelve problemas correspondientes a sistemas de ecuaciones.

Solución de algunos ítems:

Clase 1.16:

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Reduce en y, sumando 1 y 2

$$\text{①} \longrightarrow x + 3y = 4$$
$$\text{②} \times 3 \longrightarrow 6x - 3y = 3$$

$$\begin{array}{rr} & x + 3y = 4 \\ (+) & 6x - 3y = 3 \\ \hline & 7x = 7 \\ & x = 1 \end{array}$$

Al sustituir $x = 1$ en $x + 3y = 4$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 1 + 3y &= 4 \\ 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

clase 1.17:

1. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

Reduce en y, sumando 1 y 2

$$\text{①} \times 2 \longrightarrow x - y = 8$$
$$\text{②} \longrightarrow x + y = 10$$

$$\begin{array}{rr} & x - y = 8 \\ (+) & x + y = 10 \\ \hline & 2x = 18 \\ & x = 9 \end{array}$$

Al sustituir $x = 9$ en $x + y = 10$

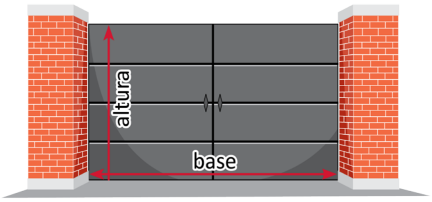
$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ 9 + y &= 10 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Tarea: páginas 39 y 40 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Aplicación de sistemas de ecuaciones en geometría

P

Encuentra las dimensiones de un portón, sabiendo que el perímetro mide 16 metros y la base mide 2 metros más que la altura.



S

1. Identifica las cantidades conocidas y las desconocidas, y define las incógnitas; sea x la base y y la altura.
   "El perímetro mide 16 m" → $2x + 2y = 16$
   "La base excede en 2 m a la altura" → $y = x - 2$

2. Encuentra las igualdades y escribe el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 16 & ① \\ y = x - 2 & ② \end{cases}$

Escribir una ecuación para cada una de las condiciones que plantea el problema.

El perímetro es:
2(base) + 2(altura) = 16
$2x + 2y = 16$

3. Resuelve el sistema aplicando sustitución.

$$\begin{aligned} 2x + 2(x - 2) &= 16 \\ 2x + 2x - 4 &= 16 \\ 4x - 4 &= 16 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- Sustituye el valor $x = 5$ en ②
  $y = 5 - 2$
  $y = 3$

La base es 5 m y la altura 3 m.

4. Verifica si la solución es pertinente a la situación.
   Los valores son positivos, por tanto son pertinentes para las dimensiones del portón.

C

Para resolver problemas mediante el uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es necesario:

1. Definir las cantidades que se representan con las incógnitas.
2. Escribir las ecuaciones que corresponden a las condiciones del problema para plantear el sistema.
3. Resolver el sistema de ecuaciones.
4. Verificar si la solución es pertinente a la situación.

1. Don Carlos heredó una parcela de forma rectangular, en la cual el largo más el ancho mide 30 metros y la diferencia entre el largo y el ancho es de 6 metros. ¿Cuánto mide de largo y de ancho la parcela?
   Largo 18 y ancho 12
2. La base de un rectángulo mide 20 cm más que su altura. Si el perímetro mide 172 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo? Base 53 y altura 33

38

Indicador de logro

2.1 Utiliza los sistemas de ecuaciones para resolver problemas sobre geometría.

Secuencia

Con esta clase se da inicio al estudio de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para resolver situaciones del entorno, en este momento, se espera que ya todos los estudiantes resuelvan sin dificultad cualquier sistema de ecuaciones lineales. Es importante hacer énfasis en la importancia del uso que se les da en diferentes contextos.

En este momento además de saber resolver un sistema es necesario que el estudiante pueda expresar situaciones en lenguaje algebraico.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver una situación del área de geometría mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Siempre es necesario indicar qué representa cada una de las incógnitas.

Solución de algunos ítems:

2. x: base del rectángulo
   y: altura del rectángulo

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 172 & (1) \\ y = x - 20 & (2) \end{cases}$

Resolviendo por sustitución:

$$\begin{aligned} 2x + 2(x - 20) &= 172 \\ 4x - 40 &= 172 \\ 4x &= 212 \\ x &= 53 \end{aligned}$$

Sustituye el valor $x = 53$ en $y = x - 20$

$$\begin{aligned} y &= 53 - 20 \\ y &= 33 \end{aligned}$$

La base es 53 m y la altura 33 m.

Posibles dificultades:
Es posible que el estudiante no pueda modelar las situaciones planteadas, en ese caso es importante que se recuerden las fórmulas a utilizar, haciendo énfasis en la traducción del lenguaje coloquial al algebraico.

Fecha: U2 2.1

Ⓟ Encuentra la $\longrightarrow$ base y altura de un portón si
perímetro = 16 metros
base = 2 metros más que la altura.

Ⓢ x: base del portón
y: altura del portón

Representando las condiciones:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 16 & (1) \\ y &= x - 2 & (2) \end{aligned}$$

Resolviendo por sustitución:

$$\begin{aligned} 2x + 2(x - 2) &= 16 \\ 4x - 4 &= 16 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Sustituye el valor $x = 5$ en (2)

$$\begin{aligned} y &= 5 - 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

La base es 5 m y la altura 3 m.

x: largo de la parcela
y: ancho de la parcela

Ⓡ 2. $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 6 \end{cases}$ $x = 18,\ y = 12$

x: base del rectángulo
y: altura del rectángulo

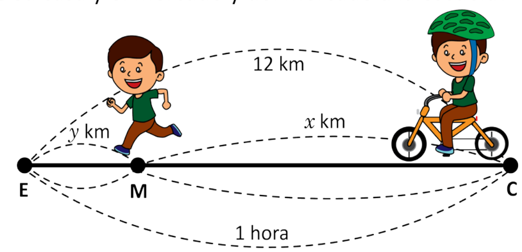
1. $\begin{cases} 2x + 2y = 172 \\ y = x - 20 \end{cases}$ $x = 53,\ y = 33$

Tarea: página 41 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Aplicación de sistemas de ecuaciones en ciencias naturales

Antonio, para ir a la escuela que dista 12 km de su casa, viaja en bicicleta a una velocidad de 20 km por hora, desde su casa hasta el mercado y de ahí hasta la escuela corre a 4 km por hora. El recorrido tarda en total 1 hora. ¿Cuál es la distancia que hay entre su casa y el mercado y del mercado a la escuela?

a) Elabora la tabla que representa la relación entre distancias y tiempos.
b) Escribe un sistema de ecuaciones que represente la información, luego resuélvelo.



a)

	Desde la casa (C) al mercado (M)	Desde el mercado (M) a la escuela (E)	Total
Distancia	x km	y km	12 km
Velocidad	20 km por hora	4 km por hora	--------
Tiempo	$\frac{x}{20}$ hora	$\frac{y}{4}$ hora	1 hora

Velocidad = $\frac{\textit{distancia}}{\textit{tiempo}}$

Tiempo = $\frac{\textit{distancia}}{\textit{velocidad}}$

b) Se plantea el sistema con las condiciones dadas: $\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

Se resuelve aplicando reducción:

$$\begin{array}{lcr} (1) & \longrightarrow & x + y = 12 \\ (2)\ \times 20 & \longrightarrow & (-)\ \ x + 5y = 20 \\ \hline & & -4y = -8 \\ & & y = 2 \end{array}$$

- Sustituyendo $y = 2$ en (1)

$x + 2 = 12$

$x = 10$

Los valores $x = 10$ km, $y = 2$ km satisfacen las dos condiciones del problema; por tanto desde la casa al mercado hay 10 km y del mercado a la escuela hay 2 km.

Para resolver situaciones de las ciencias naturales, es importante que se identifique e indique las magnitudes que serán representadas por las incógnitas x y y; luego plantear el sistema y resolverlo.

1. Carlos viajó a la playa el fin de semana en su vehículo; desde su casa a la playa hay 50 km, desde su casa hasta la gasolinera llevaba una velocidad de 30 km por hora, y de ahí hasta la playa condujo a 15 km por hora. El recorrido tarda en total 2 horas. ¿Cuál es la distancia que hay entre su casa y la gasolinera y de la gasolinera a la playa?
De la casa a la gasolinera 40 km y de la gasolinera a la calle 10 km.
2. Un bote que navega en aguas tranquilas, alcanza una velocidad de 25 km por hora y con el viento a su favor 30 km por hora. Para ir desde el muelle hasta el punto de pesca tardó 3 horas y media. ¿Cuánto tiempo navegó en aguas tranquilas y cuánto tiempo con el viento a su favor, considerando que entre los dos lugares hay 92 kilómetros?
En aguas tranquilas 2.6 horas y con el viento a favor 0.9 horas.

Indicador de logro

2.2 Utiliza los sistemas de ecuaciones para resolver problemas de las ciencias naturales.

Secuencia

Con esta clase se busca modelar situaciones del área de las ciencias naturales para resolverlas mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En este momento además de saber resolver un sistema, es necesario que el estudiante pueda expresar situaciones en lenguaje algebraico, así como el conocimiento de algunas fórmulas de uso en el estudio de las ciencias.

Solución de algunos ítems:

1.

	casa a la gasol.	gasol. a la playa	Total
Distancia	x km	y km	50 km
Velocidad	30 km/h	15 km/h	
Tiempo	$\frac{x}{30}$ h	$\frac{y}{15}$ h	2 h

$$\begin{cases} x + y = 50 & (1) \\ \frac{x}{30} + \frac{y}{15} = 2 & (2) \end{cases}$$

Se resuelve aplicando reducción:

$$\begin{array}{lr} (1) \longrightarrow & x + y = 50 \\ (2) \times 30 \longrightarrow & (-)\ \ x + 2y = 60 \\ \hline & -y = -10 \\ & y = 10 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 10$ en (1)

$$x + 10 = 50$$
$$x = 40$$

Los valores $x = 40$ km, $y = 10$ km satisfacen las dos condiciones del problema; por tanto, desde la casa a la gasolinera hay 40 km y de la gasolinera a la playa hay 10 km.

Posibles dificultades:
Es probable que el estudiante no conozca todavía algunos conceptos y fórmulas necesarias para modelar cada una de las situaciones planteadas. En ambos casos será necesario dar la información y orientaciones necesarias a manera de pistas para facilitar la solución de los problemas planteados.

Fecha:

U2 2.2

P a) Completa la tabla
b) Escribe un sistema de ecuaciones que represente la información, luego resuélvelo.

S

	casa al merc.	merc. a la esc.	Total
Distancia	x km	y km	12 km
Velocidad	20 km/h	4 km/h	
Tiempo	$\frac{x}{20}$ h	$\frac{y}{4}$ h	1 h

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{20} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

Se resuelve aplicando reducción:

$$\begin{array}{lr} (1) \longrightarrow & x + y = 12 \\ (2) \times 20 \longrightarrow & (-)\ \ x + 5y = 20 \\ \hline & -4y = -8 \\ & y = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en (1)

$$x + 2 = 12$$
$$x = 10$$

R $\begin{cases} x + y = 50 \\ \frac{x}{30} + \frac{y}{15} = 2 \end{cases}$ $x = 40,\ y = 10$

Tarea: página 42 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 1

P

Ana compró su vestido con un descuento del 15%, su hermana Beatriz compró otro vestido 25 dólares más caro que el de Ana, pero consiguió un descuento del 20%, y al final solamente pagó 8 dólares más que Ana. ¿Cuál era el precio de cada vestido sin el descuento?

a) Elabora la tabla que representa la relación entre los precios.
b) Escribe el sistema de ecuaciones que represente las condiciones del problema y resuélvelo.

S

1.

	Vestido de Ana	Vestido de Beatriz	Comparación de precios
Precio original	x dólares	y dólares	$y = x + 25$
Descuento	15% de x	20% de y	--------
Precio con descuento	$0.85x$ dólares	$0.8y$ dólares	$0.8y = 0.85x + 8$ dólares

2. Se plantea el sistema con las condiciones del problema: $\begin{cases} y = x + 25 & (1) \\ 0.8y = 0.85x + 8 & (2) \end{cases}$

- Se convierten en enteros los coeficientes de la ecuación (2)
  $80y = 85x + 800$

3. Aplicando el método de sustitución:

$$80(x + 25) = 85x + 800$$
$$80x + 2\,000 = 85x + 800$$
$$80x - 85x = 800 - 2\,000$$
$$x = 240$$

- Sustituyendo $x = 240$ en la ecuación (1)

$$y = 240 + 25$$
$$y = 265$$

4.

	Precio sin descuento	Descuento	Precio con descuento
Ana	\$240.00	\$36.00	\$204.00
Beatriz	\$265.00	\$53.00	\$212.00

Por tanto, Ana pagó \$204.00 por el vestido y Beatriz \$212.00.

C

Para resolver situaciones sobre tanto por ciento mediante el uso de sistemas de ecuaciones, es importante indicar los datos que serán representados por las magnitudes x y y; luego plantear el sistema y resolverlo.

1. María ha comprado un pantalón y una blusa. Los precios de estas prendas suman \$70.00, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en la blusa, pagando en total \$59.00, ¿cuál es el precio sin descuento de cada prenda? Blusa \$40.00 y pantalón \$30.00.

2. Un comerciante compra dos objetos por \$200.00 y los vende por un total de \$233.00. Si en la venta de uno de los objetos gana el 25% y en el otro pierde el 20%, ¿cuánto pagó por cada uno de los objetos? Uno de los objetos \$162.2 y el otro \$37.8.

Indicador de logro

2.3 Resuelve situaciones sobre porcentajes mediante el uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Secuencia

Para esta clase se resolverán situaciones que corresponden al área de aritmética mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Es importante que el estudiante domine la regla de tres y los porcentajes; así como las operaciones con decimales.

Solución de algunos ítems:

1.

	Blusa	Pantalón	Comparación
Precio original	x dólares	y dólares	$x + y = 70$
Descuento	20 % de x	10 % de y	
Precio con descuento	$0.80x$	$0.90y$	$0.8x + 0.9y = 59$

$$\begin{cases} x + y = 70 & (1) \\ 0.8x + 0.9y = 59 & (2) \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción:

$$\begin{array}{rr} & 0.8x + 0.8y = 56 \\ (-) & 0.8x + 0.9y = 59 \\ \hline & -0.1y = -3 \\ & y = 30 \end{array}$$

$$x + y = 70$$
$$x + 30 = 70$$
$$x = 40$$

La blusa cuesta \$40 y el pantalón \$30.

Posibles dificultades:
Puede ser que se haya olvidado el proceso de cálculo de porcentajes o la aplicación de la regla de tres, en ese caso puede referirse a la lección 3 de la Unidad 6 de séptimo grado.

Fecha:

U2 2.3

P a) Completa la tabla
b) Escribe el sistema de ecuaciones que represente las condiciones del problema, resuélvelo.

S

	V. de Ana	V. de Beatriz	Comparación
Precio original	x dólares	y dólares	$y = x + 25$
Descuento	15 % de x	20 % de y	
Precio con descuento	$0.85x$	$0.8y$	$0.8y = 0.85x + 8$

$$\begin{cases} y = x + 25 & (1) \\ 0.8y = 0.85x + 8 & (2) \end{cases}$$

Aplicando el método de sustitución:

$$80(x + 25) = 85x + 800$$
$$80x + 2\,000 = 85x + 800$$
$$80x - 85x = 800 - 2\,000$$
$$x = 240$$

Sustituyendo $x = 240$ en (1)

$$y = 240 + 25$$
$$y = 265$$

R

$$\begin{cases} x + y = 70 & (1) \\ 0.8\,x + 0.9\,y = 59 & (2) \\ x = 40,\ y = 30 \end{cases}$$

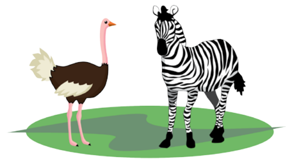
La blusa cuesta \$40 y el pantalón \$30.

Tarea: página 43 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Aplicación de sistemas de ecuaciones en aritmética, parte 2

P

En el zoológico tienen avestruces y cebras a razón de 7 a 8, si entre todas se cuentan 92 patas, ¿cuántas avestruces y cuántas cebras hay?



S

1. Llamando y al número de avestruces y x al número de cebras, representa las condiciones:

"a razón de 7 a 8" $y:x = 7:8 \longrightarrow 8y = 7x$

"se cuentan 92 patas" $4x + 2y = 92 \longrightarrow 4x + 2y = 92$

2. Se plantea el sistema: $\begin{cases} 8y = 7x & (1) \\ 4x + 2y = 92 & (2) \end{cases}$

- Las partes de una razón:

  a:b

  Antecedente Consecuente

- La propiedad fundamental de las proporciones.

  Si *a*:*b* = *c*:*d*, entonces:
  $a \times d = b \times c$

3. Se resuelve el sistema:

- Despejar y de la ecuación (1)

$$y = \frac{7}{8}x$$

- Sustituir $y = \frac{7}{8}x$, en la ecuación (2)

$$4x + 2(\tfrac{7}{8}x) = 92$$

$$4x + \tfrac{7}{4}x = 92$$

$$16x + 7x = 368$$

$$23x = 368$$

$$x = 16$$

- Sustituye el valor $x = 16$ en (1)

$$y = \tfrac{7}{8}(16)$$

$$y = 7(2)$$

$$y = 14$$

Por lo tanto, hay 14 avestruces y 16 cebras.

C

Los sistemas de ecuaciones pueden utilizarse para resolver distintas situaciones de la vida cotidiana, tal como se evidencia en los ejemplos desarrollados:

- Geometría: áreas de figuras planas, perímetro, etc.
- Ciencias naturales: movimiento rectilíneo, etc.
- Matemática financiera: tanto por ciento, etc.
- Aritmética: razones, proporciones, etc.

1. Un fontanero y su ayudante reciben por la instalación de tres sanitarios \$270.00, los que se reparten en la razón 7:2, ¿cuánto dinero recibirá cada uno? El fontanero \$210.00 y el ayudante \$60.00.

2. Las edades de dos hermanos son entre sí como 2:5 y ambas edades suman 28 años, ¿cuál es la edad de cada uno? El mayor 20 años y el menor 8 años.

3. El perímetro de una cancha de fútbol mide 432 metros. Si la razón entre el ancho y el largo es 5:7, ¿cuánto mide cada lado de la cancha? El ancho 90 y el largo 126.

Unidad 2

Indicador de logro

2.4 Utiliza los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas para resolver problemas que incluyen razones y proporciones.

Secuencia

Para esta clase se continúa con la solución de situaciones del área de aritmética, en este caso se hace referencia al uso de las razones para modelar una situación mediante un sistema de ecuaciones y determinar los valores de las incógnitas que satisfacen la situación.

Solución de algunos ítems:

1. "a razón de 7 a 2" $y : x = 7 : 2$

$2y = 7x$

"Reciben en total 270 dólares"

$x + y = 270$

$$\begin{cases} 2y = 7x & (1) \\ x + y = 270 & (2) \end{cases}$$

Despejar y de la ecuación $y = \frac{7}{2}x$

Aplicando sustitución:

$$x + \frac{7}{2}x = 270$$
$$2x + 7x = 540$$
$$9x = 540$$
$$x = 60$$

Sustituye el valor $x = 60$ en (1)

$$y = \frac{7}{2}(60)$$
$$y = 7(30)$$
$$y = 210$$

El fontanero recibirá $210 y el ayudante $60.

Posibles dificultades:
Es posible que algunos estudiantes tengan dificultades al utilizar las proporciones para modelar las situaciones planteadas, en ese caso se puede hacer referencia a la lección 3 de la Unidad 5 de séptimo grado y de ser necesario hacer un breve recordatorio general.

Fecha:

U2 2.4

(P) Hay avestruces y cebras a razón de 7 a 8. Total de patas 92, ¿cuántas avestruces y cebras hay?

(S) $$\begin{cases} 8y = 7x & (1) \\ 4x + 2y = 92 & (2) \end{cases}$$

Despejar y de la ecuación, $y = \frac{7}{8}x$

Aplicando sustitución:

$$4x + \frac{7}{4}x = 92$$
$$16x + 7x = 368$$
$$23x = 368$$
$$x = 16$$

Sustituye el valor $x = 16$ en (1)

$$y = \frac{7}{8}(16)$$
$$y = 7(2)$$
$$y = 14$$

(R) $$\begin{cases} 2y = 7x & (1) \\ x + y = 270 & (2) \end{cases}$$ $x = 60$, $y = 210$

Ellos recibirán $210 y $60 respectivamente.

Tarea: página 44 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. Mario entrena en el río. Primero nada contra la corriente y demora 30 minutos en recorrer 2 kilómetros. Luego, nada a favor de la corriente y demora 15 minutos en recorrer la misma distancia.
   a) ¿Cuántas cantidades desconocidas involucra el problema? ¿Cuáles son?
   b) ¿Cuáles son los datos conocidos del problema?
   c) ¿Qué condiciones impone el problema sobre estas cantidades? ¿Cómo se expresan matemáticamente estas condiciones?
   d) ¿Cuál es la velocidad de Mario respecto al río y la velocidad del río respecto a la orilla?

2. Carlos pagó una cuenta de $300 con billetes de $5 y de $10. En total empleó 45 billetes para hacer el pago, ¿cuántos billetes de cada valor utilizó? 30 billetes de $5 y 15 billetes de $10.

3. Un número de dos cifras es tal, que la cifra que ocupa el lugar de las decenas es el doble de la que ocupa el lugar de las unidades, y la diferencia de las dos cifras es igual a 3. Calcula ese número.
   El número es el 63.
4. Juan dispone de un capital de $8,000.00, del cual una parte la deposita en una cuenta al 5% de interés anual y otra al 6% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año será de $8,450.00. 3 000 al 5 % y 5 000 al 6 %.

5. Miguel pagó $84.00 por 3 cajas de clavos y 5 cajas de tornillos. José compró 5 cajas de clavos y 7 de tornillos, y tuvo que pagar $124.00, ¿cuál es el precio de cada caja de clavos y de cada caja de tornillos?
   Por la caja de clavos pagó $8 y por la de tornillos $12.

2.6 Practica lo aprendido

Valora si los datos y las condiciones son suficientes para que los siguientes problemas tengan solución o que la solución sea lógica.

1. En la granja El Corral se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada tipo se han utilizado? 20 de 5 litros y 100 de 2 litros.

2. El propietario de una hacienda ha decidido sembrar dos tipos de cultivo: maíz y frijol. La semilla del maíz cuesta $4 por tarea, y la del frijol $8 por tarea. El costo de mano de obra es de $10 por tarea para el maíz y de $20 por tarea para el frijol. Si el propietario dispone gastar $216 en semillas y $5,400 en mano de obra, ¿cuántas hectáreas de cada cultivo podrá sembrar?
   Con los datos y condiciones proporcionadas, no tiene solución.
3. Si al antecedente de una razón le sumamos 3 y al consecuente le restamos 2, la razón se convierte en 6:7; pero si al antecedente le restamos 5 y al consecuente le sumamos 2, la razón resultante es 2:5, ¿cuál es el valor del antecedente y del consecuente de la razón? Antecedente 15 y consecuente 23.

4. Un elaborador de jugos artesanales se dispone a preparar una mezcla entre dos variedades. Para responder a un pedido de compra, el volumen total de la mezcla a obtener debe ser de 1 420 litros. Si el volumen de coco que interviene en la mezcla es igual a dos tercios del volumen de piña más 120 litros, ¿cuántos litros de cada variedad deben mezclarse para obtener la variedad de jugo deseada?
   Volumen de piña 780 litros y volumen de coco 640 litros.

42

Indicador de logro

2.5 y 2.6. Aplica los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, para resolver problemas en los que se deben modelar situaciones del entorno.

Clase 2.5:

5. $\begin{cases} 3x + 5y = 84 \\ 5x + 7y = 124 \end{cases}$

Reduce en x, sumando 1 y 2

1 $\times 5 \longrightarrow 15x + 25y = 420$

2 $\times 3 \longrightarrow 15x + 21y = 372$

$$\begin{array}{rr} & 15x + 25y = 420 \\ (-) & 15x + 21y = 372 \\ \hline & 4y = 48 \\ & y = 12 \end{array}$$

El precio de la caja de clavos es de \$8 y el precio de la caja de tornillos es de \$12.

Clase 2.6:

3. Considerando las condiciones entre antecedente y consecuente, se tiene:

$$(y + 3) : (x - 2) = 6 : 7$$
$$(y - 5) : (x + 2) = 2 : 5$$

$$\begin{cases} 6x - 7y = 33 \\ 2x - 5y = -29 \end{cases}$$

Reduce en x, sumando 1 y 2

1 $\longrightarrow 6x - 7y = 33$

2 $\times 3 \longrightarrow 6x - 15y = -87$

$$\begin{array}{rr} & 6x - 7y = 33 \\ (-) & 6x - 15y = -87 \\ \hline & 8y = 120 \\ & y = 15 \end{array}$$

Al sustituir $y = 15$ en $6x - 7y = 33$

$$\begin{aligned} 6x - 7y &= 33 \\ 6x - 5(15) &= 33 \\ 3x &= 33 + 105 \\ x &= 23 \end{aligned}$$

Antecedente 15 y consecuente 21.

Tarea: páginas 45 y 46 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 3. Función lineal

Competencia de la Unidad

Resolver situaciones del entorno mediante el uso de la función lineal, identificando, modelando, interpretando y graficando correctamente las relaciones entre las variables.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Octavo grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Unidad 3: Función lineal
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Noveno grado

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Función lineal	1	1. Recordando el sentido de la proporcionalidad directa
	1	2. Aplicaciones de la proporcionalidad directa
	1	3. Sentido de la función lineal
	1	4. Función lineal
	1	5. Sentido de la razón de cambio
	1	6. Razón de cambio
	1	7. Características de la función $y = ax + b$
	1	8. Relación entre la gráfica de la función $y = ax + b$ y la de $y = ax$
	1	9. Análisis gráfico de la pendiente positiva
	1	10. Análisis gráfico de la pendiente negativa
	1	11. Relación entre la razón de cambio y pendiente de la gráfica de $y = ax + b$
	1	12. Pendiente e intercepto de la gráfica de la función $y = ax + b$
	1	13. Relación entre tabla, ecuación y gráfica de función lineal
	1	Prueba del primer trimestre
	1	14. Trazo de la gráfica de la función lineal dada la pendiente y el intercepto
	1	15. Relación entre la ecuación y gráfica de la función lineal
	1	16. Valores de y cuando se delimitan los valores de x
	1	17. Expresiones de la función en $y = ax + b$ mediante la lectura de la gráfica
	1	18. Ecuación de la función a partir de un punto de la gráfica y la pendiente
	1	19. Ecuación de la función a partir de dos puntos de la gráfica

	1	20. Ecuación de la función a partir de los interceptos con los ejes
	1	21. Practica lo aprendido
	1	22. Practica lo aprendido
2. Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas	1	1. Trazo de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas
	1	2. Relación entre la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ y la función $y = ax + b$
	1	3. Gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ a partir de los interceptos
	1	4. Trazo de la gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, cuando $a = 0$
	1	5. Trazo de la gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, cuando $b = 0$
	1	6. Intercepto de la gráfica de dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$
	1	7. Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$
	1	8. Practica lo aprendido
3. Aplicación de la función lineal	1	1. Aplicaciones de la función lineal, parte 1
	1	2. Aplicaciones de la función lineal, parte 2
	1	3. Aplicaciones de la función lineal, parte 3
	1	4. Practica lo aprendido
	1	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 3

35 horas clase + prueba de la Unidad 3 + prueba del primer trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Función lineal

Luego de trabajar la proporcionalidad directa en séptimo grado e introducir la definición de función, se retoman estos contenidos para dar paso a la definición general de la función lineal a partir de situaciones que se modelan en la forma $y = ax + b$. Primero, se hace un análisis de los valores de a y b y su relación con la gráfica de la función lineal: razón de cambio, inclinación y pendiente de la recta e intercepto con el eje y. Luego se encuentra la ecuación de una función lineal a partir de condiciones iniciales.

Lección 2: Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas

A partir de las características de la gráfica de la función lineal $y = ax + b$ se analizan las ecuaciones lineales con dos incógnitas estableciendo relaciones entre ambos contenidos. Se comienza trazando la gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, se definen además los interceptos con los ejes de coordenadas y el significado gráfico de la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Lección 3: Aplicación de la función lineal

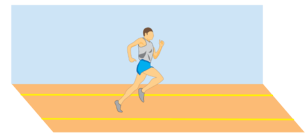
Se resuelven situaciones que se modelan a partir de funciones lineales. Los problemas planteados en esta lección van desde situaciones de la vida cotidiana hasta contenidos puramente matemáticos.

Lección 1 Función lineal

1.1 Recordando el sentido de la proporcionalidad directa

P

Un corredor de maratón ha avanzado 2 km en los primeros 8 minutos de su recorrido. Si mantiene la velocidad después de los 8 minutos:



1. Encuentra la constante de proporcionalidad.
2. Representa la distancia recorrida y, después de x minutos.
3. ¿Cuánto tiempo tardará en completar los 42 km del recorrido?

S

1. Como se conoce un par de valores para x y y, se sustituyen en la expresión $y = ax$ para calcular el valor de a.

$y = ax$, cuando $x = 8$, $y = 2$.

$2 = a(8)$

$\frac{2}{8} = a$

$a = \frac{1}{4}$

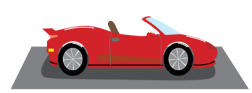
2. Al expresar la distancia y, después de x minutos, se tiene $y = \frac{1}{4}x$.

3. Para determinar en cuánto tiempo completa los 42 km de recorrido, se sustituye el valor de $y = 42$, en $y = \frac{1}{4}x$.

$42 = \frac{1}{4}x$, entonces $x = 168$ minutos.

Por tanto, para completar los 42 km, necesita 2 horas con 48 minutos.

1. Un automóvil consume 5 litros de gasolina por cada 100 kilómetros que recorre.



a) Encuentra la constante de proporcionalidad. $a = \frac{1}{20}$

b) Representa la cantidad de litros de gasolina consumida y, después de x kilómetros. $y = \frac{1}{20}x$

c) ¿Cuántos litros de gasolina necesita para recorrer 1 250 kilómetros?
62.5 litros

2. Por un grifo salen 38 litros de agua en 5 minutos, completa la tabla y responde.

Tiempo	5	10	15	20
Litros de agua	38	76	114	152

a) ¿Es proporcional el número de litros al tiempo transcurrido? Justifica tu respuesta. Sí; el número y de litros después de x minutos se escribe $y = 7.6x$.

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se tengan 228 litros?
30 minutos

3. Tres fotografías cuestan 5 dólares, seis fotografías 9 dólares. Razona si el número de fotografías es directamente proporcional a su precio. No; $\frac{5}{3} \neq \frac{9}{6}$

4. Por 3 horas de trabajo, Alberto ha cobrado \$60. ¿Cuánto cobrará por 8 horas, si el pago recibido es directamente proporcional al tiempo trabajado? \$160

Indicador de logro

1.1 Utiliza lo aprendido en 7° grado para resolver situaciones que involucren proporcionalidad directa.

Secuencia

En la Unidad 6 de séptimo grado se abordaron los conceptos de función, proporcionalidad directa con valores positivos y negativos en las variables, la constante de proporcionalidad y la representación en la forma $y = ax$. En esta clase se pretende recordar esos contenidos a través de la resolución de problemas y preparar al estudiante para el estudio de la función lineal.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Representar la proporcionalidad directa en la forma $y = ax$ encontrando el valor de la constante de proporcionalidad a. Utilizar la proporcionalidad directa para calcular el valor de y dado un valor específico de x.

Ⓒ Resolver situaciones que impliquen la proporcionalidad directa escribiéndola en la forma $y = ax$ y determinar si dos cantidades son directamente proporcionales.

Para poder resolver el Problema inicial los estudiantes deben recordar que si y es una función de x tal que puede expresarse en la forma $y = ax$ entonces y es directamente proporcional a x, y al número a se le llama **constante de proporcionalidad.**

Debe aclararse además, que en el numeral 1 del Problema inicial se proveen valores particulares de x y y, y debe encontrarse el número a despejándolo de $y = ax$ (esto aplica también para los problemas 1 y 2).

Fecha: **U3 1.1**

Ⓟ Un corredor avanza 2 km en 8 min, manteniendo su velocidad constante.

1. Encuentra la constante de proporcionalidad.
2. Representa la distancia recorrida y en términos del tiempo x.
3. ¿Cuánto tardará en recorrer 42 km?

Ⓢ 1. $y = ax \Longrightarrow 2 = a(8) \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$

2. Sustituyendo a: $y = \frac{1}{4}x$

3. Se sustituye $y = 42$:

$42 = \frac{1}{4}\ x \Longrightarrow x = 4(42) \Longrightarrow x = 168$

Necesita 2 horas con 48 minutos.

Ⓡ 1. a) $a = \frac{1}{20}$

b) $y = \frac{1}{20}\ x$

c) Necesita 62.5 litros.

2.

Tiempo	5	10	15	20
lt de agua	38	76	114	152

a) Sí, el número y de litros de agua después de x minutos es $y = 7.6x$.

b) 30 minutos.

3. No son proporcionales.

4. Cobrará $160.

Tarea: página 50 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Aplicaciones de la proporcionalidad directa

P

La tabla muestra la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro, completa la tabla y realiza lo siguiente:

Lado x (cm)	1	2	3	4	5
Perímetro y (cm)	4	8			

1. Determina si existe proporcionalidad directa entre la medida del lado del cuadrado x y su respectivo perímetro y, justifica tu respuesta utilizando la relación $y = ax$.

2. Representa el perímetro y, cuando el lado del cuadrado mide x.

3. Representa gráficamente la relación entre la medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

S

Al completar la tabla se tiene:

Lado x (cm)	1	2	3	4	5
Perímetro y (cm)	4	8	12	16	20

1. Como se conocen algunos valores para x y los respectivos valores para y, se puede calcular la constante de proporcionalidad calculando el cociente entre ellos:

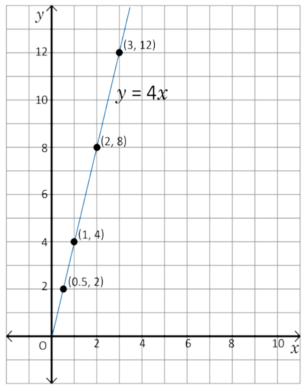
   Si $x = 2$, $y = 8$, entonces $8 = a(2)$, $a = \frac{8}{2} = 4$, se puede verificar que el cociente es igual para todos los casos.

2. Como la constante de proporcionalidad es 4, entonces $y = 4x$.

3. Para elaborar la gráfica de la relación entre el lado del cuadrado y su perímetro, es necesario representar en el plano algunos pares de valores para x y y de la tabla, luego se unen con segmentos de recta para considerar todos los posibles valores que pueda tomar el lado del cuadrado.

   - Si $x = 0$, $y = 4(0) = 0$, este sería el mínimo valor que puede tomar x, en este caso el cuadrado se vuelve un punto.

   - Si $x = 0.5$, $y = 4(0.5) = 2$.



Así se pueden determinar más pares ordenados haciendo variar la medida del lado del cuadrado.

C

Para representar la relación de proporcionalidad directa en forma $y = ax$, a partir de un par de valores de las variables:

- Se sustituyen los valores en las variables y se forma la ecuación.
- Se encuentra el valor de la constante en una ecuación.
- Se sustituye el valor de la constante en $y = ax$.

Para elaborar la gráfica de proporcionalidad directa $y = ax$, se toma el punto de origen O(0, 0) y otro punto; luego se traza la línea recta que pasa por esos puntos.

Unidad 3

45

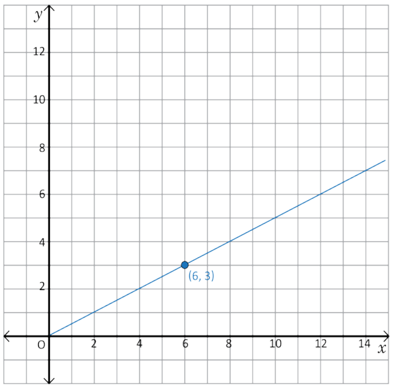
1. Un automóvil que viaja desde San Salvador hacia San Miguel, ha recorrido 50 km después de una hora de camino, si continúa a velocidad constante hasta llegar a su destino:

a) Determina si existe proporcionalidad directa entre el tiempo transcurrido x y la distancia recorrida y, justifica tu respuesta. Sí, pues continúa a velocidad constante

b) Representa la distancia recorrida y, cuando ha transcurrido x horas. $y = 50x$

c) Representa gráficamente la relación entre el tiempo transcurrido x y la distancia recorrida y.

2. La gráfica muestra la relación entre la cantidad de pasteles en el eje x y el total a pagar en dólares, en el eje y.

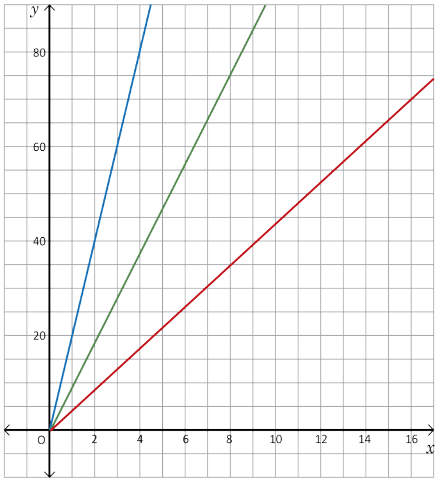


a) ¿Cuánto cuestan 2 pasteles? $1

b) Encuentra la constante de proporcionalidad entre el número de pasteles y el costo. $a = \frac{1}{2}$

c) Escribe la relación entre el número de pasteles x y el costo a pagar y de la forma $y = ax$.
$y = \frac{1}{2}x$

3. Un depósito se llena mediante una bomba que vierte 20 galones de agua por minuto.



La azul

a) Identifica, ¿cuál de las tres rectas representa el agua del depósito en función del tiempo?

b) Determina la constante de proporcionalidad.
$a = 20$

c) Escribe en la forma $y = ax$, la relación que hay entre la cantidad y de agua que tiene el depósito después de x minutos. $y = 20x$

d) ¿Qué cantidad de agua tendrá el depósito después de 15 minutos? Tendrá 300 galones

Para escribir la función $y = ax$ a partir de la gráfica:

- Se elige un punto por el que pasa la gráfica, cuyos valores son números enteros.
- Se sustituye el valor de x y y del par ordenado en $y = ax$ y se encuentra el valor de a.
- Se escribe $y = ax$, sustituyendo a por el valor encontrado.

Indicador de logro

1.2 Utiliza lo aprendido en séptimo grado para resolver situaciones que involucren la proporcionalidad directa.

Secuencia

Similar a la clase 1.1, se continúa con el estudio de situaciones que involucran la proporcionalidad directa. En esta clase también se presentan tablas y gráficas para identificar si dos cantidades son directamente proporcionales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Representar la relación de proporcionalidad directa entre la longitud del lado de un cuadrado y su perímetro, escribiéndola en la forma $y = ax$ y trazando su gráfica.

Ⓒ Establecer el procedimiento para encontrar la relación de proporcionalidad $y = ax$ a partir de dos valores particulares de x y y, y trazar la gráfica de la proporcionalidad directa.

Materiales:

- Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond para resolver el numeral 3 del Problema inicial y el ítem 1. c) del bloque de problemas. Para no elaborar un plano por cada ejercicio o problema puede forrar una tabla de madera, primero con papel bond y luego con plástico (cinta ancha transparente), luego dibuje una cuadrícula con plumón permanente; este recurso le servirá en las clases que involucran el uso de gráficas, con plumón de pizarra dibuje los ejes en el lugar conveniente.
- Metro o escuadra de madera para trazar las gráficas.

Posibles dificultades:

Si los estudiantes no recuerdan cómo calcular el perímetro de un cuadrado puede indicarlo al momento de escribir el Problema inicial en la pizarra: “el perímetro de un cuadrado se calcula sumando las longitudes de sus cuatro lados”; dado que las longitudes son iguales entonces el perímetro puede escribirse como una multiplicación. Recuerde además que la gráfica de la proporcionalidad directa es una línea recta; debido a la naturaleza del Problema inicial en este caso no pueden incluirse valores negativos.

Primero escriba en la pizarra el problema inicial junto con su solución. Después de esto, bórrelo y escriba los ejercicios según el plan de pizarra en la siguiente página.

Fecha:

U3 1.2

Ⓟ Relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro:

Lado x (cm)	1	2	3	4	5
Perímetro y (cm)	4	8			

1. Determina si son directamente proporcionales x y y.
2. Escribe y en términos de x.
3. Representa gráficamente la relación entre x y y.

Ⓢ Los valores faltantes en la tabla son 12, 16 y 20 respectivamente.

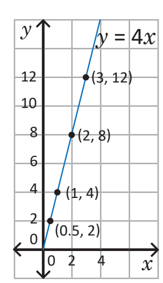
1. Al sustituir $x = 2$ y $y = 8$ para encontrar el valor de a:

$$8 = a(2) \Longrightarrow a = \frac{8}{2} \Longrightarrow a = 4$$

El cociente $\frac{y}{x}$ en cualquier caso es igual a 4.

2. $y = 4x$

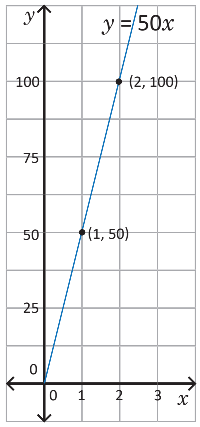
3. Se representan en el plano algunos pares de valores de x y y, y se unen con segmentos de recta.



Continuación de la clase 1.2.

Solución de algunos ítems:

Problema 1:



Observaciones:
Problema 1: no es posible colocar los valores en el eje y de uno en uno; indique a los estudiantes que escriban de 25 en 25 o de 50 en 50 los valores de y.

Problemas 2 y 3: al extraer información de la gráfica debe recordar que la primera coordenada corresponde al valor de x y la segunda al valor de y. Indique a los estudiantes que tomen valores enteros para las coordenadas para facilitar cálculos.

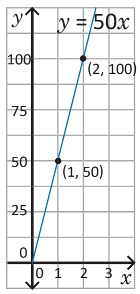
Fecha:

U3 1.2

Ⓡ 1. a) Sí existe proporcionalidad directa ya que la velocidad es constante.

b) $y = 50x$

c) Gráfica de $y = 50x$:



2. a) Cuestan $1.

b) $a = \frac{1}{2}$

c) $y = \frac{1}{2}x$

3. a) La recta azul.
b) $a = 20$
c) $y = 20x$
d) Tendrá 300 galones.

Tarea: página 51 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Sentido de la función lineal

P

La pila de la casa de Carmen tiene 5 litros de agua, al abrir el grifo, este arroja 3 litros de agua por minuto. La tabla muestra la variación de los litros de agua en la pila a medida que transcurre el tiempo, completa los espacios vacíos y responde.

x (minutos)	0	1	2	3	4	...
y (litros de agua)	5	8	11			

a) Analiza cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo, ¿es y directamente proporcional a x?
b) ¿Qué cantidad de agua tendrá la pila después de 5 minutos?
c) ¿Qué cantidad de agua tendrá la pila después de x minutos?
d) Escribe una ecuación donde y esté en términos de x.

S

Al completar la tabla se tiene:

x (minutos)	0	1	2	3	4	...
y (litros de agua)	5	5 + 3 = 8	8 + 3 = 11	11 + 3 = 14	14 + 3 = 17	...

a) Para determinar si y es directamente proporcional a x, se calculan los cocientes $\frac{y}{x}$, luego se comparan. Por ejemplo, $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{11}{2} = 5.5$, y así sucesivamente se comparan todos a medida que el tiempo transcurre y la cantidad de agua en la pila aumenta, de donde se puede concluir que la razón $\frac{y}{x}$ no es constante y por tanto, y no es directamente proporcional a x.
b) Después de cinco minutos la pila tendrá 20 litros de agua, $20 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 3(5)$.
c) Como la cantidad de agua en la pila es igual a los litros que tenía al inicio más 3 litros por cada minuto transcurrido, entonces después de x minutos tendrá $5 + 3x$ litros de agua.
d) Considerando la cantidad de agua después de x minutos, se tiene que $y = 5 + 3x$ o $y = 3x + 5$.

C

Si se tienen dos variables x y y, donde y se puede escribir como una expresión de primer grado en x, como el ejemplo mostrado arriba, se dice que **y es una función lineal de x**, generalmente se expresa de la forma $\boldsymbol{y = ax + b}$: donde $\boldsymbol{a}$ indica que es una relación de proporcionalidad entre las variables, $\boldsymbol{b}$ es una constante y recibe el nombre de **ecuación de la función**. Se puede obtener el valor de b observando la tabla donde $x = 0$. Cuando la constante $\boldsymbol{b}$ toma el valor de cero, la función lineal coincide con la proporcionalidad directa y se expresa como $\boldsymbol{y = ax}$.

Para el ejemplo anterior, se tiene $\boldsymbol{y = 3x + 5}$, donde se puede identificar $a = 3$ y $b = 5$. Por eso se dice que la cantidad de agua en la pila no es directamente proporcional al tiempo transcurrido.

Un recipiente que contiene agua hasta 1 cm de altura comienza a llenarse a un ritmo constante de 3 cm por minuto.

a) Completa en la siguiente tabla los valores para la cantidad de agua que tiene el recipiente, donde x es el número de minutos transcurridos y y es la altura hasta donde se ha llenado el recipiente.

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y (centímetros)	1	4	7	10	13	16	19	22	

b) ¿Cuál es la altura del agua después de un minuto? ¿Y después de dos minutos? 4 y 7 cm respectivamente
c) Determina el aumento de la altura en x minutos. $1 + 3x$
d) Escribe una ecuación donde y esté en términos de x. $y = 3x + 1$

Unidad 3

Indicador de logro

1.3 Representa dos variables en una tabla y escribe la expresión $y = ax + b$.

Secuencia

Las clases 1.1 y 1.2 sirvieron para recordar la proporcionalidad directa (expresarla en la forma $y = ax$ y trazar su gráfica). En esta clase se presentan diversas situaciones cuyas cantidades están relacionadas en la forma $y = ax + b$, es decir, y es una función lineal de x.

En la Unidad 4 de séptimo grado "Comunicación con símbolos" ya se han trabajado patrones numéricos cuya expresión algebraica era de la forma $am + n$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Representar una situación sobre el llenado de una pila mediante la expresión de la forma $y = ax + b$ y compararla con la relación de proporcionalidad directa.

Ⓒ Definir la función lineal $y = ax + b$ e indicar cuándo coincide con la proporcionalidad directa.

Posibles dificultades:
Recordar que dos cantidades son proporcionales si el cociente $\frac{y}{x}$ es constante.

Fecha: U3 1.3

Ⓟ Variación de los litros de agua a medida que transcurre el tiempo:

x (minutos)	0	1	2	3	4
y (litros)	5	8	11		

a) ¿Es y directamente proporcional a x?

b) ¿Cuál será la cantidad de agua después de 5 minutos? ¿Y después de x minutos?

c) Escribe y en términos de x.

Ⓢ Los valores de la tabla son 14 y 17 respectivamente.

a) No, ya que los cocientes $\frac{y}{x}$ no son constantes.

b) Después de 5 minutos:

$$5 + 3(5) = 20 \text{ litros.}$$

Después de x minutos:

$$5 + 3x \text{ litros.}$$

c) $y = 3x + 5$.

Ⓡ a)

x (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
y (cm)	1	4	7	10	13	16	19	22

b) 4 cm y 7 cm respectivamente.

c) El aumento es $1 + 3x$ centímetros.

d) $y = 3x + 1$.

Tarea: página 52 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Función lineal

P

Determina si la relación entre las variables para cada una de las siguientes situaciones corresponde a una función lineal.

1. Una candela de 140 milímetros (mm) de largo se enciende y se acorta 4 mm por minuto transcurrido. Tomando como y la longitud de la candela después de x minutos de encenderla, expresa y en función de x.

2. Carlos obtiene un salario de $200 por cada carro vendido. Representa con y el salario que Carlos recibe al vender x carros, expresa y en función de x.

S

1. Como se acorta 4 mm por minuto, después de x minutos se acorta $4x$, por tanto la longitud de la candela que tenía 140 mm al inicio, después de x minutos será $y = 140 - 4x$; es decir, $y = -4x + 140$, si se compara con la expresión $y = ax + b$, se obtiene $a = -4$ y $b = 140$; por tanto, es una función lineal.

2. Carlos recibe $200 por cada carro vendido. Si vende x carros tiene un ingreso de $200x$; entonces su salario mensual al vender x carros será $y = 200x$, al comparar con la expresión $y = ax + b$, se obtiene que $a = 200$ y $b = 0$; por tanto, es una función lineal.

C

La expresión $y = ax + b$, para $a < 0$ y la expresión de proporcionalidad directa $y = ax$, también son casos de la función lineal.

- La expresión $y = ax + b$, para $a < 0$, a medida que x aumenta, y disminuye.
- La expresión $y = ax$, corresponde a la función lineal cuando $b = 0$.

Por ejemplo, en la situación 2 que se desarrolló, se puede ver que $y = 200x$, donde $b = 0$ y corresponde a una función lineal, y también es una relación de proporcionalidad donde la razón $\frac{y}{x} = 200$.

1. Identifica las ecuaciones que corresponden a una función lineal.

a) $y = 2x + 1$
Lineal, $a = 2$ y $b = 1$

b) $y = \frac{3}{x}$
No es lineal

c) $y = -3x + 2$
Lineal, $a = -3$ y $b = 2$

d) $y = 3x$
Lineal, $a = 3$ y $b = 0$

2. Escribe y en función de x, luego analiza si corresponde a una función lineal.

a) Perímetro y de un cuadrado cuyo lado mide x. $y = 4x$; es una función lineal
b) Altura y de un triángulo de base x y su área 16 cm^2. $y = \frac{16}{x}$; no es una función lineal
c) Perímetro y de un círculo de radio x.
$y = 2\pi x$; es una función lineal

Indicador de logro

1.4 Identifica la función lineal dada su ecuación.

Secuencia

Como en la clase 1.3 se definió la función lineal, ahora debe determinarse si las situaciones abordadas en el Problema inicial y los ejercicios corresponden a funciones lineales. Además, para esta clase se incluyen situaciones donde el valor de y disminuye a medida que x aumenta.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Representar una situación sobre el llenado de una pila mediante la expresión de la forma $y = ax + b$ y compararla con la relación de proporcionalidad directa.

Ⓒ Establecer la relación entre la función lineal y la relación de proporcionalidad directa.

Posibles dificultades:
En el Problema inicial 1, no reconocer que al acortarse la candela 4 mm por minuto transcurrido, el valor de a es –4.

En el ejercicio 2. c) de la fijación, no clasificarla como una función lineal debido al valor de la constante $a = 2\pi$. En una función lineal $y = ax + b$, a puede tomar el valor de cualquier número.

Fecha:

U3 1.4

Ⓟ Determina si son funciones lineales:

1. La longitud y después de x minutos de una candela, cuya longitud es 140 mm y que se acorta 4 mm por minuto transcurrido.
2. El salario y de Carlos al vender x carros, si recibe $200 por cada carro vendido.

Ⓢ 1. Después de x minutos la candela se acorta $4x$; si su longitud original era 140 mm entonces:

$y = 140 - 4x = -4x + 140$

$a = -4$, $b = 140$ y es una función lineal.

2. Si Carlos vende x carros, entonces su ingreso es de $200x$ dólares. Luego:

$$y = 200x$$

$a = 200$, $b = 0$ y es una función lineal.

Ⓡ 1. a) Es función lineal, $a = 2$ y $b = 1$.
b) No es función lineal.
c) Es función lineal, $a = -3$ y $b = 2$.
d) Es función lineal, $a = 3$ y $b = 0$.

2. a) $y = 4x$; es función lineal.
b) $y = \frac{16}{x}$.
c) $y = 2\pi x$; es función lineal.

Tarea: página 53 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Sentido de la razón de cambio

P

Marta tiene un taller de costura, mensualmente tiene un gasto fijo de 10 dólares en energía eléctrica, más 3 dólares por cada hora trabajada.

a) Completa la siguiente tabla tomando como y el total mensual a pagar por la energía eléctrica al trabajar x horas al mes.

x (horas trabajadas)	0	1	2	3	4	...
y (dólares)	10					

b) Si trabaja 8 horas, ¿cuánto paga de energía eléctrica? Y si se trabajan 100 horas, ¿cuánto pagaría?
c) Expresa y como una función lineal de x.
d) Determina cómo cambian los valores de y a medida que los valores de x cambian.

S

a) Al completar la tabla con las horas trabajadas y el total a pagar, se tiene:

+1 +1 +1 +1

x (horas trabajadas)	0	1	2	3	4	...
y (dólares)	10	13	16	19	22	...

+3 +3 +3 +3

b) Como cada hora que trabaja genera un costo de 3 dólares, entonces el total a pagar después de 8 horas trabajadas es $y = 10 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 + 3(8) = 10 + 24 = 34$ dólares; y si trabaja 100, sería $y = 10 + 3(100) = 310$ dólares.
c) Considerando el resultado del literal b), el total a pagar después de x horas trabajadas es $y = 10 + 3x$, que es equivalente a $y = 3x + 10$.
d) Para determinar cómo cambian los valores de y respecto a los de x, se toman 2 cantidades de horas trabajadas distintas: 1 hora y 3 horas.

Variación en x: $3 - 1 = 2$
Variación en y: $19 - 13 = 6$

$\Rightarrow$ $\frac{\text{Variación en } y}{\text{Variación en } x} = \frac{6}{2} = 3$, el cambio en y es 3 veces el cambio en x.

C

Al comparar la variación de la variable y respecto a la variación de x en una función lineal, a esa razón se le llama razón de cambio; es decir, ***Razón de cambio*** = $\frac{\textbf{Variación en } y}{\textbf{Variación en } x}$.
Para el ejemplo desarrollado la razón de cambio es 3, esto se puede verificar comparando los valores de y con los de x en dos tiempos cualesquiera de la tabla.

Miguel acompañó a su padre a comprar y observó que 2 libras de tomates cuestan $ 3.00. Le preguntó a su padre cómo se calcula el precio para diferente cantidad de libras de tomates, su padre le explica que debe relacionar el número de libras de tomates con el precio de una libra.

a) Llamando x al número de libras y y al precio, completa la tabla con los datos que hacen falta.

x (libras)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y (dólares)	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	...

b) Si desea comprar 10 libras de tomates, ¿cuánto debe pagar? $15
c) Si un comerciante desea comprar 50 libras de tomates, ¿cuánto debe pagar? $75
d) Determina la razón de cambio tomando los resultados de los literales b) y c). $\frac{3}{2}$
e) Si un comerciante desea comprar x libras de tomates, ¿cuánto debe pagar?
$\frac{3}{2}x$ dólares

Indicador de logro

1.6 Resuelve situaciones mediante el análisis de la razón de cambio haciendo uso de tablas.

Secuencia

Para esta clase se comienza a estudiar la razón de cambio de una función lineal, más adelante se relacionará con la constante a en la ecuación de la función lineal.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Modelar la situación presentada en el Problema inicial mediante una función lineal y determinar la razón de cambio entre los valores.

Ⓒ Definir la razón de cambio de una función lineal.

Posibles dificultades:
No lograr determinar la ecuación de la función presentada en el Problema inicial; en este caso recuerde a los estudiantes que si el valor de y es cero cuando $x = 0$ entonces la función es de la forma $y = ax$.

Fecha:

U3 1.5

Ⓟ El gasto mensual de Marta en energía eléctrica es de \$10, más \$3 por cada hora trabajada.

a) Completa la tabla:

x (horas)	0	1	2	3	4
y (dólares)	10				

b) ¿Cuánto paga si trabaja 8 horas? ¿Y si trabaja 100?

c) Expresa y como función lineal de x.

d) Determina cómo cambian los valores de y a medida que cambian los de x.

Ⓢ a) Los valores son 13, 16, 19 y 22 respectivamente.

b) Después de 8 horas:
$10 + 3(8) = 34$ dólares.
Después de 100 horas:
$10 + 3(100) = 310$ dólares.

c) $y = 3x + 10$

d) $\frac{\text{Variación en } y}{\text{Variación en } x} = \frac{19 - 13}{3 - 1} = 3$

Ⓡ a) Los valores correspondientes son 4.5, 6, 7.5, 9 y 10.5 respectivamente.

b) \$15.00

c) \$75.00

d) Razón de cambio: $\frac{3}{2}$.

e) Debe pagar $\frac{3}{2}x$ dólares.

Tarea: página 54 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Razón de cambio

P

Observa los datos de la tabla:

x	0	1	2	3	4	...
y	20	18	16	14	12	...

a) Expresa y como una función lineal de x.
b) Si x toma el valor de 6, ¿cuánto vale y? Y si x toma el valor de 9, ¿cuánto vale y?
c) Calcula la razón de cambio de y respecto a x.
d) Compara la razón de cambio con el valor de a en el resultado del literal a). ¿Qué concluyes?

S

a) Al observar $x = 0$, $y = 20$ y cada vez que x aumenta una unidad y disminuye 2, entonces al expresar y en función de x, se tiene $y = 20 - 2x$, lo cual es equivalente a $y = -2x + 20$.

	$\xrightarrow{+1}$	$\xrightarrow{+1}$	$\xrightarrow{+1}$	$\xrightarrow{+1}$		
x	0	1	2	3	4	...
y	20	18	16	14	12	...
	$\xrightarrow{-2}$	$\xrightarrow{-2}$	$\xrightarrow{-2}$	$\xrightarrow{-2}$		

b) Para determinar el valor de y, se analiza la variación de los valores que se reflejan en la tabla, tal como se muestra en la figura. Mientras x aumenta una unidad, y disminuye 2; por tanto:

Si $x = 6$, $y = 20 - 2(6) = 20 - 12 = 8$.
Si $x = 9$, $y = 20 - 2(9) = 20 - 18 = 2$.

c) Se toman los valores en dos momentos y se determina el cambio en las dos variables:
Variación en x: $4 - 1 = 3$. Variación en y: $12 - 18 = -6$.

Utilizando la expresión ***Razón de cambio*** $= \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$; se tiene Razón de cambio: $\frac{-6}{3} = -2$.

d) Al comparar la función $y = -2x + 20$, con la forma de la función lineal $y = ax + b$, se tiene que $a = -2$, en donde se puede concluir que la razón de cambio es igual al valor de a.

C

En la función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio es constante y es equivalente al valor de a, es decir:

$$\textit{Razón de cambio} = \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x} = a$$

Considerando la expresión para determinar la razón de cambio se tiene:

- ***Variación en y = a × (variación en x)***, es decir, que el aumento en y es proporcional al aumento en x.
- El valor de a es equivalente al aumento de y cuando x aumenta una unidad.

E

Para cada una de las siguientes funciones lineales, realiza:
1. Identifica la razón de cambio.
2. Determina el valor de y, cuando $x = 4$.

a) $y = 3x - 5$
b) $y = -2x + 3$

Solución.

a) Para la función $y = 3x - 5$
1. Razón de cambio: 3
2. Valor de y, cuando $x = 4$:
$y = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$

b) Para la función $y = -2x + 3$
1. Razón de cambio: -2
2. Valor de y, cuando $x = 4$:
$y = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$

Para cada una de las siguientes funciones lineales, realiza:
1. Identifica la razón de cambio.
2. Determina el valor de y, cuando $x = 6$.

a) $y = 2x - 7$
Razón de cambio: 2
$y = 5$

b) $y = -3x + 4$
Razón de cambio: -3
$y = -14$

c) $y = \frac{1}{2}x + 1$
Razón de cambio: $\frac{1}{2}$
$y = 4$

Indicador de logro

1.6 Resuelve situaciones mediante el análisis de la razón y comparación con la ecuación de la función.

Secuencia

Ya definida la ecuación de la función lineal y la razón de cambio, para esta clase se compara el valor de a en la ecuación $y = ax + b$ con la razón de cambio de la función para establecer la igualdad entre ambas cantidades.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Modelar la situación presentada en el Problema inicial mediante una función lineal y determinar la razón de cambio entre los valores.

Ⓒ Establecer la igualdad entre el valor del coeficiente de la variable x en la ecuación de una función lineal y el valor de la razón de cambio de la misma.

Fecha:

U3 1.6

Ⓟ

x	0	1	2	3	4
y	20	18	16	14	12

a) Expresa y como función lineal de x.
b) Si $x = 6$, ¿cuál es el valor de y? ¿Y si $x = 9$?
c) Calcula la razón de cambio y compara este resultado con el valor de a.

Ⓢ a) Si x aumenta una unidad entonces y disminuye 2: $y = -2x + 20$
b) Si $x = 6$, $y = -2(6) + 20 = 8$
Si $x = 9$, $y = -2(9) + 20 = 2$
c) Razón de cambio: $\frac{12 - 18}{4 - 1} = -2$

$a = -2$, por tanto la razón de cambio y el valor de a son iguales.

Ⓔ Identifica la razón de cambio y calcula el valor de y cuando $x = 4$:

a) $y = 3x - 5$
Razón de cambio: 3
Si $x = 4$, $y = 3(4) - 5 = 7$

b) $y = -2x + 3$
Razón de cambio: −2
Si $x = 4$, $y = -2(4) + 3 = -5$

Ⓡ a) $y = 2x - 7$
Razón de cambio: 2
Si $x = 6$, $y = 2(6) - 7 = 5$

b) $y = -3x + 4$
Razón de cambio: −3
Si $x = 6$, $y = -3(6) + 4 = -14$

Tarea: página 55 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Características de la función $y = ax + b$

P

Si se tiene en la refrigeradora una jarra con agua a una temperatura de 3° C y luego se pone a calentar en la cocina y esta eleva la temperatura del agua 2° C por cada minuto que transcurre, si se representa con x el tiempo transcurrido y con y la temperatura.

a) En tu cuaderno, elabora la siguiente tabla y complétala:

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	...
y (centígrados)	3						...

b) Expresa y como una función lineal de x.
c) Grafica los pares ordenados (x, y) en el plano.
d) Estima otros valores para y tomando por ejemplo 0.5, 1.5, etc., para x. Grafica los pares ordenados de los valores estimados.

S

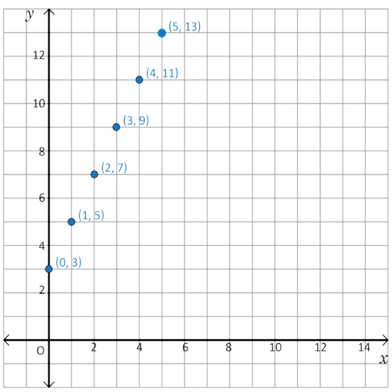
a) Al ir sumando los 2° C a la temperatura, por cada minuto que transcurre, la tabla queda de la siguiente manera:

x (minutos)	0	1	2	3	4	5	...
y (centígrados)	3	5	7	9	11	13	...

b) Al analizar la variación de los valores y con los de x, se observa que cada vez que x aumenta 1, y aumenta 2, tal como se muestra en la figura, de donde se obtiene que $y = 2x + 3$.

	+1	+1	+1	+1			
x (minutos)	0	1	2	3	4	5	...
y (centígrados)	3	5	7	9	11	13	...
	+2	+2	+2	+2			

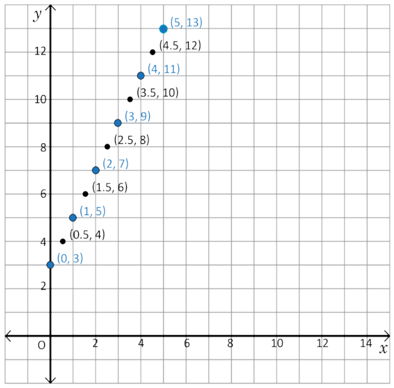
c) Considerando los valores calculados en el literal a), los puntos quedan graficados como se muestra en la figura:

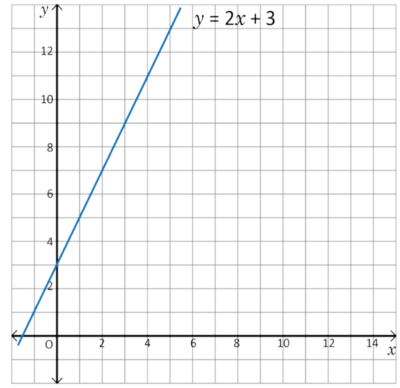


Para graficar los pares ordenados en el plano cartesiano:

El valor de x se sitúa sobre la recta horizontal o eje x, y a partir de ahí se cuentan las unidades de y desplazándose hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa.

d) Al estimar y graficar otros valores para las variables x y y, los puntos van quedando cada vez más juntos hasta formar una línea recta, tal como se muestra en la figura.

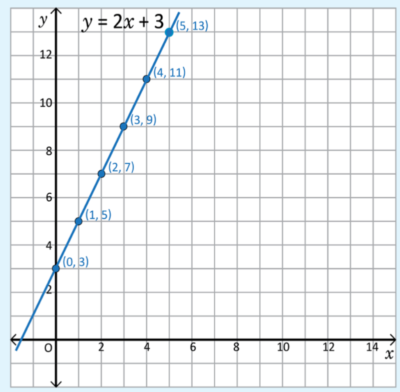




La gráfica de la función $y = ax + b$ es una línea recta, que se puede graficar conociendo los valores de las variables x y y para al menos dos pares ordenados.

Por ejemplo, para la función $y = 2x + 3$, la gráfica es una línea recta que pasa por el punto (0, 3).

Todas las funciones lineales $y = ax + b$ tienen una línea recta como gráfica y siempre pasan por el punto $(0, b)$; y en el caso que $b = 0$, pasan por el origen del sistema de coordenadas cartesianas.



1. En tu cuaderno, elabora la tabla y complétala, siguiendo la secuencia planteada.

x	...	0	1	2	3	4	5	...
$y = x + 5$	...	5	6	7	8	9	10	...

a) Grafica los pares ordenados (x, y) en el plano.
b) Estima otros valores para y asignándole otros valores a la variable x.
c) Completa la gráfica de la función.

2. En tu cuaderno, elabora la tabla y complétala, calculando los respectivos valores de y.

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 2x + 3$	...	−3	−1	1	3	5	7	9	...

a) Grafica los pares ordenados (x, y) en el plano.
b) Estima otros valores para y asignándole otros valores a la variable x.
c) Completa la gráfica de la función.

Indicador de logro

1.7 Utiliza la gráfica de la función $y = ax + b$ para describir sus características.

Secuencia

En séptimo grado se trazó la gráfica de la proporcionalidad directa, ubicando los puntos que satisfacen la relación de proporcionalidad en el plano cartesiano y verificando que todos se encuentran sobre una línea recta.

De la misma forma en esta clase se plantea una situación que puede modelarse utilizando una función lineal, y para trazar la gráfica de la misma el estudiante debe ubicar los puntos que satisfacen la ecuación de la función en el plano cartesiano y concluir que se encuentran sobre una línea recta.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Modelar una situación mediante una función lineal y trazar la gráfica de la misma haciendo uso de los puntos que satisfacen la ecuación de la función. Ⓒ, Determinar las características de la gráfica de una función lineal y los elementos necesarios para trazarla.

Observación:
En el plan de pizarra, observe que aunque se ha encontrado la ecuación de la función, es decir $y = 2x + 3$, no se ha considerado la parte de la gráfica donde x es negativo; debido a la situación que se está abordando en el Problema inicial. En la Solución propuesta en el Libro de texto, en la página 52, sí se han tomado valores donde $x < 0$; omita estos resultados.

Materiales:
- Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond para resolver el literal c) y d) del Problema inicial y el bloque de problemas.
- Metro o escuadra de madera para trazar las gráficas.

Primero escriba en la pizarra el problema inicial junto con su solución. Después de esto, bórrelo y escriba los ejercicios según el plan de pizarra que sigue.

Fecha: **U3 1.7**

Ⓟ Se tiene una jarra con agua a temperatura de 3 °C; se pone a calentar y la temperatura se eleva 2 °C cada minuto.

a) Completa la siguiente tabla:

x (min)	0	1	2	3	4	5
y (°C)	3					

b) Expresa y como una función lineal de x.

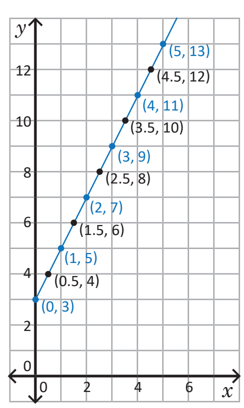
c) Grafica los pares (x, y). Estima otros valores para y y grafica los pares ordenados.

Ⓢ a) Se van sumando 2 °C a la temperatura por cada minuto que transcurre. Los valores de la tabla son 5, 7, 9, 11 y 13 grados centígrados respectivamente.

b) Cada vez que x aumenta una unidad, y aumenta 2, luego:

$$y = 2x + 3$$

c)

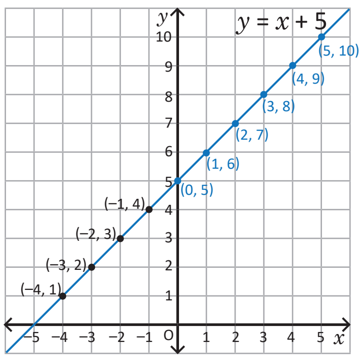


$y = 2x + 3$

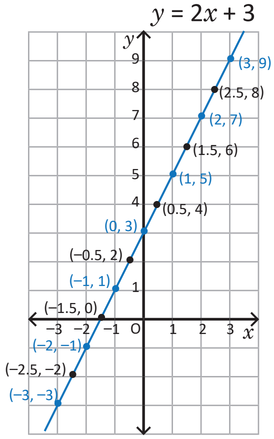
Continuación de la clase 1.7

Solución de algunos ítems:

1. Dado que no aparece ninguna situación, se consideran también valores negativos de x para trazar la gráfica de la función:



2. $y = 2x + 3$

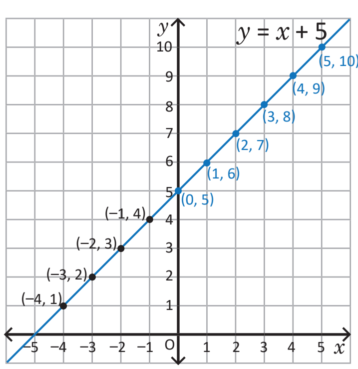


Fecha:

U3 1.7

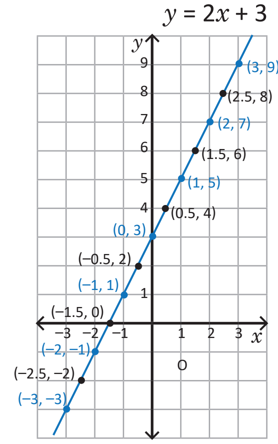
R 1. $y = x + 5$

x	0	1	2	3	4	5
y	5	6	7	8	9	10



2. $y = 2x + 3$

$y = 2x + 3$



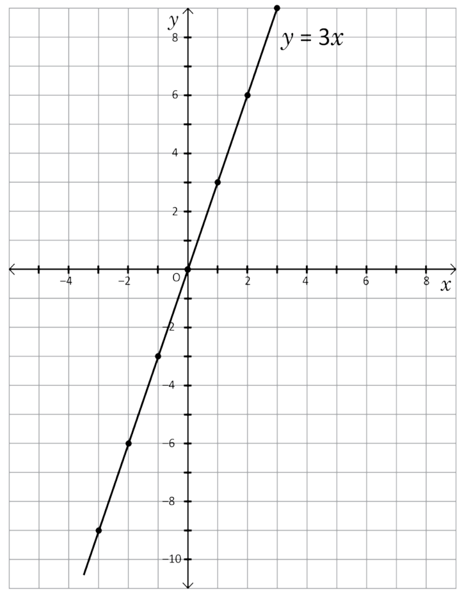
Tarea: página 56 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Relación entre la gráfica de la función $y = ax + b$ y la de $y = ax$

P A partir de la gráfica de $y = 3x$, realiza lo siguiente:

a) Elabora la tabla, complétala y grafica la función $y = 3x + 2$ en el mismo plano que $y = 3x$.

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 3x$	...	−9	−6	−3	0	3	6	9	...
$y = 3x + 2$	...								



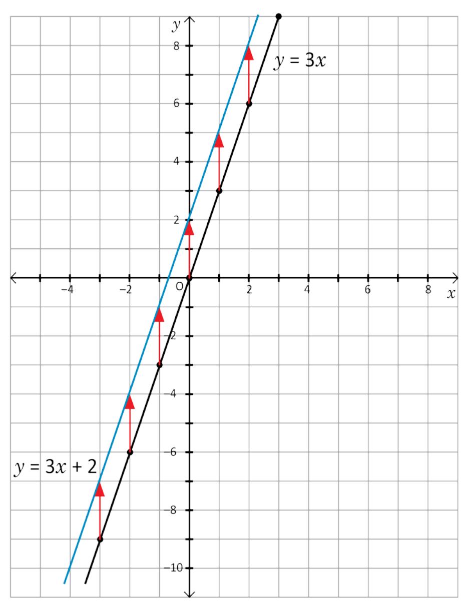
b) Encuentra similitudes y diferencias entre la gráfica de $y = 3x$ y la de $y = 3x + 2$.

c) Compara las gráficas para $x = 0$ y $x = 2$. ¿Qué concluyes?

S a) Asignándole a x los valores enteros desde −3 a 3 y determinando los respectivos valores de y para cada función se puede observar que los valores de $y = 3x + 2$, son el resultado de sumarle 2 a los valores de $y = 3x$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
$y = 3x$	...	−9	−6	−3	0	3	6	9	...
$y = 3x + 2$	...	−7	−4	−1	2	5	8	11	...

b) Al representar los puntos en el plano y unirlos, se tienen las gráficas que se muestran en el plano de la derecha, en ellas se puede ver que ambas corresponden a una línea recta, y tienen razón de cambio 3, pero se diferencian en que $y = 3x$ corta al eje y en 0 y $y = 3x + 2$ corta al eje y en 2.



c) Para $x = 0$ el valor de y en $y = 3x + 2$ es el valor de $y = 3x$ aumentado en 2. Lo mismo sucede para $x = 2$. En general, el valor de y en $y = 3x + 2$ es el de $y = 3x$ aumentado en 2.

Unidad 3

53

C La gráfica de la función $y = ax + b$ pasa por el punto $(0, b)$ y es paralela a la gráfica de la función $y = ax$; entonces, la gráfica de $y = ax + b$, corresponde a la gráfica de $y = ax$ desplazada b unidades sobre el eje y.

- La constante b es el valor de y cuando $x = 0$, y se le llama **intercepto** de la función lineal con el eje y.
- En el caso de las funciones de la forma $y = ax$, donde $b = 0$, el intercepto corresponde al origen del sistema de coordenadas cartesianas, donde $x = 0$ y $y = 0$.
- La gráfica de la función $y = ax + b$ es una recta paralela a la gráfica de la función $y = ax$.

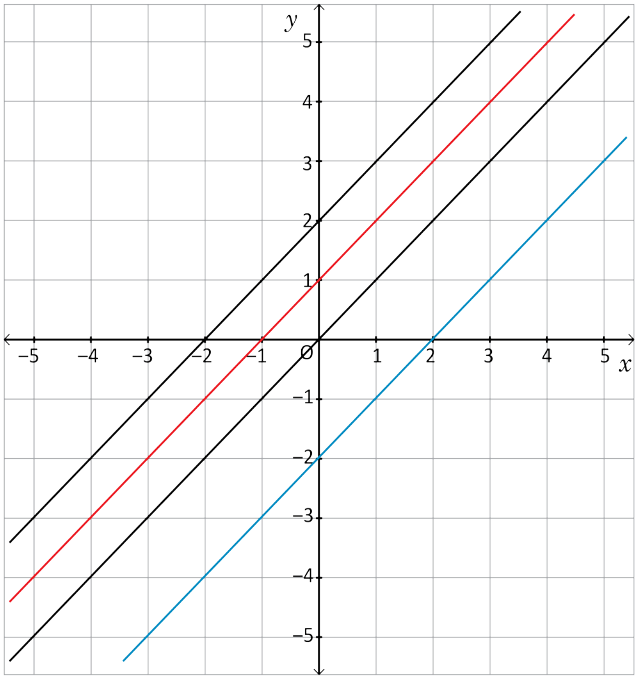
1. Relaciona las siguientes funciones con sus respectivas gráficas, luego identifica diferencias y similitudes.

   a) $y = x + 2$

   b) $y = x - 2$

   c) $y = x + 1$

   d) $y = x$



Recta negra que pasa por (0, 2)
Recta azul que pasa por (0, –2)
Recta roja que pasa por (0, 1)
Recta negra que pasa por (0, 0)

Similitudes: la razón de cambio en todas las funciones es igual a 1, y todas tienen por gráfica una línea recta.

Diferencias: sus interceptos con el eje y tienen diferentes coordenadas.

2. Considerando los resultados encontrados en el Problema inicial, determina qué relación hay entre las gráficas de las funciones.

   a) $y = 2x$

   b) $y = 2x + 3$

   c) $y = 2x - 3$

Las tres funciones tienen por gráfica una línea recta con razón de cambio igual a 2, es decir, son rectas paralelas. Las gráficas de las funciones en b) y c) resultan de desplazar la gráfica de la función en a) 3 y –3 unidades respectivamente sobre el eje y.

Indicador de logro

1.8 Identifica la relación entre las gráficas de las funciones $y = ax$ y $y = ax + b$.

Secuencia

Establecidas las características de la función lineal, en esta clase se pretende comparar la gráfica de $y = ax$ con la de $y = ax + b$ viendo la segunda como un desplazamiento vertical de la primera. Esto sirve como introducción para los desplazamientos verticales y horizontales de las gráficas de funciones que se abordarán en noveno grado y en primero y segundo año de bachillerato.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar las similitudes y diferencias entre las gráficas de las funciones $y = 3x$ y $y = 3x + 2$, visualizando el desplazamiento vertical de dos unidades hacia arriba de la gráfica de la primera para obtener la gráfica de la segunda.

Materiales:

- Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond para resolver el literal a) del Problema inicial y el ejercicio 1 del bloque de problemas.
- Metro o escuadra de madera para trazar las gráficas.

Primero escriba en la pizarra el problema inicial junto con su solución. Después de esto, bórrelo y escriba los ejercicios según el plan de pizarra que se muestra en la siguiente página.

Fecha: **U3 1.8**

Ⓟ a) Completa la siguiente tabla:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3x$	−9	−6	−3	0	3	6	9
$y = 3x + 2$							

b) Encuentra similitudes y diferencias entre las gráficas de $y = 3x$ y $y = 3x + 2$.

c) Compara las gráficas para $x = 0$ y $x = 2$; ¿qué concluyes?

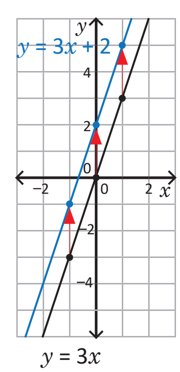
Ⓢ a) Se suma 2 a los resultados de $y = 3x$:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3x$	−9	−6	−3	0	3	6	9
$y = 3x + 2$	−7	−4	−1	2	5	8	11

b) Similitudes: son líneas rectas, con razón de cambio igual a 3.

Diferencias: $y = 3x$ corta al eje y en 0, mientras que $y = 3x + 2$ en 2.

c) El valor de $y = 3x + 2$ es el valor de $y = 3x$ aumentado en dos.



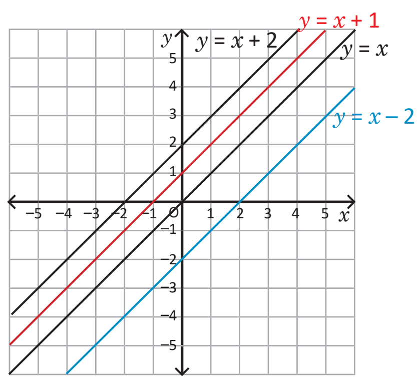
Tarea: página 57 del Cuaderno de Ejercicios.

Posibles dificultades:
En la conclusión se hace referencia a que las gráficas de las funciones lineales $y = ax$ y $y = ax + b$ son paralelas; es posible que deba recordar a sus estudiantes la definición de rectas paralelas:
"Dos rectas son paralelas si, aunque se prolonguen, guardan la misma distancia entre sí".

Fecha:

U3 1.8

R 1.



Similitudes: la razón de cambio es 1, las gráficas son líneas rectas.

Diferencias: sus interceptos con el eje y tienen coordenadas diferentes.

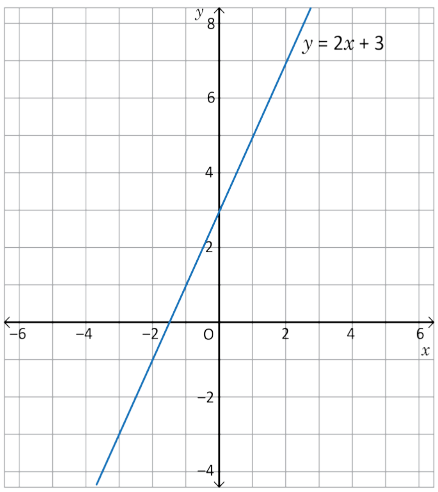
2. Son rectas paralelas con razón de cambio igual a 2 e interceptos con el eje y con coordenadas (0, 0), (0, 3) y (0, –3) respectivamente; b) y c) son el resultado de desplazar la gráfica de a) 3 y –3 unidades respectivamente sobre el eje y.

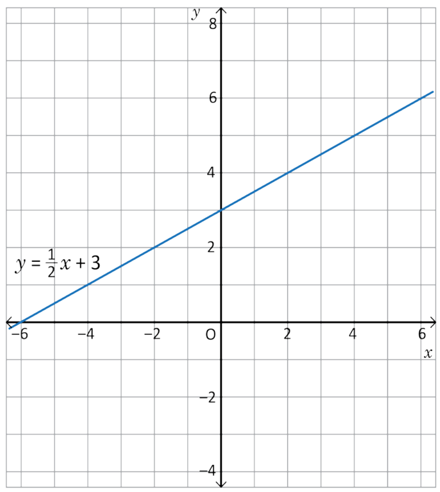
1.9 Análisis gráfico de la pendiente positiva

P

Para la función de cada una de las gráficas, realiza lo siguiente:

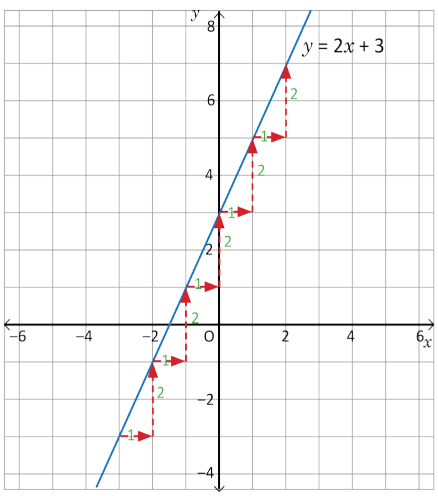
a) ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad u otra cantidad convencional?
b) ¿Qué valor le corresponde a y cuando x vale 8?
c) Determina la razón de cambio.

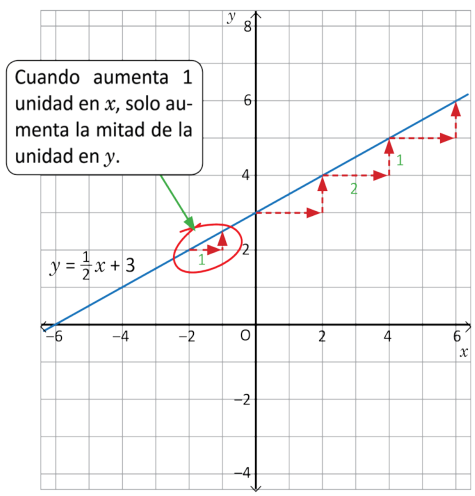




S

a) Al analizar qué sucede con los valores de y cuando x aumenta una unidad, se obtiene que





En la gráfica de $y = 2x + 3$, se puede observar que si x aumenta 1 unidad, y aumenta 2.

En la gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 3$, se dificulta determinar con exactitud cuánto aumenta y cuando x aumenta una unidad. En este caso se puede considerar otros valores, por ejemplo, si x aumenta 2 unidades, y aumenta 1.

b) Para determinar el valor que le corresponde a y, cuando x vale 8, es necesario analizar la gráfica, en donde se tiene que

En la gráfica de $y = 2x + 3$, si $x = 2$, $y = 7$.

- Del literal a) se tiene que por cada unidad que aumenta x, y aumenta 2; entonces, como de 2 a 8 x aumenta 6, y aumenta 12, por tanto, si $x = 8$, $y = 19$.

En la gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 3$, si $x = 2$, $y = 4$.

- Del literal a) se tiene que cada 2 unidades que aumenta x, y aumenta 1, entonces como de 2 a 8 x aumenta 6, entonces y aumenta 3, por tanto, si $x = 8$, $y = 7$.

c) Para determinar la razón de cambio, se sustituye en la expresión:

$$\textbf{\textit{Razón de cambio}} = \frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$$

Para la función $y = 2x + 3$.

Razón de cambio $= \frac{2}{1} = 2$

$a = 2$

Al aumentar 1 en x, y aumenta 2.

Para la función $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Razón de cambio $= \frac{1}{2} = 0.5$

$a = \frac{1}{2}$

Al aumentar 1 en x, y aumenta $\frac{1}{2}$.

C

La inclinación de la gráfica de una función lineal $y = ax + b$, depende del valor de la razón de cambio, entonces cada vez que a aumenta, también aumenta la inclinación de la recta y viceversa.

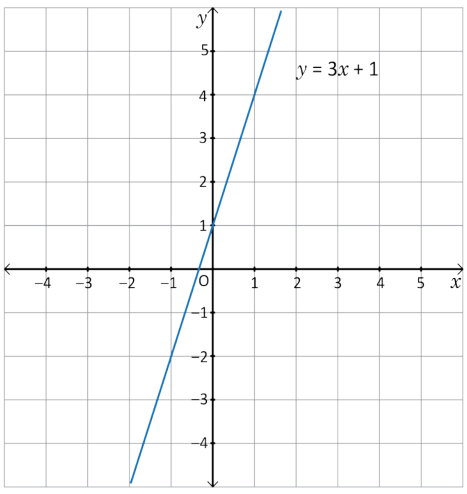
En los ejemplos desarrollados se observa que la inclinación de la gráfica de la función $y = 2x + 3$ es mayor que la de la función $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Por tanto, si se quiere cambiar la inclinación de una línea recta, se modifica únicamente el valor de a en la función $y = ax + b$.

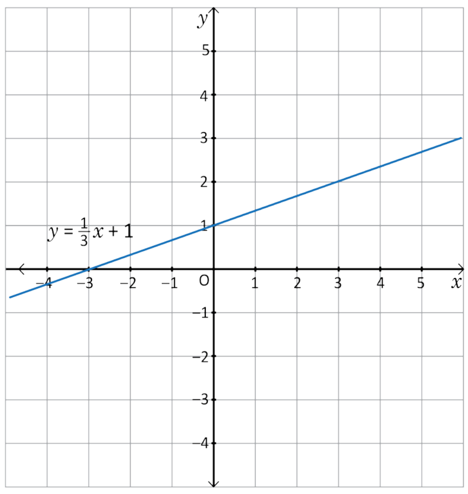
Observa las gráficas de las funciones y responde para cada caso:

a) ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad?
b) ¿Qué valor le corresponde a y, cuando x vale 6?
c) Determina la razón de cambio.

1.



2.



Indicador de logro

1.9 Analiza el significado de la razón de cambio haciendo uso de la gráfica con pendiente positiva.

Secuencia

En esta clase se establece la relación entre la inclinación de la gráfica de la función lineal $y = ax + b$ y el valor del coeficiente de la variable x (o sea, el valor de a) cuando este es positivo.

Propósito

Ⓒ Analizar el cambio de los valores de la función $y = ax + b$, para $a > 0$, cuando la variable independiente x cambia una medida convencional, e identificar resultados en la gráfica de la función.

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no logran realizar el literal a) del Problema inicial se debe indicar que coloquen un punto sobre la gráfica de la función cuyas coordenadas sean enteras. Luego plantee la siguiente interrogante: “si en la función $y = 2x + 3$, a partir del punto nos desplazamos una unidad hacia la derecha, ¿cuántas unidades debemos desplazarnos hacia arriba para coincidir nuevamente con la función?”

Esto servirá para visualizar que deben moverse dos unidades hacia arriba y concluir que cuando x aumenta una unidad, y aumenta 2. De forma similar para la segunda función, solo debe cuidar que ahora x puede aumentar más de una unidad.

Materiales:
- Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond con las gráficas del Problema inicial y del bloque de problemas.
- Metro o escuadra de madera para trazar las gráficas.

Primero escriba en la pizarra el problema inicial junto con su solución. Después de esto, bórrelo y escriba los ejercicios según el plan de pizarra que sigue.

Fecha:

U3 1.9

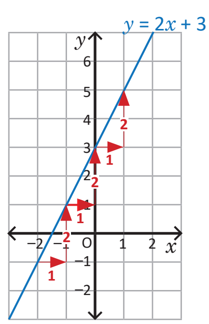
Ⓟ Con las gráficas de $y = 2x + 3$ y $y = \frac{1}{2}x + 3$:

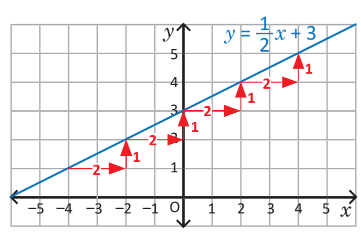
a) ¿Qué sucede con y cuando x aumenta una unidad u otra cantidad convencional?

b) ¿Cuál es el valor de y si $x = 8$?

c) Determina la razón de cambio

Ⓢ a) En $y = 2x + 3$: si x aumenta 1 unidad entonces y aumenta 2 unidades.





En $y = \frac{1}{2}x + 3$: si x aumenta 2 unidades entonces y aumenta 1 unidad.

b) Al analizar las gráficas, si $x = 8$ en $y = 2x + 3$ resulta $y = 19$, mientras que en $y = \frac{1}{2}x + 3$ resulta $y = 7$.

c) En $y = 2x + 3$, $a = 2$; mientras que en $y = \frac{1}{2}x + 3$, $a = \frac{1}{2}$.

Continuación de la clase 1.9

Solución de algunos ítems:

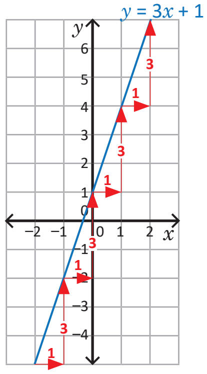
1. a) y aumenta 3 unidades
   b) $y = 19$
   c) Razón de cambio: 3

2. a) y aumenta $\frac{1}{3}$ unidades
   b) $y = 3$
   c) Razón de cambio: $\frac{1}{3}$

Fecha:

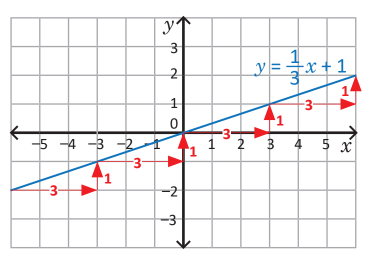
U3 1.9

Ⓡ 1.



a) y aumenta 3
b) $y = 19$
c) Razón de cambio: $a = 3$

2.



a) y aumenta $\frac{1}{3}$
b) $y = 3$
c) Razón de cambio: $a = \frac{1}{3}$

Tarea: página 58 del Cuaderno de Ejercicios.

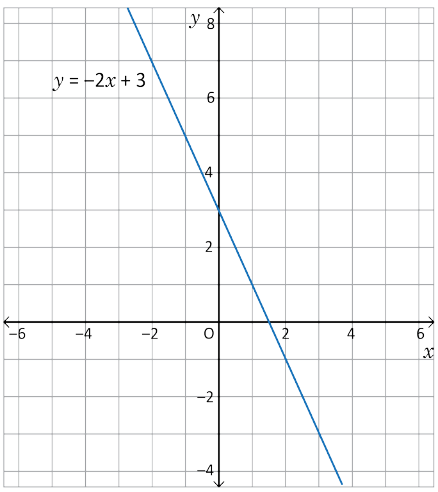
1.10 Análisis gráfico de la pendiente negativa

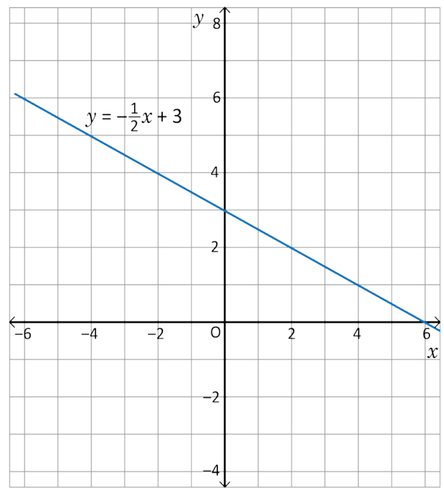
P

Para la función de cada una de las gráficas, realiza lo siguiente:

a) Analiza, ¿qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad u otra cantidad convencional?

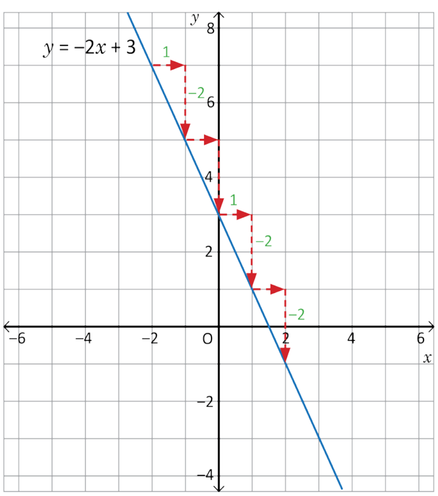
b) Determina la razón de cambio.

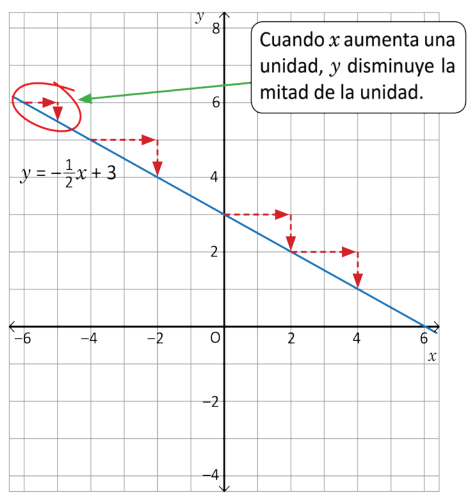




S

a) Al analizar qué sucede con los valores de y cuando x aumenta una unidad, se obtiene que





En la gráfica de $y = -2x + 3$, se puede observar que si x aumenta 1 unidad, y disminuye 2.

En la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 3$, se dificulta determinar con exactitud cuánto aumenta y cuando x aumenta una unidad. En este caso se puede considerar otros valores, por ejemplo, si x aumenta 2 unidades, y disminuye 1.

Unidad 3

57

b) Para calcular la razón de cambio (***Razón de cambio*** = $\frac{\textit{Variación en } y}{\textit{Variación en } x}$), se tiene:

Para la función $y = -2x + 3$.

Razón de cambio = $\frac{-2}{1} = -2$

$a = -2$

Al aumentar 1 en x, y disminuye 2.

Para la función $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Razón de cambio = $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ -0.5

$a = -\frac{1}{2}$

Al aumentar 1 en x, y disminuye 0.5 o $\frac{1}{2}$.

C Al aumentar una unidad en la variable x, la variable y disminuye; entonces, la razón de cambio es negativa, es decir, cada vez que se desplaza una unidad a la derecha en la dirección del eje x, la línea recta que corresponde a la gráfica de la función se desplaza hacia abajo tantas unidades como el valor de la razón de cambio.

Por tanto, para una función $y = ax + b$ se tiene que

- **Si $a > 0$, al aumentar 1 unidad en x, y aumenta a unidades.**
  Ejemplo: para $y = 3x + 2$, $a > 0$, entonces cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 3 unidades.

- **Si $a < 0$, al aumentar 1 unidad en x, y disminuye $-a$ unidades.**
  Ejemplo: para $y = -3x + 2$, $a < 0$, entonces cuando x aumenta 1 unidad, y disminuye 3 unidades.

Observa las gráficas de las funciones y responde para cada caso:

a) ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta una unidad?
b) Determina la razón de cambio.

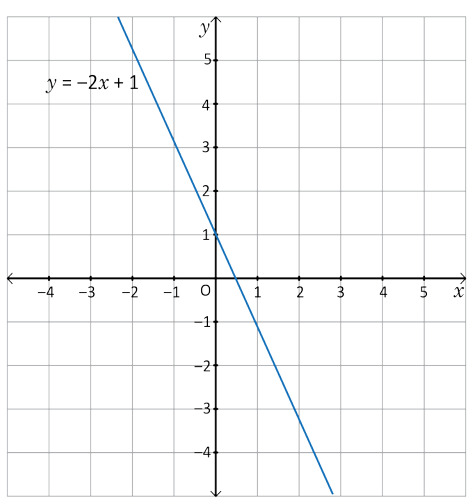


Gráfico 1

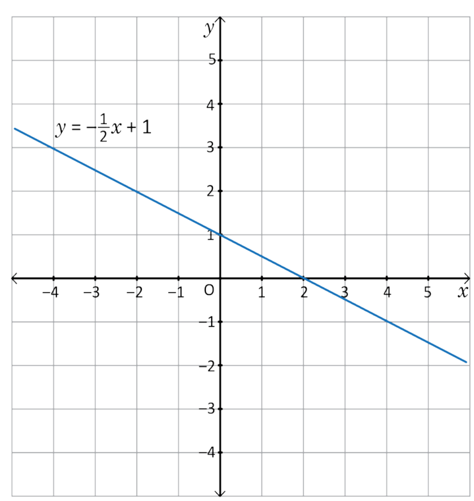


Gráfico 2

Indicador de logro

1.10 Resuelve situaciones mediante el análisis de la razón de cambio haciendo uso de gráficas con pendiente 1negativa.

Secuencia

En la clase anterior se relacionó la razón de cambio de una función lineal con la inclinación de su recta, cuando el valor del coeficiente de la variable independiente es positivo. Para esta clase se hará un análisis similar, con la variante de que la razón de cambio de las funciones presentadas son negativas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Analizar el cambio de los valores de la función $y = ax + b$, para $a < 0$, cuando la variable independiente x cambia una medida convencional, e identificar resultados en la gráfica de la función.
Ⓒ, Determinar el aumento o disminución de $y = ax + b$ a partir del aumento de x y del valor de la razón de cambio de la función lineal.

Primero escriba en la pizarra el problema inicial junto con su solución. Después de esto, bórrelo y escriba los ejercicios según el plan de pizarra que sigue.

Fecha:

U3 1.10

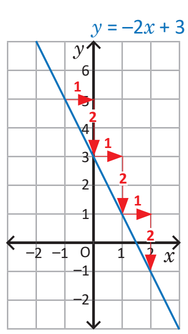
Ⓟ Con las gráficas de $y = -2x + 3$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$:

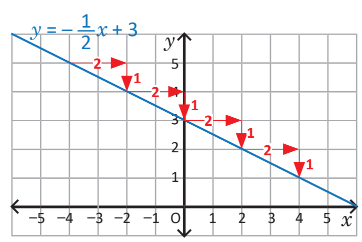
a) ¿Qué sucede con y cuando x aumenta una unidad u otra cantidad convencional?

b) Determina la razón de cambio.

Ⓢ

a) En $y = -2x + 3$: si x aumenta 1 unidad entonces y disminuye 2 unidades.





En $y = -\frac{1}{2}x + 3$: si x aumenta 2 unidades entonces y disminuye 1.

b) En $y = -2x + 3$, $a = -2$; mientras que en $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $a = -\frac{1}{2}$.

Continuación de la clase 1.10.

Solución de algunos ítems:

Gráfico 1

a) y disminuye dos unidades

b) Razón de cambio: –2

Gráfico 2

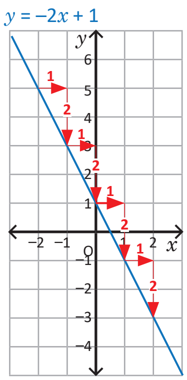
a) y disminuye $\frac{1}{2}$ unidad

b) Razón de cambio: $-\frac{1}{2}$

Fecha:

U3 1.10

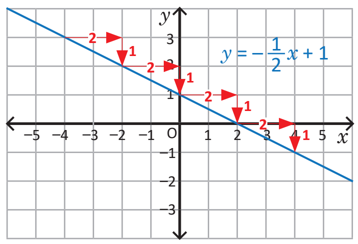
Ⓡ 1.



a) y disminuye 2

b) Razón de cambio: $a = -2$

2.



a) y disminuye $\frac{1}{2}$

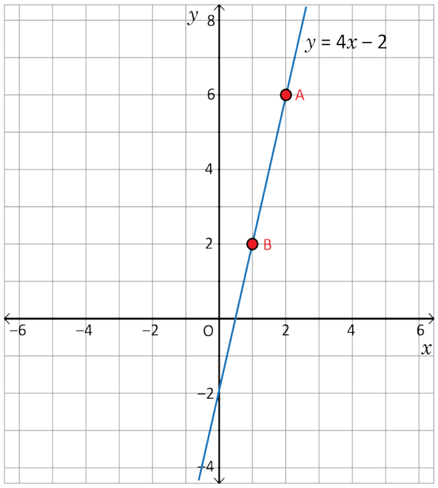
c) Razón de cambio: $a = -\frac{1}{2}$

Tarea: página 59 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Relación entre la razón de cambio y pendiente de la gráfica de $y = ax + b$

P

Para la función $y = 4x - 2$, realiza lo siguiente:



a) Determina la razón de cambio mediante conteo de unidades.

b) Determina la diferencia entre los valores de x y y, toma como referencia las coordenadas de los dos puntos indicados.

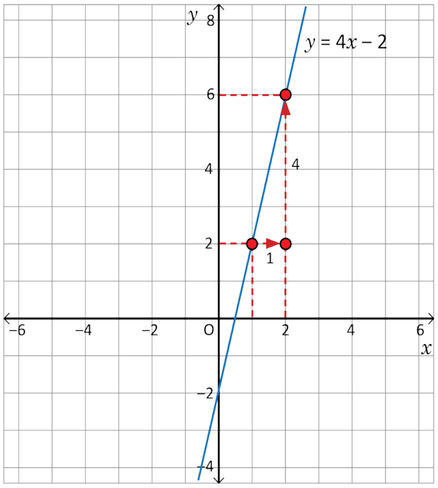
c) Calcula el cociente entre la diferencia de los valores de las coordenadas en y, con la diferencia de los valores de las coordenadas en x.

d) Compara el resultado obtenido en los literales a) y c), ¿qué concluyes?

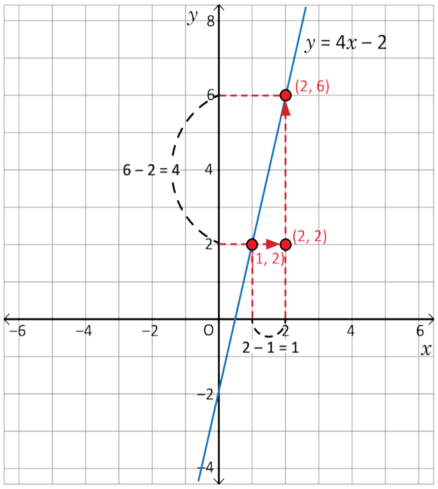
S

a) Al determinar la razón de cambio mediante conteo de unidades que incrementa y, cuando x aumenta 1 unidad, se tiene:

Razón de cambio $= \frac{4}{1} = 4$



b) Para determinar la diferencia entre los valores de las coordenadas en x y y, se restan las coordenadas de los dos puntos seleccionados (Punto A y B).



Diferencia en $y = 6 - 2 = 4$.
Diferencia en $x = 2 - 1 = 1$.

c) Al calcular el cociente entre la diferencia de los valores de las coordenadas en y, con la diferencia en los valores de las coordenadas en x, se tiene:

$$\frac{\text{Diferencia en } y}{\text{Diferencia en } x} = \frac{4}{1} = 4$$

d) Al comparar los resultados obtenidos en el literal a) y en el literal c) se observa que los resultados son iguales.

Unidad 3

C

En la gráfica de la función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio coincide con el valor de la pendiente y puede determinarse mediante el cálculo del cociente del incremento para cada una de las coordenadas x y y de dos puntos dados.

Por ejemplo, para una función $y = 4x - 2$, que pasa por los puntos (1, 2) y (2, 6), se tiene:

$$\textbf{Razón de cambio = Pendiente} = \frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

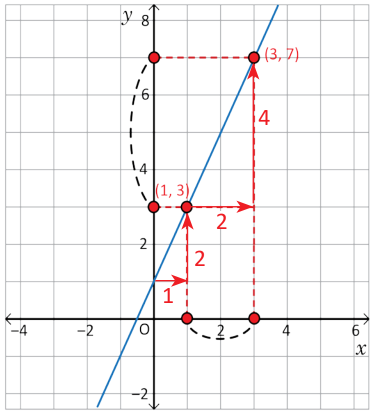
- Para cualquier función que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la pendiente se calcula mediante la fórmula:

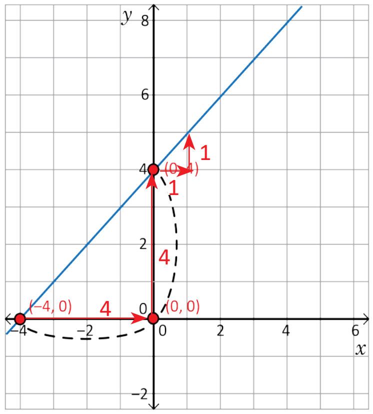
$$\textbf{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- El coeficiente $\boldsymbol{a}$ en la función $y = ax + b$, corresponde a la pendiente de la línea recta de la gráfica de la función, la cual tiene el mismo valor que la razón de cambio.

Para cada una de las funciones mostradas en las gráficas siguientes realiza lo que se indica a continuación:

a) ¿Puedes determinar, cuántas unidades avanza en y cuando x avanza 1 unidad? Justifica tu respuesta.
b) Calcula el incremento en x y y, considerando las coordenadas de los puntos indicados.
c) Calcula la pendiente de la función de cada gráfica.





En la vida cotidiana se hace uso de la pendiente en diferentes contextos; por ejemplo, una pendiente se encuentra en la inclinación de un techo, de una carretera, o bien de una escalera apoyada en una pared. En matemática se usa la palabra pendiente para definir, de forma particular, el grado de inclinación de algo.

En la figura se muestra una obra arquitectónica donde se puede observar claramente el uso de la pendiente de la línea recta, en este ejemplo el puente más grande del mundo, fabricado con hormigón armado en Millau, Francia.

Indicador de logro

1.11 Identifica la relación entre la razón de cambio y la pendiente en la función lineal.

Secuencia

Como en clases anteriores se ha establecido la relación entre la razón de cambio de la función lineal y la inclinación de su recta, en esta clase se abordará el concepto de **pendiente de una recta**, vinculándolo a la razón de cambio de la misma, y en consecuencia, al valor del coeficiente de la variable independiente x en la ecuación de la función.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Calcular la razón de cambio de una función lineal haciendo uso de la gráfica de la misma y contando las unidades que aumenta y cuando x aumenta una unidad. Comparar dicho valor con el resultado del cociente de la diferencia de las coordenadas en y entre la diferencia de las coordenadas en x de dos puntos sobre la gráfica de la función.

Posibles dificultades:
Puede que los estudiantes no comprendan el literal a) del Problema inicial, en este caso indicarles que calcular la razón de cambio mediante el conteo de unidades equivale a aumentar una unidad en x y ver cuántas aumenta y (hacer uso de la gráfica de la función).

Primero escriba en la pizarra el problema inicial junto con su solución. Después de esto, bórrelo y escriba los ejercicios según el plan de pizarra que sigue.

Fecha: **U3 1.11**

Ⓟ Para la función $y = 4x - 2$:

a) Determina la razón de cambio mediante el conteo de unidades.

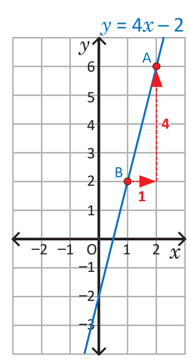
b) Determina la diferencia entre los valores de x y y para los puntos A(2, 6) y B(1, 2).

c) Calcula el cociente entre la diferencia de los valores de las coordenadas en y con la diferencia de los valores de las coordenadas en x, y compara lo resultados de a) y c); ¿qué concluyes?

Ⓢ a) Cuando x aumenta una unidad entonces y aumenta 4, luego la razón de cambio es 4.

b) Diferencia en y:
$6 - 2 = 4$
Diferencia en x:
$2 - 1 = 1$

c) $\dfrac{\text{Diferencia en } y}{\text{Diferencia en } x} = 4$



Los resultados obtenidos en los literales a) y c) son iguales.

Continuación de la clase 1.11.

Solución de algunos ítems:

Gráfico 1

a) y avanza dos unidades hacia arriba.

b) Con los puntos (1, 3) y (3, 7) se observa que el incremento en x es 3 – 1 = 2; mientras que en y es 7 – 3 = 4.

c) Pendiente = $\frac{4}{2}$ = 2

Gráfico 2

a) y avanza una unidad hacia arriba.

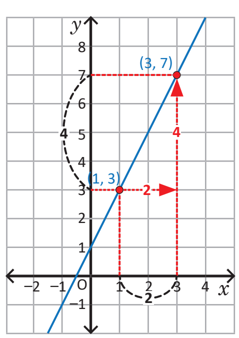
b) Con los puntos (–4, 0) y (0, 4) se observa que el incremento en x es 0 – (–4) = 4; mientras que en y es 4 – 0 = 4.

c) Pendiente = $\frac{4}{2}$ = 1.

Fecha:

U3 1.11

R

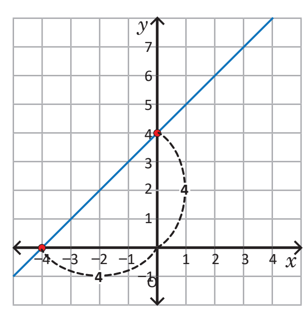


a) Avanza 2

b) Incremento en x: 7 – 3 = 4

Incremento en y: 3 – 1 = 2

c) Pendiente = $\frac{4}{2}$ = 2



a) Avanza 1

b) Incremento en y: 4 – 0 = 4

Incremento en x: 0 – (–4) = 4

c) Pendiente = $\frac{4}{4}$ = 1

Tarea: página 61 del Cuaderno de Ejercicios.

1.12 Pendiente e intercepto de la gráfica de la función $y = ax + b$

P

Para cada una de las funciones, calcula la pendiente y determina el valor de y donde la gráfica corta al eje y, analizando la gráfica.

1. $y = 2x - 1$
2. $y = -3x + 2$

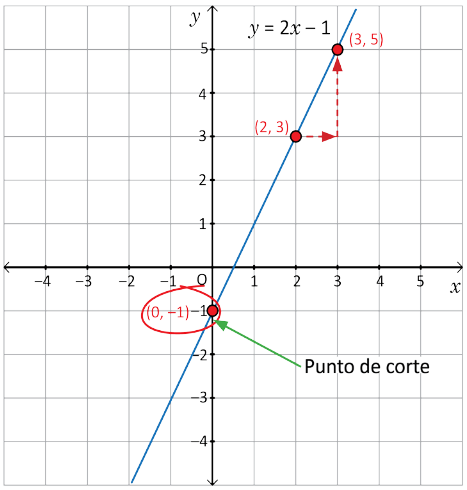
S

Para determinar la pendiente de una función, únicamente se identifica el valor de a; mientras que el valor de b corresponde al valor de y donde la gráfica corta al eje y, así para las funciones dadas se tiene:

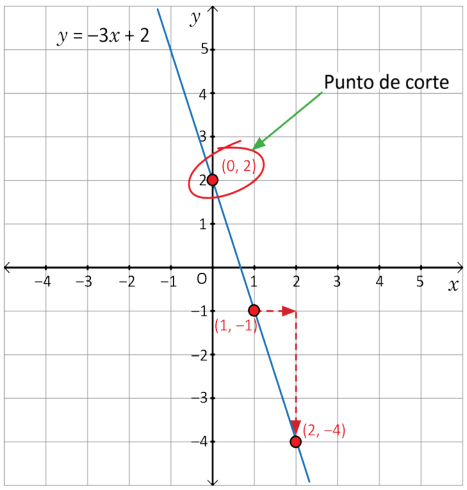
1. $y = 2x - 1$
   Pendiente: $a = 2$
   Corte con el eje y: $b = -1$
2. $y = -3x + 2$
   Pendiente: $a = -3$
   Corte con el eje y: $b = 2$

Al graficar las funciones se tiene:

1.



2.



C

Para identificar la pendiente y el punto de corte de la gráfica de la función $y = ax + b$ con el eje y, únicamente es necesario considerar que el valor del coeficiente a indica la pendiente, y la constante b corresponde al valor de y donde la gráfica corta al eje y. Al valor donde la gráfica corta al eje y se le llama **intercepto**.

- Así la función $y = ax + b$, tiene: Pendiente: a
  Intercepto con el eje y: b

b, corresponde gráficamente al punto $(0, b)$.

- Por ejemplo, la gráfica de la función $y = 3x - 5$, tiene: Pendiente: 3
  Intercepto con el eje y: – 5

1. Para cada una de las funciones, identifica la pendiente y el intercepto con el eje y.

a) $y = 3x + 2$　b) $y = -2x + 1$　c) $y = 5x - 2$　d) $y = 2x - 5$
e) $y = x + 4$　f) $y = x - 2$　g) $y = -x + 6$　h) $y = \frac{1}{2}x + 3$

2. Identifica la pendiente e indica el intercepto con el eje y.

a) $y = 3x$
Pendiente: 3
Intercepto: 0

b) $y = 2x$
Pendiente: 2
Intercepto: 0

c) $y = -2x$
Pendiente: –2
Intercepto: 0

d) $y = x$
Pendiente: 1
Intercepto: 0

Indicador de logro

1.12 Identifica la pendiente y el intercepto de una función $y = ax + b$.

Secuencia

Para esta clase se estudia cómo identificar la pendiente de una recta y las coordenadas del intercepto de esta con el eje y a partir de la ecuación de la función lineal.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Calcular el valor de la pendiente de la gráfica de una función lineal y la coordenada en y del intercepto de la gráfica con el eje y utilizando la ecuación de la función.

Ⓒ Definir el valor de la pendiente y de la segunda coordenada del punto de intersección de la gráfica de una función lineal con el eje y a partir de la ecuación de la función.

Solución de algunos ítems:

Primer ítem

a) Pendiente 3; intercepto 2
b) Pendiente –2; intercepto 1
c) Pendiente 5; intercepto –2
d) Pendiente 2; intercepto –5
e) Pendiente 1; intercepto 4
f) Pendiente 1; intercepto –2
g) Pendiente –1; intercepto 6
h) Pendiente $\frac{1}{2}$; intercepto 3

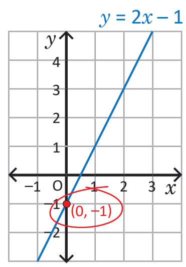
Materiales:
- Plano cartesiano dibujado sobre un pliego de papel bond para ilustrar las gráficas de las funciones del Problema inicial.
- Metro o escuadra de madera para trazar las gráficas.

Fecha: **U3 1.12**

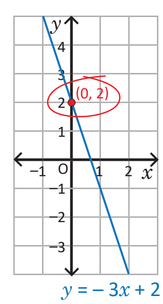
P Para cada función calcula la pendiente y determina gráficamente el valor de y donde la recta corta al eje y:

S 1. $y = 2x - 1$ 2. $y = -3x + 2$

1. Pendiente: $a = 2$
Corte con el eje y: $b = -1$



2. Pendiente: $a = -3$
Corte con el eje y: $b = 2$



R

a) $a = 3$, $b = 2$
b) $a = -2$, $b = 1$
c) $a = 5$, $b = -2$
d) $a = 2$, $b = -5$
e) $a = 1$, $b = 4$
f) $a = 1$, $b = -2$
g) $a = -1$, $b = 6$
h) $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$

Tarea: página 63 del Cuaderno de Ejercicios.

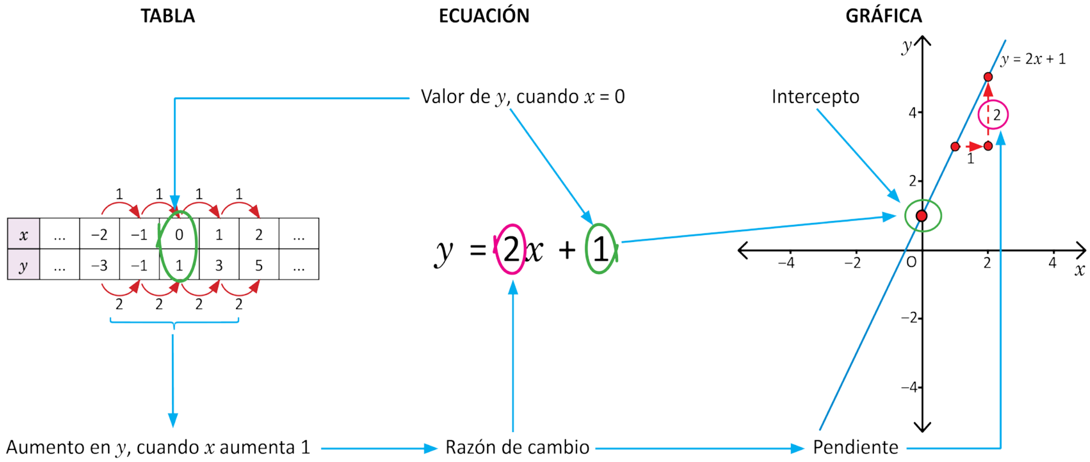
1.13 Relación entre tabla, ecuación y gráfica de función lineal

P

Para la función $y = 2x + 1$, identifica la relación entre las siguientes representaciones: tabla, ecuación y gráfica.

S

Al analizar la función $y = 2x + 1$ y comparar la respectiva tabla para algunos valores de x con la ecuación y la gráfica, se puede observar lo siguiente:



C

En el diagrama anterior que relaciona la tabla, ecuación y gráfica de la función $y = ax + b$, se puede observar que

Tabla	Ecuación	Gráfica
Valor de y, cuando $x = 0$	b	Intercepto con el eje y
Aumento en y, al aumentar 1 unidad en x	a	Pendiente

Para cada una de las funciones, determina el valor de a, b y el intercepto, luego identifica la relación entre las siguientes representaciones: tabla, ecuación y gráfica.

a) $y = 3x + 1$
$a = 3$, $b = 1$
Intercepto (0, 1)

b) $y = 4x - 3$
$a = 4$, $b = -3$
Intercepto (0, −3)

c) $y = -2x + 5$
$a = -2$, $b = 5$
Intercepto (0, 5)

d) $y = -3x - 4$
$a = -3$, $b = -4$
Intercepto (0, −4)

e) $y = 5x - 4$
$a = 5$, $b = -4$
Intercepto (0, −4)

f) $y = -2x - 1$
$a = -2$, $b = -1$
Intercepto (0, −1)

g) $y = 2x - 3$
$a = 2$, $b = -3$
Intercepto (0, −3)

h) $y = -4x + 1$
$a = -4$, $b = 1$
Intercepto (0, 1)

i) $y = -5x + 3$
$a = -5$, $b = 3$
Intercepto (0, 3)

Indicador de logro

1.13 Identifica la relación entre los elementos de la tabla, la ecuación y la gráfica de la función lineal.

Secuencia

Hasta este punto de la lección se han establecido características de una función lineal, en principio utilizando tablas para deducir la ecuación de la función y trazar la gráfica de la misma. Para esta clase se retoman todas estas herramientas (tabla, ecuación y gráfica) para determinar las relaciones entre ellas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ, Ⓒ Analizar la relación entre las herramientas utilizadas para definir una función lineal: tablas de valores, ecuación de la función y gráfica de la función; identificando la razón de cambio, el valor de las constantes a y b en $y = ax + b$ y la pendiente e intercepto con el eje x de la recta.

Ⓔ Fijar los conocimientos sobre la relación entre la tabla, la ecuación y la gráfica de una función lineal.

Solución de algunos ítems:

En todos los literales, la relación entre la tabla, la ecuación y la gráfica de la función es la misma que se ha descrito en la Conclusión.

Materiales:
- Tabla sobre papel bond para escribir los valores de la función $y = 2x + 1$ como la que presenta la Solución del Problema inicial.
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond para trazar la gráfica de la función $y = 2x + 1$.

Fecha: **U3 1.13**

Ⓟ Para la función $y = 2x + 1$, identifica la relación entre: tabla, ecuación y gráfica.

Ⓢ

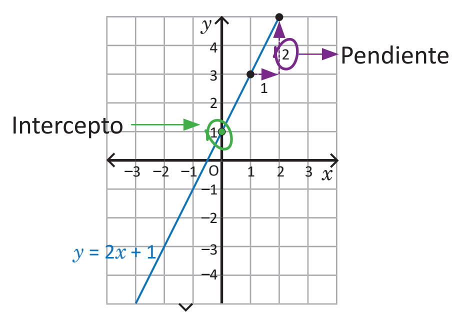
Valor de y cuando $x = 0$

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	2	5

Aumento en y cuando x aumenta 1: 2, 2

$$y = 2x + 1$$

Razón de cambio



Ⓡ a) $a = 3$, $b = 1$, intercepto $(0, 1)$
b) $a = 4$, $b = -3$, intercepto $(0, -3)$
c) $a = -2$, $b = 5$, intercepto $(0, 5)$
d) $a = -3$, $b = -4$, intercepto $(0, -4)$
e) $a = 5$, $b = -4$, intercepto $(0, -4)$

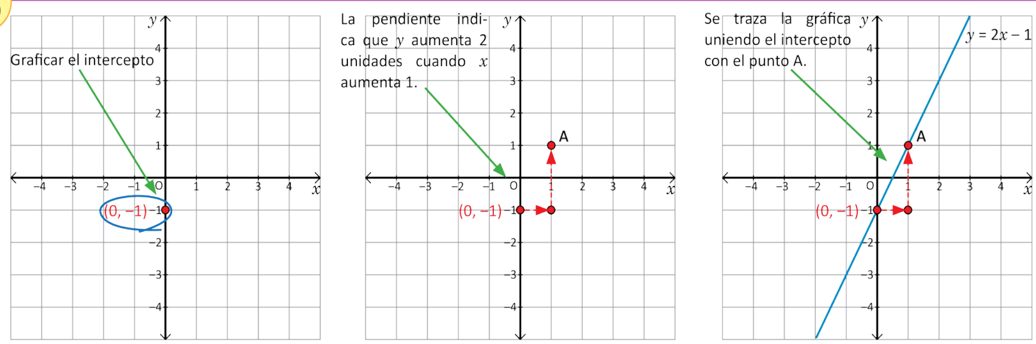
Tarea: página 64 del Cuaderno de Ejercicios.

1.14 Trazo de la gráfica de la función lineal dada la pendiente y el intercepto

P

Traza el gráfico de la función $y = ax + b$, si $a = 2$ y $b = -1$.

S



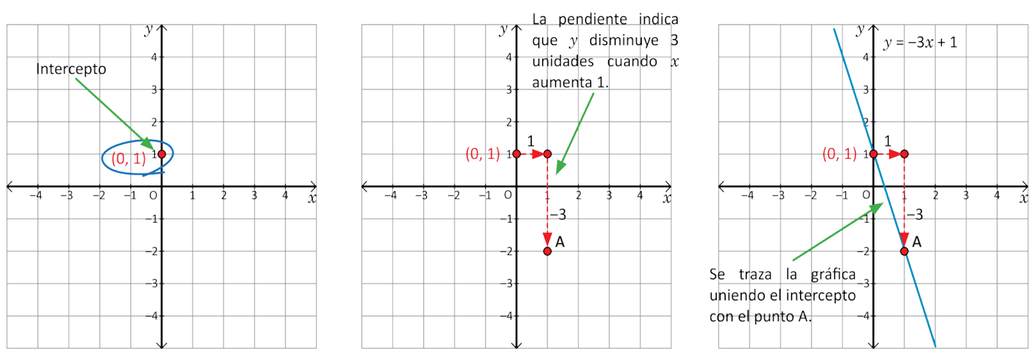
C

Para graficar una función $y = ax + b$, dado el valor de a y b, se coloca el punto (0, b), luego se determina un nuevo punto por donde pasa la gráfica a partir de la pendiente, considerando la variación en x y la variación en y, tal como se ha desarrollado en el ejemplo anterior.

E

Identifica el valor de a y b en la función $y = -3x + 1$, luego grafícala.

Solución.
Al comparar la función $y = -3x + 1$ con la expresión de la función lineal $y = ax + b$, se tiene que $a = -3$ y $b = 1$.



1. Traza la gráfica de la función $y = ax + b$ en cada caso.

   a) Si $a = 3$ y $b = -2$
   b) Si $a = -2$ y $b = 1$

2. Para cada una de las funciones, identifica el valor de a y b, luego grafícalas.

   a) $y = 3x + 1$
   $a = 3,\ b = 1$

   b) $y = 2x - 2$
   $a = 2,\ b = -2$

   c) $y = -2x + 3$
   $a = -2,\ b = 3$

   d) $y = 2x - 3$
   $a = 2,\ b = -3$

   e) $y = x + 3$
   $a = 1,\ b = 3$

   f) $y = x - 2$
   $a = 1,\ b = -2$

   g) $y = \frac{1}{2}x + 3$
   $a = \frac{1}{2},\ b = 3$

   h) $y = -\frac{1}{3}x - 3$
   $a = -\frac{1}{3},\ b = -3$

Unidad 3

Indicador de logro

1.14 Traza el gráfico de la función $y = ax + b$, dado el valor de a y b.

Secuencia

En esta clase se traza la gráfica de una función lineal $y = ax + b$ a partir de los valores de a y b en la ecuación de la función, colocando el punto de intersección de la recta con el eje y e interpretando el valor de la razón de cambio.

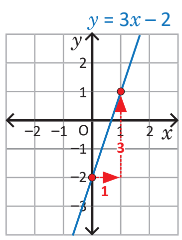
Propósito

Ⓟ, Trazar la gráfica de la función lineal $y = 2x - 1$, colocando sobre el plano cartesiano el intercepto (0, –1); a partir de este encontrar las coordenadas de otro punto sobre la gráfica de la recta interpretando el valor de la razón de cambio en la ecuación de la función.

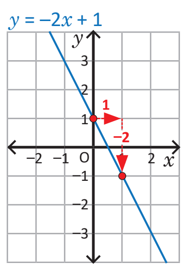
Ⓢ, Ⓒ Determinar y ejemplificar los pasos para graficar una función lineal:
$y = ax + b$ a partir de los valores de a y b.

Solución de algunos ítems:

1. a) $a = 3$ y $b = -2$



b) $a = -2$ y $b = 1$



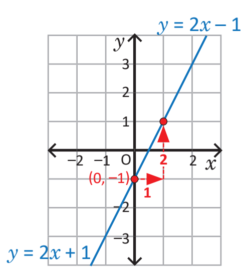
Materiales:
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond para trazar la gráfica de la función $y = 2x - 1$ del Problema inicial y las gráficas del ejercicio 1 del bloque de problemas.
- Metro o escuadra de madera para trazar las gráficas.

Fecha:

U3 1.14

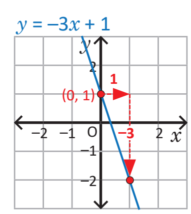
Ⓟ Traza el gráfico de $y = ax + b$ si $a = 2$ y $b = -1$.

Ⓢ $a = 2$ indica que y aumenta 2 unidades cuando x aumenta 1; $b = -1$ indica que el intercepto es (0, –1). Luego:

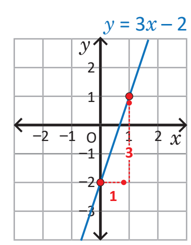


Ⓔ Identifica a y b y grafica la función $y = -3x + 1$

$a = -3$ y $b = 1$; si x aumenta 1 unidad entonces y disminuye 3, y el intercepto es (0, 1).



Ⓡ 1. a) $a = 3$, $b = -2$



Tarea: página 65 del Cuaderno de Ejercicios.

1.15 Relación entre la ecuación y gráfica de la función lineal

P

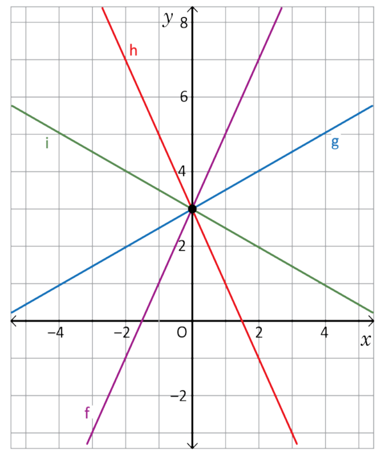
Relaciona cada función con su respectiva gráfica, considera el valor de a y b para justificar tu respuesta.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$



S

Al observar la ecuación de las 4 funciones, se tiene que todas intersecan al eje y en $y = 3$, pues tienen $b = 3$; es decir, pasan por el punto (0, 3), esto se puede verificar en la gráfica.

Al analizar el valor de a para cada función, se tiene:

a) La función $y = 2x + 3$, tiene $a = 2$, lo que indica que cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 2 (ver gráfico 1).

b) La función $y = \frac{1}{2}x + 3$, tiene $a = \frac{1}{2}$, lo que indica que cuando x aumenta 2 unidades, y aumenta 1 (ver gráfico 2).

c) La función $y = -2x + 3$, tiene $a = -2$, lo que indica que cuando x aumenta 1 unidad, y disminuye 2 (ver gráfico 3).

d) La función $y = -\frac{1}{2}x + 3$, tiene $a = -\frac{1}{2}$, lo que indica que cuando x aumenta 2 unidades, y disminuye 1 (ver gráfico 4).

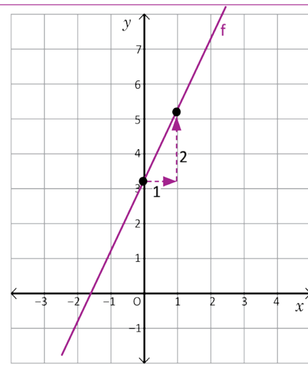


Gráfico 1

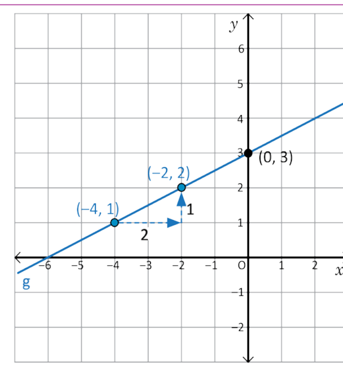


Gráfico 2

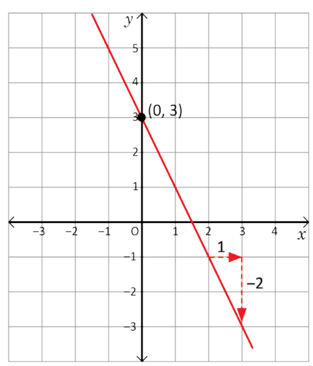


Gráfico 3

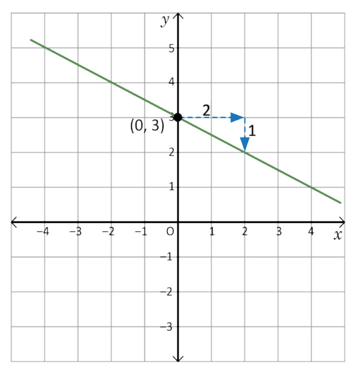


Gráfico 4

C

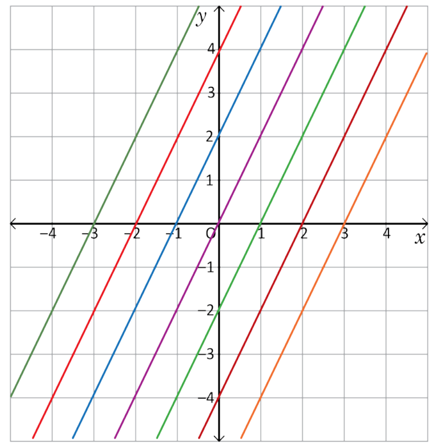
Para relacionar la gráfica de una función lineal con la respectiva expresión matemática, únicamente se debe relacionar:

- El valor de b con el punto de intersección de la gráfica con el eje y.
- El valor de a con la variación de y cuando x aumenta una unidad.

Para el ejemplo desarrollado, como todas las funciones tienen igual valor de b, pasan por el mismo punto (0, b), donde intersecan al eje y.

E Grafica en el mismo plano las siguientes funciones, luego analiza tus resultados. ¿Qué concluyes?

a) $y = 2x$
b) $y = 2x + 2$
c) $y = 2x + 4$
d) $y = 2x + 6$
e) $y = 2x - 2$
f) $y = 2x - 4$
g) $y = 2x - 6$

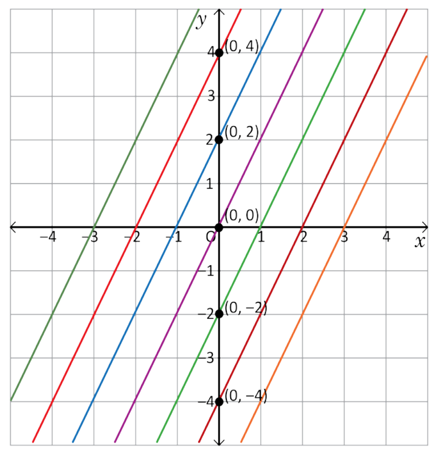


Solución.

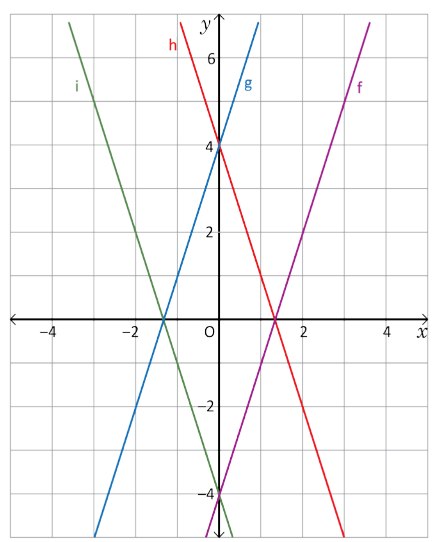
- Al observar la ecuación de las 7 funciones, se tiene que todas tienen la misma pendiente $a = 2$; es decir, por cada unidad que aumenta x, y aumenta 2.

- En este caso, la pendiente no permite establecer relación entre la gráfica y la ecuación de la función. Entonces, se establecerá la relación entre gráfica y la ecuación relacionando el valor de b con el punto de intersección de la gráfica con el eje y.

- Al realizar la relación de cada función con su respectiva gráfica, se puede concluir que si la pendiente de las funciones es la misma y únicamente cambia el valor de b, las gráficas son rectas paralelas.



1. Relaciona cada función con su respectiva gráfica, considera el valor de a y b para justificar tu respuesta.
   a) $y = 3x + 4$ Recta g
   b) $y = 3x - 4$ Recta f
   c) $y = -3x + 4$ Recta h
   d) $y = -3x - 4$ Recta i



2. Analiza las siguientes funciones y describe qué relación existe entre las gráficas de a) y b) y las de c) y d).
   a) $y = 4x + 4$
   b) $y = 4x - 4$
   c) $y = 5x + 1$
   d) $y = 5x - 1$

   a) y b) son paralelas

   c) y d) son paralelas

Indicador de logro

1.15 Relaciona la ecuación de la función con la gráfica de la función $y = ax + b$.

Secuencia

Para esta clase se relaciona la ecuación de una función lineal $y = ax + b$ con su respectiva gráfica, utilizando los componentes vistos en las clases anteriores, es decir, relacionando la razón de cambio con la pendiente y el valor de b con el intercepto con el eje y. Además, esta clase sirve para dar la noción al estudiante de que por un punto pasan infinitas rectas (como en el Problema inicial), y la condición de rectas paralelas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar en cada caso la gráfica de una función lineal $y = ax + b$ a partir de los valores de a y b, cuando b toma el mismo valor en dos o más funciones.

Ⓒ Determinar las condiciones para relacionar la ecuación de una función lineal con la línea recta de su gráfica.

Solución de algunos ítems:

Las rectas de las funciones en a) y b) son paralelas ya que $a = 4$ en ambas. El intercepto de la función en a) es (0, 4) y la de la función en b) es (0, –4).

Las rectas de las funciones en c) y d) son paralelas ya que $a = 5$ en ambas. El intercepto de la función en c) es (0, 1) y la de la función en d) es (0, –1).

Observación:
En el plan de pizarra solo se tomarán los literales a), b), c), e) y f).

Materiales:
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond con las gráficas del Problema inicial.
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond con las gráficas del Ejemplo.

Posibles dificultades:
En el Problema inicial, hacer énfasis en que las gráficas tienen el mismo intercepto a saber (0, 3). Es necesario analizar la razón de cambio de la ecuación junto con la pendiente de la recta.

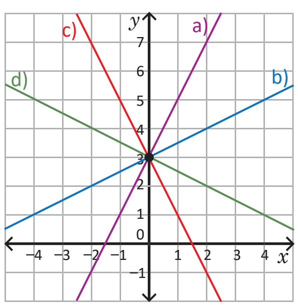
Fecha: U3 1.15

Ⓟ Relaciona cada función con su respectiva gráfica:

a) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x + 3$

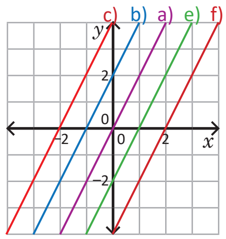
b) $y = \frac{1}{2}x + 3$ d) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Ⓢ



Ⓔ Grafica en el mismo plano las siguientes funciones:

a) $y = 2x$
b) $y = 2x + 2$
c) $y = 2x + 4$
e) $y = 2x - 2$
f) $y = 2x - 4$



Ⓡ 1. a) Recta g
b) Recta f
c) Recta h
d) Recta i

2. a) y b) son paralelas; c) y d) son paralelas.

Tarea: página 66 del Cuaderno de Ejercicios.

1.16 Valores de y cuando se delimitan los valores de x

P

Para la función $y = 5x - 3$, si x está entre −1 y 4, ¿entre qué valores está y?

S

Para determinar entre qué valores está y, se puede considerar dos posibles soluciones.

A partir de la expresión:

Para determinar los valores de y, se sustituye el valor de x en la expresión y se realizan las operaciones indicadas.

Si $x = -1$

$y = 5(-1) - 3$

$y = -5 - 3$

$y = -8$

$(-1, -8)$

Si $x = 4$

$y = 5(4) - 3$

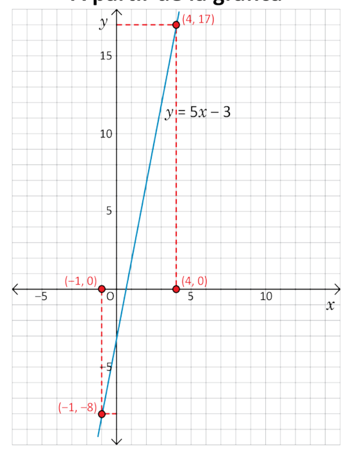
$y = 20 - 3$

$y = 17$

$(4, 17)$

Para la función $y = 5x - 3$, cuando x está entre −1 y 4, y está entre −8 y 17.

A partir de la gráfica



C

Para determinar entre qué valores se encuentra y, cuando se conocen los valores de x, se puede utilizar cualquiera de las opciones mostradas anteriormente.

- A partir de la ecuación: sustituyendo los valores de x de los extremos, se encuentran los valores de y de los extremos.
- A partir de la gráfica: identificando las coordenadas de x, se buscan las correspondientes coordenadas de y.

La opción a utilizar dependerá si se conoce la gráfica o la ecuación de la función.

1. A partir de la ecuación de cada función, determina entre qué valores se encuentra y, conociendo los respectivos valores de x.

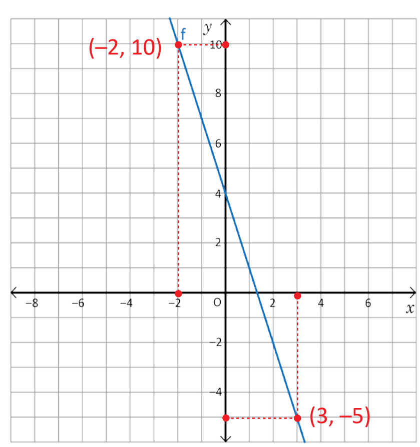
a) Si $y = 2x + 3$, ¿entre qué valores está y, si x está entre −3 y 5? Entre −3 y 13

b) Si $y = -x + 5$, ¿entre qué valores está y, si x está entre 2 y 5? Entre 0 y 3

c) Si $y = 3x - 5$, ¿entre qué valores está y, si x está entre −1 y 4? Entre −8 y 7

d) Si $y = \frac{2}{3}x - 5$, ¿entre qué valores está y, si x está entre −3 y −6? Entre −9 y −7

2. Para la gráfica de la derecha, determina entre qué valores está y, si x está entre −2 y 3.
Entre −5 y 10



Indicador de logro

1.16 Determina los valores de y, cuando se delimitan los valores de x.

Secuencia

En las clases anteriores se han establecido las relaciones entre la ecuación de la función lineal $y = ax + b$ y el significado gráfico que tienen los valores de a y b en la línea recta. En esta clase, y haciendo uso de esas herramientas, se hace el análisis del rango de valores posibles para la variable independiente y a partir de los valores de x.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar el rango de valores posibles que toma la variable y en la función lineal $y = 5x - 3$ a partir de valores dados para la variable independiente x. En el plan de pizarra solo se colocará la solución algebraica usando la expresión; indique a sus estudiantes que verifiquen sus resultados analizando la gráfica de la función.

Ⓒ Generalizar el proceso para encontrar el rango de valores de la variable y en una función lineal a partir de los valores de la variable x.

Materiales:

- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond con la gráfica de la función del Problema inicial.
- Metro o escuadra de madera.

Posibles dificultades:

En el bloque de ejercicios, es posible que en la función lineal del ejercicio 1. b) los estudiantes respondan que el valor de y se encuentra entre 3 y 0, pues si $x = 2$ entonces $y = 3$, y si $x = 5$ entonces $y = 0$. Indique, al comenzar los ejercicios, que los valores de y siempre deben ordenarse del menor valor al mayor, lo mismo aplica para el ejercicio 2.

Fecha: **U3 1.16**

Ⓟ Para la función $y = 5x - 3$, si x está entre -1 y 4, ¿entre qué valores está y?

Ⓢ Utilizando la ecuación de la función, si $x = -1$ entonces:

$$y = 5(-1) - 3$$
$$= -8$$

Mientras que si $x = 4$:

$$y = 5(4) - 3$$
$$= 17$$

$a > 0$, si x aumenta entonces y aumenta. Por lo tanto, si x está entre -1 y 4 entonces y está entre -8 y 17.

Ⓡ 1. a) $y = 2x + 3$:

Si $x = -3$:

$$y = 2(-3) + 3 = -3$$

Si $x = 5$:

$$y = 2(5) + 3 = 13$$

$a > 0$, luego si x está entre -3 y 5 entonces y está entre -3 y 13.

b) y está entre 0 y 3
c) y está entre -8 y 7
d) y está entre -9 y -7

2. y está entre -5 y 10

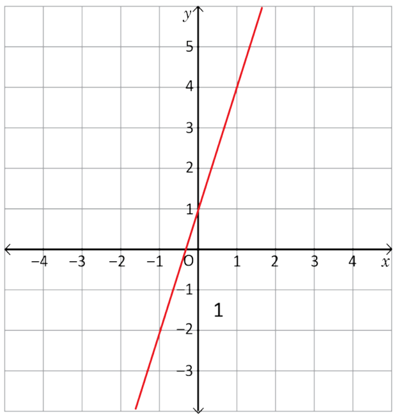
Tarea: página 67 del Cuaderno de Ejercicios.

1.17 Expresión de la función en $y = ax + b$ mediante la lectura de la gráfica

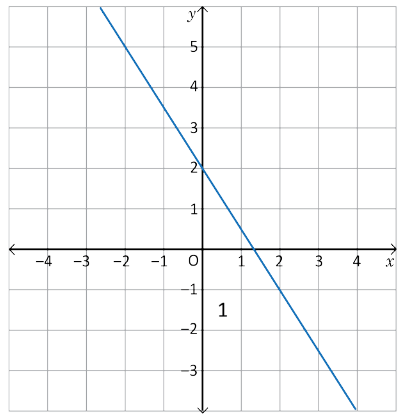
P

Escribe la ecuación para cada una de las funciones, cuyas gráficas se muestran a continuación:

1.

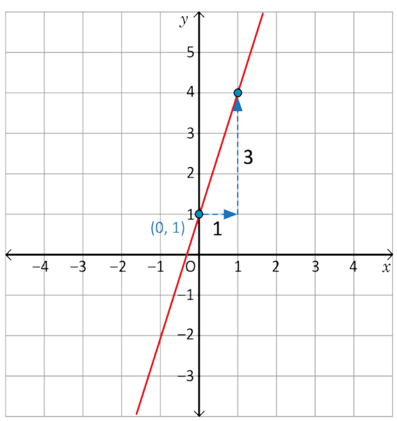


2.

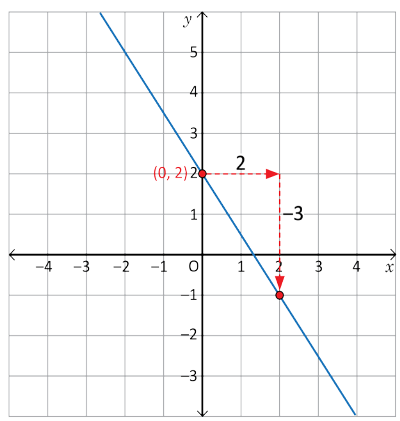


S

Para escribir la expresión matemática de una función, se identifica el intercepto b con el eje y, y se analiza la pendiente a.



$b = 1,\ a = \frac{3}{1} = 3,\ y = 3x + 1.$



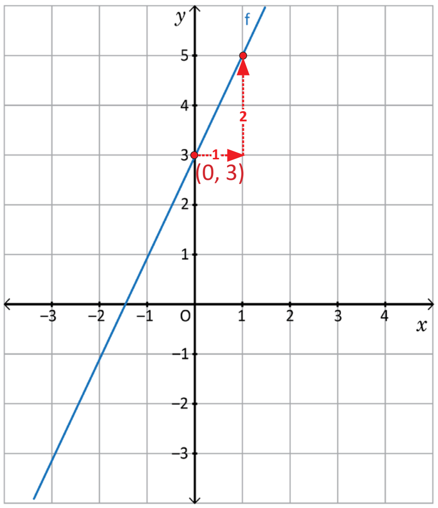
$b = 2,\ a = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2},\ y = -\frac{3}{2}x + 2.$

C

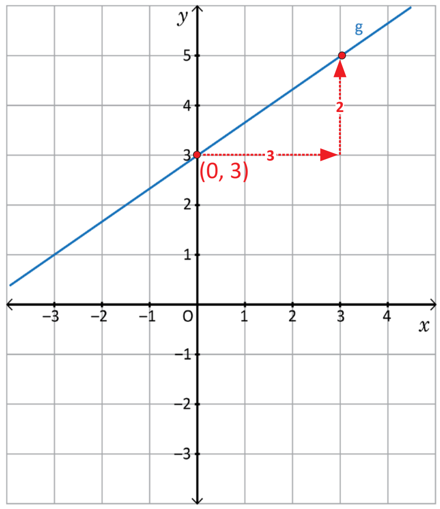
Para escribir la ecuación de una función de la forma $y = ax + b$, a partir del gráfico, es necesario identificar el intercepto con el eje y, y determinar la pendiente de la recta, tal como se muestra en los ejemplos desarrollados.

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

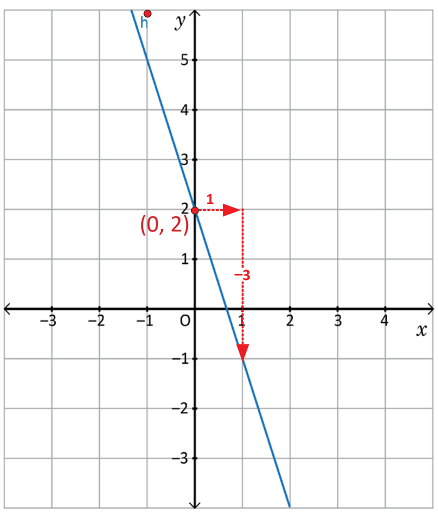
a) $y = 2x + 3$



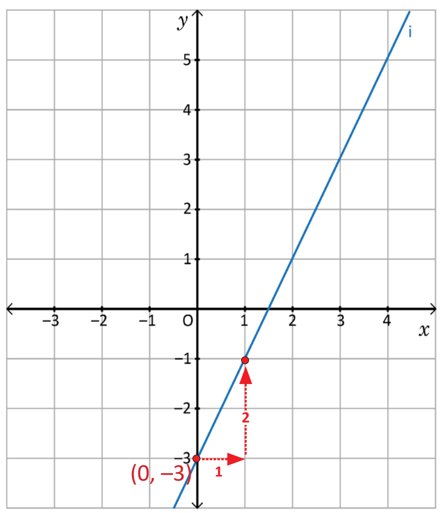
b) $y = \frac{2}{3}x + 3$



c) $y = -3x + 2$



d) $y = 2x - 3$



Indicador de logro

1.17 Escribe la función de la forma $y = ax + b$, a partir del gráfico, identificando la pendiente y el intercepto.

Secuencia

Para esta clase los estudiantes deben escribir la ecuación de una función lineal a partir de la gráfica de la misma. Para ello deben identificar en la recta el intercepto de esta con el eje y y su pendiente.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Encontrar la ecuación de las funciones lineales a partir de sus gráficas, mediante la identificación de las coordenadas de los interceptos con el eje y y el valor de la pendiente de la recta.

Ⓒ Determinar el procedimiento para encontrar y escribir la ecuación de una función lineal a partir de su gráfica.

Solución de algunos ítems:

a) Intercepto (0, 3), entonces $b = 3$.

$$a = \frac{2}{1} = 2$$

Luego la ecuación de la función es:

$$y = 2x + 3$$

b) Intercepto (0, 3), entonces $b = 3$.

$$a = \frac{2}{3}$$

Luego la ecuación de la función es:

$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

c) Intercepto (0, 2), entonces $b = 2$.

$$a = \frac{-3}{1} = -3$$

Luego la ecuación de la función es:

$$y = -3x + 2$$

d) Intercepto (0, –3), entonces $b = -3$.

$$a = \frac{2}{1} = 2$$

Luego la ecuación de la función es:

$$y = 2x - 3$$

Materiales:
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond con las gráficas de la funciones del Problema inicial.
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond con la gráfica de la función del literal a) del bloque de ejercicios y problemas.
- Metro o escuadra de madera.

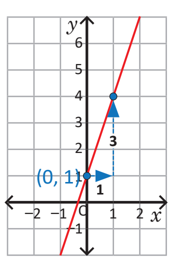
Para el plan de pizarra colocar las gráficas de las funciones en la parte de solución para optimizar el espacio.

Fecha: **U3 1.17**

Ⓟ Escribe la ecuación para cada una de las funciones cuyas gráficas se presentan:

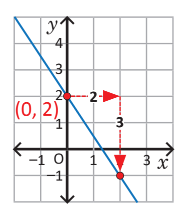
Ⓢ 1. Se identifica el intercepto con el eje y y se analiza la pendiente como se muestra en la gráfica.

$b = 1$ y $a = 3$; luego la ecuación de la recta es $y = 3x + 1$.



2. De forma similar al numeral anterior, $b = 2$, $a = -\frac{3}{2}$. Luego, la ecuación de la recta es:

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$



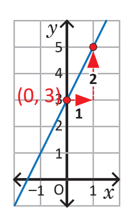
Ⓡ 1. a) $b = 3$, $a = 2$:

$$y = 2x + 3$$

b) $y = \frac{2}{3}x + 3$

c) $y = -3x + 2$

d) $y = 2x - 3$



Tarea: página 68 del Cuaderno de Ejercicios.

1.18 Ecuación de la función a partir de un punto de la gráfica y la pendiente

P

Escribe la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto (3, 4).

S

Para determinar la ecuación, se identifican los elementos proporcionados.

A partir de los datos proporcionados:

- La pendiente es $\frac{2}{3}$, la función lineal es $y = \frac{2}{3}x + b$.
- La gráfica pasa por el punto (3, 4), al sustituir el valor de x y y en la expresión se tiene: $x = 3$, $y = 4$.

$$4 = \frac{2}{3}(3) + b$$

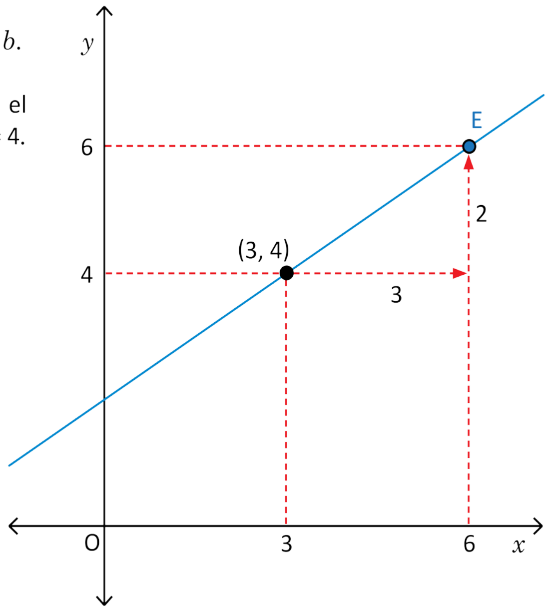
$$4 = 2 + b$$

$$2 = b$$

Entonces, $y = \frac{2}{3}x + 2$.

- Para graficar, se toma el punto (3, 4) ya dado; luego, con la pendiente se busca un nuevo punto por donde pasa la gráfica. Como la pendiente es $\frac{2}{3}$, desde el punto (3, 4) al avanzar 3 unidades en x hacia la derecha, se avanza 2 unidades en y hacia arriba y se llega al punto (6, 6).

Representación gráfica de la función



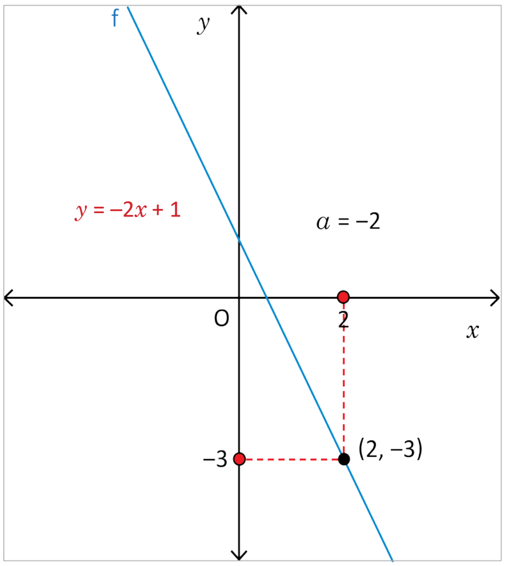
C

Para determinar la ecuación de la función lineal cuando se conoce la pendiente y las coordenadas (x, y) de un punto por donde pasa la gráfica, se realiza lo siguiente:

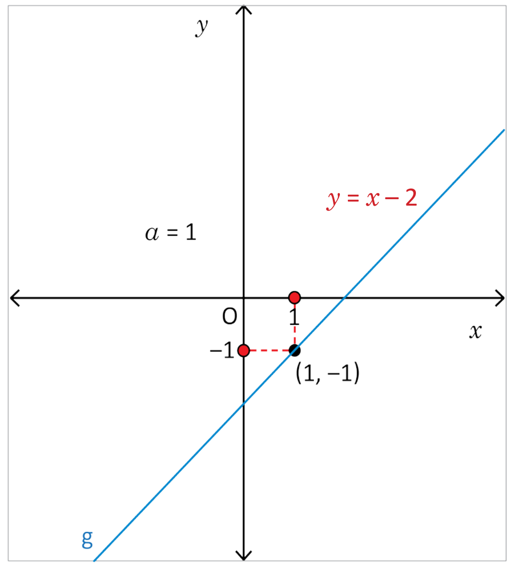
1. Sustituir la pendiente en la forma $y = ax + b$.
2. Sustituir los valores de las coordenadas del punto (x, y) en $y = ax + b$ y calcular el valor de b.
3. Escribir la ecuación $y = ax + b$ con los valores a y b encontrados.

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

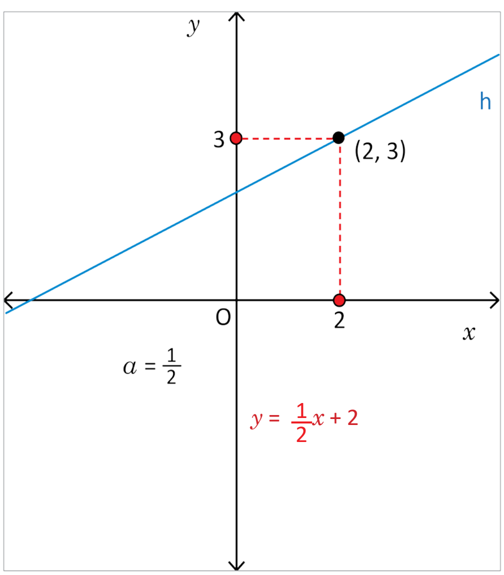
a)



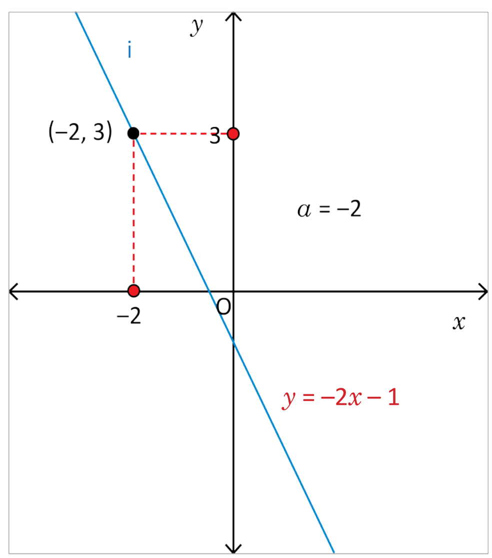
b)



c)



d)



Indicador de logro

1.18 Escribe la función de la forma $y = ax + b$, conociendo las coordenadas de un punto de la gráfica y el valor de a.

Secuencia

En la clase 1.17 se dedujo la ecuación de una función lineal a partir de su gráfica, identificando en la misma las coordenadas del intercepto con el eje y y el valor de la pendiente de la recta. En esta clase se proporciona la pendiente de la recta y un punto sobre la misma que no necesariamente es el intercepto sobre el eje y para que el estudiante recuerde que este punto satisface la ecuación de la función $y = ax + b$ y encontrar el valor de b.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar las condiciones iniciales sobre el valor de la pendiente de la gráfica de una función lineal y un punto sobre la misma para encontrar la ecuación de la función.

Ⓒ Determinar el procedimiento para encontrar y escribir la ecuación de una función lineal a partir del valor de la pendiente de la gráfica y las coordenadas de un punto sobre la misma.

Solución de algunos ítems:

a) $y = -2x + b$; si $x = 2$ entonces $y = -3$, luego:

$$-3 = -2(2) + b$$
$$b = -3 + 4$$
$$b = 1$$

La ecuación de la función es:

$$y = -2x + 1$$

b) $y = x + b$; si $x = 1$ entonces $y = -1$, luego:

$$-1 = 1 + b$$
$$b = -1 - 1$$
$$b = -2$$

La ecuación de la función es:

$$y = x - 2$$

c) $y = \frac{1}{2}x + b$; si $x = 2$ entonces $y = 3$, luego:

$$3 = \frac{1}{2}(2) + b$$
$$b = 3 - 1$$
$$b = 2$$

La ecuación de la función es:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

Posibles dificultades:
En el Problema inicial, los estudiantes podrían no recordar qué significa que la gráfica de la función pase por el punto (3, 4); en este caso, se les debe recordar que (3, 4) satisface la ecuación de la función, es decir, si $x = 3$ entonces $y = 4$.

Fecha: **U3 1.18**

Ⓟ Escribe la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto (3, 4).

Ⓢ $a = \frac{2}{3}$, la ecuación es $y = \frac{2}{3}x + b$. Se sustituyen $x = 3$ y $y = 4$ en la ecuación para encontrar el valor de b:

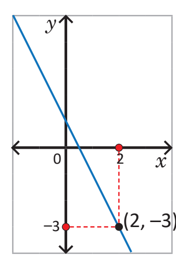
$$4 = \frac{2}{3}(3) + b$$
$$b = 4 - 2$$
$$b = 2$$

La ecuación de la función es:

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

Ⓡ a) $a = -2$, $y = -2x + b$; se sustituyen $x = 2$ y $y = -3$:

$$-3 = -2(2) + b$$
$$b = -3 + 4$$
$$b = 1$$



La ecuación de la función es:

$$y = -2x + 1$$

b) $y = x - 2$

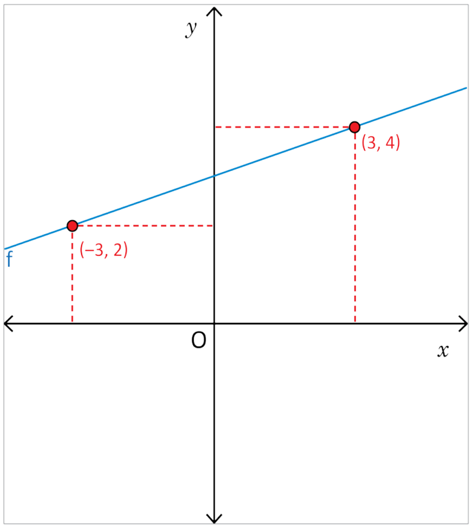
c) $y = \frac{1}{2}x + 2$

d) $y = -2x - 1$

Tarea: página 70 del Cuaderno de Ejercicios.

1.19 Ecuación de la función a partir de dos puntos de la gráfica

P Para la función de la gráfica con las dos coordenadas dadas, escribe la ecuación de la forma $y = ax + b$.



S La ecuación de la función se puede determinar aplicando una de las formas siguientes:

Calculando la pendiente:

- Pasa por los puntos (−3, 2) y (3, 4), entonces:

$$a = \frac{4-2}{3-(-3)} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- La gráfica de la función $y = \frac{1}{3}x + b$ pasa por el punto (3, 4), al sustituir los valores se tiene:

$$4 = \frac{1}{3}(3) + b$$
$$4 = 1 + b$$
$$3 = b$$
$$b = 3$$

Entonces, la función lineal es $y = \frac{1}{3}x + 3$.

Mediante sistemas de ecuaciones:

Como pasa por los puntos (−3, 2) y (3, 4), entonces:

- Para el punto (−3, 2), sustituyendo se tiene:
  $2 = -3a + b$ ①
- Para el punto (3, 4), sustituyendo se tiene:
  $4 = 3a + b$ ②

Al resolver las ecuaciones ① y ② como sistemas de ecuaciones, se encuentran los valores de $a = \frac{1}{3}$ y $b = 3$, luego se escribe la función $y = \frac{1}{3}x + 3$.

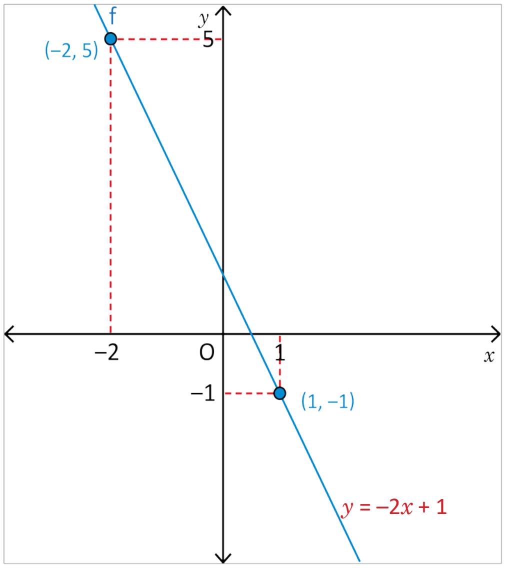
C Para determinar la ecuación de una función cuando se conocen las coordenadas de dos puntos A(x_A, y_A) y B (x_B, y_B) de la gráfica, se puede:

1. Determinar la pendiente a utilizando la fórmula $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
2. Sustituyendo en $y = ax + b$, el valor de a calculado en 1 y las coordenadas de uno de los puntos dados, para encontrar el valor de b.
3. Escribir la ecuación $y = ax + b$, sustituyendo los valores de a y b encontrados.

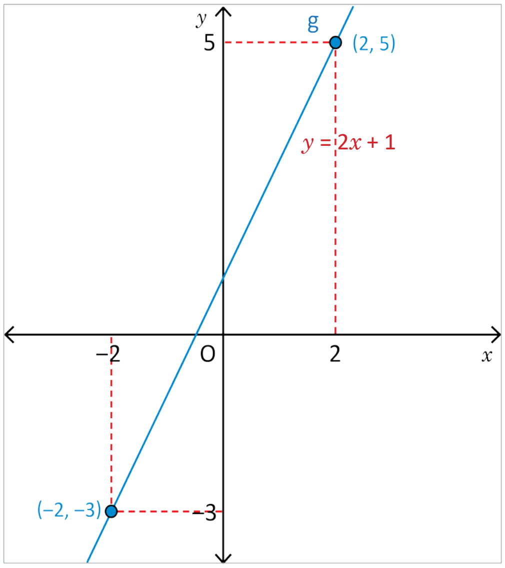
O bien, se puede tomar las coordenadas de los dos puntos dados para formar un sistema de ecuaciones lineales, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

Escribe la ecuación de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

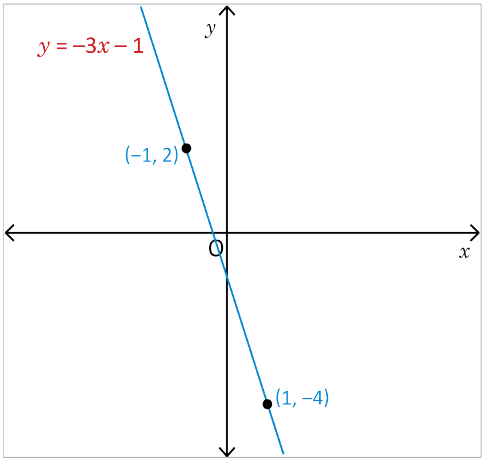
a)



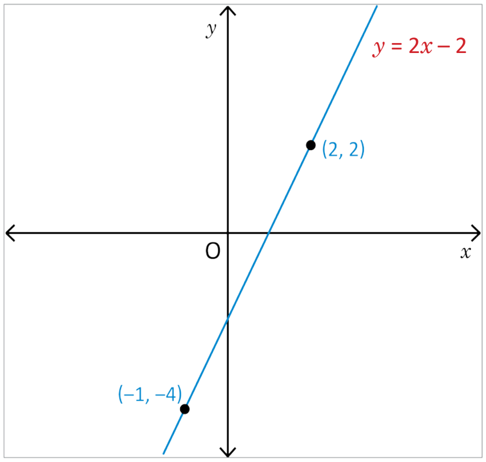
b)



c)



d)



Indicador de logro

1.19 Escribe la función de la forma $y = ax + b$, identificando dos puntos de la gráfica.

Secuencia

Ahora que el estudiante puede determinar la ecuación de la función lineal a partir de un punto y la pendiente, se le presenta el caso en el que se dispone de dos puntos de la gráfica de una función lineal para determinar su ecuación.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la ecuación de una función lineal a partir de dos puntos, por medio del cálculo de la pendiente, o bien, la resolución de un sistema de ecuaciones.

Solución de algunos ítems:

a) Pendiente

$a = \frac{-1-5}{1-(-2)} = \frac{-1-5}{1+2} = \frac{-6}{3} = -2$

Intercepto

Se evalúa (1, –1) en la ecuación

$$
\begin{aligned}
y &= -2x + b\\
-1 &= -2(1) + b\\
-1 &= -2 + b\\
-1 + 2 &= b\\
1 &= b
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $y = -2x + 1$

b) Pendiente

$a = \frac{-3-5}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2$

Intercepto

Se evalúa (2, 5) en la ecuación

$$
\begin{aligned}
y &= 2x + b\\
5 &= 2(2) + b\\
5 &= 4 + b\\
5 - 4 &= b\\
1 &= b
\end{aligned}
$$

La ecuación es $y = 2x + 1$.

c) Pendiente

$a = \frac{-4-2}{1-(-1)} = \frac{-4-2}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$

Intercepto

Se evalúa (–1, 2) en la ecuación

$$
\begin{aligned}
y &= -3x + b\\
2 &= -3(-1) + b\\
2 &= 3 + b\\
2 - 3 &= b\\
-1 &= b
\end{aligned}
$$

La ecuación es $y = -3x - 1$.

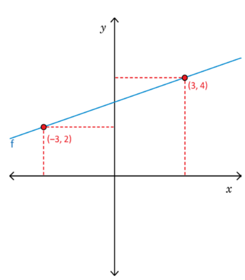
Posibles dificultades:
Es posible que el estudiante no coloque el signo de las coordenadas de los puntos cuando calcula la pendiente, por lo que se sugiere recalcar esto en la solución del Problema inicial.

Fecha:

U3 1.19

Ⓟ Para la función de la gráfica con las dos coordenadas dadas, escribe la ecuación de la forma $y = ax + b$.

Los puntos son (–3, 2) y (3, 4).



Ⓢ Calculando la pendiente. $a = \frac{4-2}{3-(-3)} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Se determina b evaluando el punto (3, 4) en la ecuación

$y = \frac{1}{3}x + b$: $4 = \frac{1}{3}(3) + b$

$4 = 1 + b$

$b = 3$

Entonces, la función lineal es $y = \frac{1}{3}x + 3$.

Ⓡ a) $y = -2x + 1$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = -3x - 1$

d) $y = 2x - 2$

Tarea: página 72 del Cuaderno de Ejercicios.

1.20 Ecuación de la función a partir de los interceptos con los ejes

P

Escribe la ecuación de la función lineal que pasa por lo puntos (−4, 0) y (0, 6).

S

Para determinar la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos, es necesario considerar:

- El punto (0, 6) tiene la forma (0, y), por lo que corresponde al intercepto con el eje y, entonces $b = 6$.
- Se calcula la pendiente con las coordenadas de los puntos (−4, 0) y (0, 6).

$$a = \frac{6-0}{0-(-4)} = \frac{6}{0+4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- Se escribe la ecuación sustituyendo el valor determinado de a y b en la expresión $y = ax + b$, y se obtiene $y = \frac{3}{2}x + 6$.

Los puntos de la forma (x, 0) y (0, y) se llaman interceptos.

(0, y) intercepto con el eje y; (x, 0) intercepto con el eje x.

C

Cuando se conocen las coordenadas de dos puntos de la forma (x, 0), (0, y) de la gráfica de una función lineal, entonces se puede determinar la ecuación considerando que

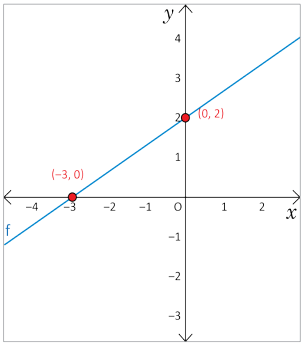
1. Para (0, y) $\Longrightarrow$ $y = b$ corresponde al intercepto con el eje y.

2. La pendiente $a = \frac{y-0}{0-x} = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$.

3. Se escribe la ecuación sustituyendo los valores calculados de a y b en la expresión $y = ax + b$.

E

Considerando las coordenadas de los puntos que se muestra en la gráfica de la función, escribe la respectiva ecuación.



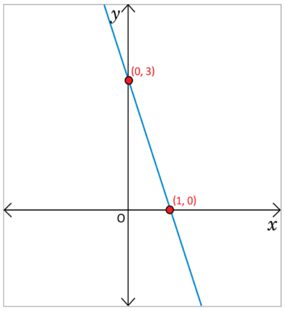
Solución.

Para determinar la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos que se muestran en la gráfica, se procede de manera similar al ejemplo anterior.

- Se identifica el intercepto con el eje y, $b = 2$.
- Se calcula la pendiente $a = \frac{2}{-(-3)} = \frac{2}{3}$.
- Se escribe la ecuación sustituyendo el valor determinado para a y b, en la expresión $y = ax + b$, se obtiene $y = \frac{2}{3}x + 2$.

1. Escribe la ecuación para la función lineal que pasa por los puntos:
   a) (0, 3) y (4, 0) $y = -\frac{3}{4}x + 3$
   b) (−2, 0) y (0, 4) $y = 2x + 4$
   c) (3, 0) y (0, 6) $y = -2x + 6$

2. Considerando las coordenadas de los puntos que se muestra en la gráfica de la función, escribe la respectiva ecuación.
   $y = -3x + 3$



Indicador de logro

1.20 Escribe la función de la forma $y = ax + b$, a partir de las coordenadas de dos puntos de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$.

Secuencia

Para esta clase se estudia la ecuación de la función lineal a partir de los interceptos con los ejes coordenados, este es un caso particular de lo tratado en la clase anterior.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la ecuación de una función lineal a partir de sus interceptos con los ejes. En este punto el estudiante es capaz de calcular la pendiente a partir de dos puntos y conoce el intercepto de la función lineal.

Mostrar la simplificación del proceso para obtener la ecuación de la función lineal a partir de dos puntos cuando estos son los interceptos con los ejes coordenados.

Solución de algunos ítems:

1. a) $a = -\frac{3}{4}$, $b = 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 3$

2. Intercepto en el eje y: $(0, 3)$
   Intercepto en el eje x: $(1, 0)$
   $a = -\frac{3}{1} = -3$, $b = 3$, $y = -3x + 3$

Observación: Otra fórmula utilizada cuando se tienen los interceptos con los ejes $(r, 0)$ y $(0, s)$ es la ecuación $\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$.

Fecha:

U3 1.20

Ⓟ Escribe la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $(-4, 0)$ y $(0, 6)$.

Ⓢ Intercepto

$(0, 6) \rightarrow b = 6$

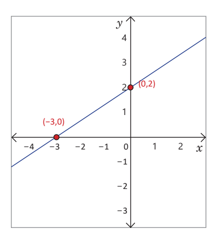
Pendiente

$a = \frac{6 - 0}{0 - (-4)} = \frac{6}{0 + 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Por lo que, la función lineal es

$y = \frac{3}{2}x + 6$.

Ⓔ Escribe la ecuación de la función lineal a partir del siguiente gráfico.



Intercepto

$(0, 2) \rightarrow b = 2$

Pendiente

$a = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

La función lineal es $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Ⓡ 1. a) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 2. $y = -3x + 3$
b) $y = 2x + 4$
c) $y = -2x + 6$

Tarea: página 74 del Cuaderno de Ejercicios.

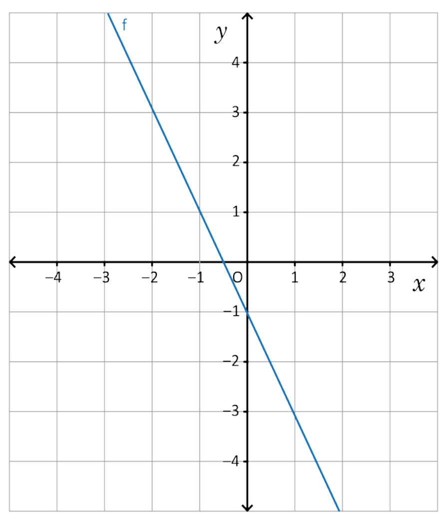
1.21 Practica lo aprendido

Resuelve de manera ordenada, en tu cuaderno, cada una de las situaciones planteadas:

1. Un determinado día, Ana pagó 3.6 dólares por 3 euros, y Carlos pagó 8.4 dólares por 7 euros.
   a) Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio en euros y, de x dólares. $y = \frac{5}{6}x$
   b) Represéntala gráficamente.
   c) ¿Cuánto habrían pagado por 15 euros? $18

2. Un algodonero recoge 30 kg de algodón por cada hora de trabajo, y demora media hora preparándose todos los días cuando inicia la jornada. La función lineal que representa esta situación está dada por la ecuación $y = 30x - 15$; donde y representa los kg de algodón recogido y x es el tiempo transcurrido en horas.
   a) Realiza una tabla para la función y grafícala.
   b) ¿Cuántos kg de algodón se recogerán en una jornada de 8 horas? 225 kg

3. Se llena una piscina con una manguera en forma constante, de modo que la altura alcanzada por el agua aumenta 15 cm por cada hora que transcurre. Si inicialmente el agua que había en la piscina llegaba a una altura de 12 cm.
   a) ¿Cuál será la altura alcanzada por el agua después de 3 horas? 57 cm
   b) Escribe la altura y del agua después de x horas. $y = 15x + 12$



4. Para la función de la gráfica, realiza lo siguiente:
   a) Identifica el intercepto. $b = -1$
   b) Determina la razón de cambio. $a = -2$
   c) Escribe la ecuación de la función. $y = -2x - 1$

5. Grafica las siguientes funciones en el mismo plano, luego realiza lo que se pide en cada numeral.

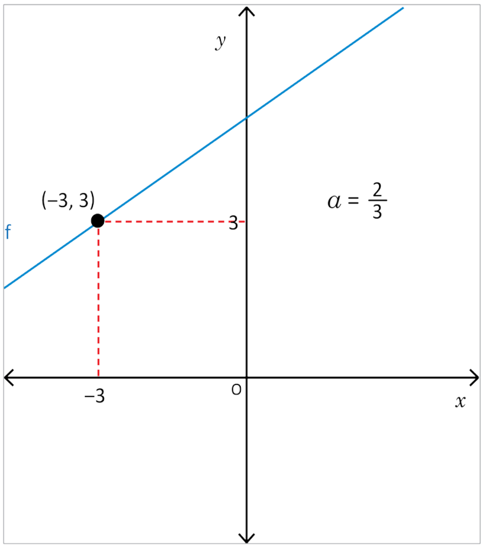
a) $y = 3x$	b) $y = 3x + 1$
c) $y = 3x - 1$	d) $y = -3x + 1$
e) $y = -3x - 1$	f) $y = 3x + 2$
g) $y = 3x + 3$	h) $y = 3x + 5$

   I. Identifica el intercepto.
   II. Determina la razón de cambio.
   III. ¿Qué concluyes?

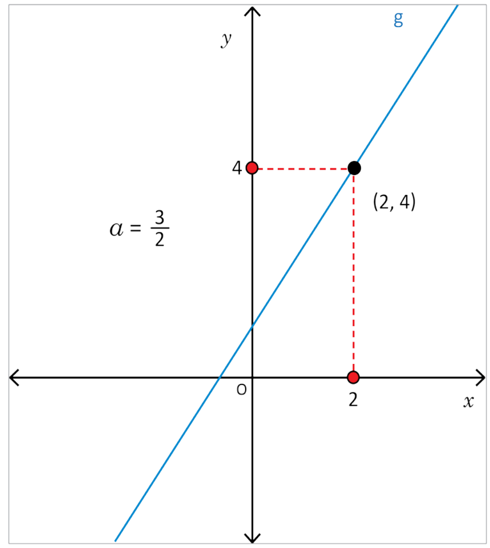
a) $b = 0$, $a = 3$	b) $b = 1$, $a = 3$
c) $b = -1$, $a = 3$	d) $b = 1$, $a = -3$
e) $b = -1$, $a = -3$	f) $b = 2$, $a = 3$
g) $b = 3$, $a = 3$	h) $b = 5$, $a = 3$

Se concluye que si las funciones lineales tienen la misma pendiente entonces son rectas paralelas.

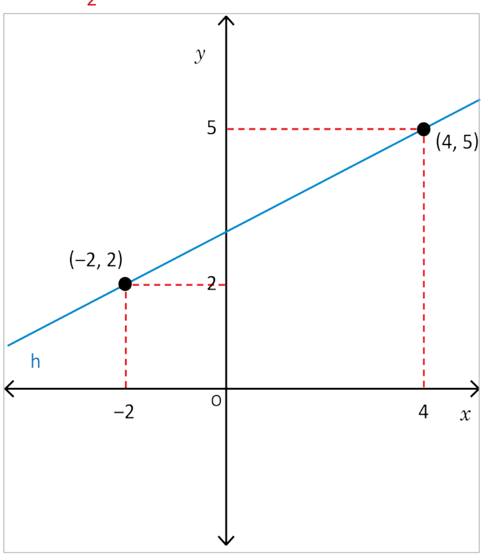
c) $y = \frac{2}{3}x + 5$



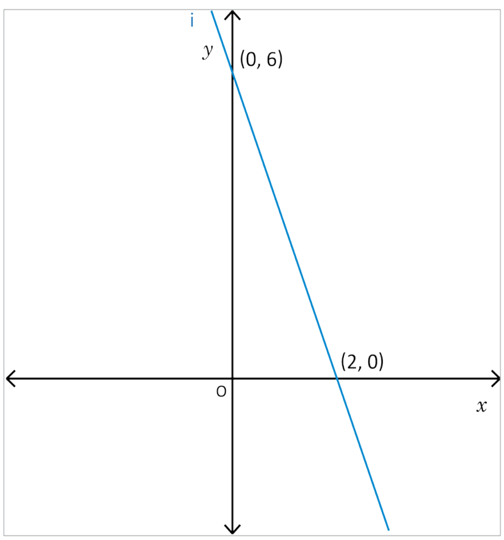
d) $y = \frac{3}{2}x + 1$



e) $y = \frac{1}{2}x + 3$



f) $y = -3x + 6$



5. Determina la ecuación $y = ax + b$, considerando la información proporcionada en cada caso.

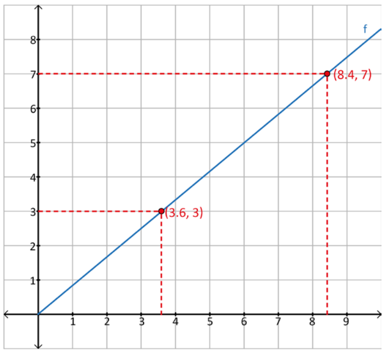
a) Tiene pendiente 3 y pasa por el punto (0, 5). $y = 3x + 5$
b) Tiene pendiente $\frac{3}{4}$ y pasa por el punto (4, 3). $y = \frac{3}{4}x$
c) Pasa por los puntos (0, −2) y (6, 2). $y = \frac{2}{3}x - 2$
d) Pasa por los puntos (−2, 1) y (−1, 3). $y = 2x + 5$
e) La función cuya gráfica es paralela a la de la función $y = 3x - 2$, y pasa por el punto (0, 7). $y = 3x + 7$

Indicador de logro

1.21 Resuelve problemas correspondientes a la función lineal.

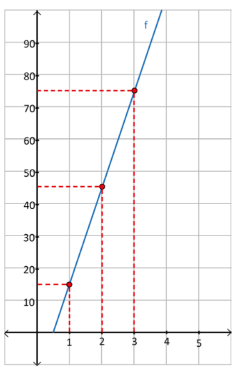
Solución de algunos ítems:

1. b)



2. a)

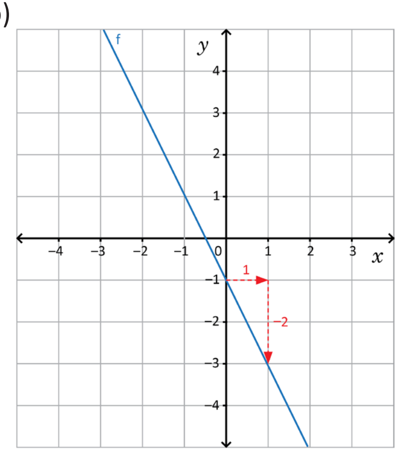
x	1	2	3	4	5
y	15	45	75	105	135



b) y = 30(8) – 15 = 225

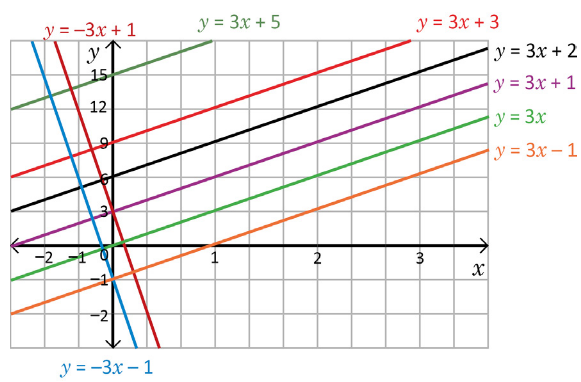
3. a) 15(3) + 12 = 57

4. b)



$a = -2$

5.



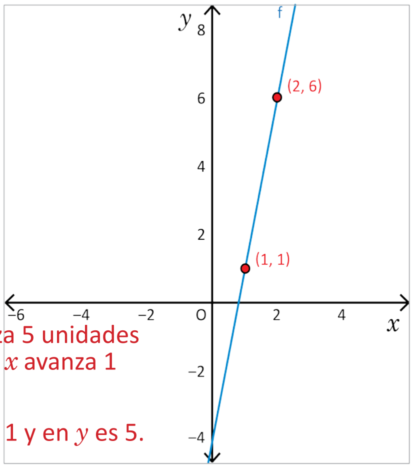
Observación: Es importante considerar que en los problemas del 1 al 3 la solución tiene sentido para valores de x mayores o iguales a cero.

Tarea: página 76 del Cuaderno de Ejercicios.

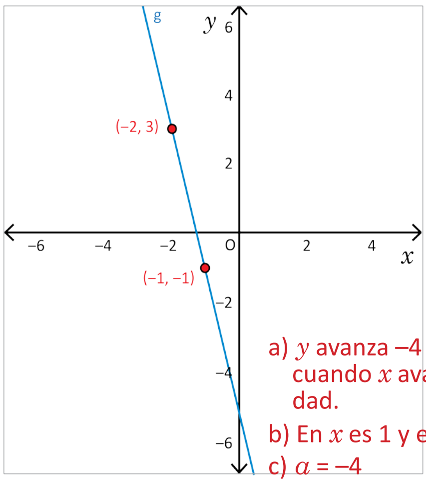
1.22 Practica lo aprendido

Resuelve de manera ordenada, en tu cuaderno, cada una de las situaciones planteadas.

1. Para las funciones de las gráficas siguientes:
   a) Determina cuántas unidades avanza y, cuando x avanza 1 unidad, justifica tu respuesta.
   b) El incremento en x y y, considerando las coordenadas de los puntos indicados.
   c) Calcula la pendiente de la función en cada caso.



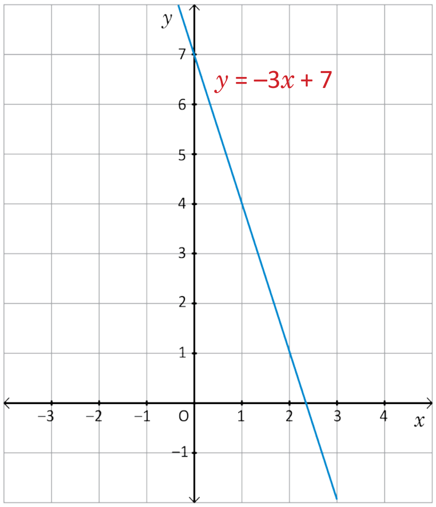
a) y avanza 5 unidades cuando x avanza 1 unidad.
b) En x es 1 y en y es 5.
c) $a = 5$



a) y avanza −4 unidades cuando x avanza 1 unidad.
b) En x es 1 y en y es −4.
c) $a = -4$

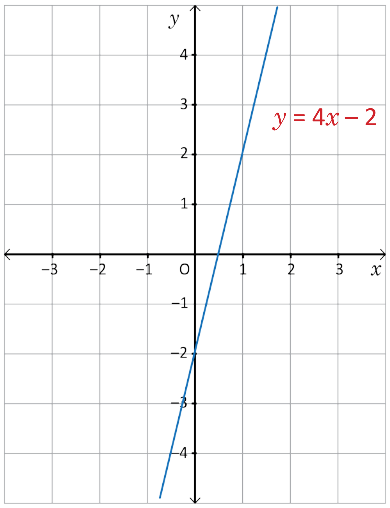
2. Identifica la pendiente y el intercepto para cada una de las siguientes funciones:
   a) $y = x + 1$ — $a = 1$, $b = 1$
   b) $y = 7x + 4$ — $a = 7$, $b = 4$
   c) $y = -5x + 4$ — $a = -5$, $b = 4$
   d) $y = \frac{5}{3}x - 2$ — $a = \frac{5}{3}$, $b = -2$
3. Determina entre qué valores está y, en cada caso.
   a) $y = 8x - 10$, x está entre −1 y 5.
   y está entre −18 y 30
   b) $y = -6x + 5$, x está entre −2 y 3.
   y está entre −13 y 17
4. Escribe la ecuación de la función graficada en cada literal:

a)



$y = -3x + 7$

b)



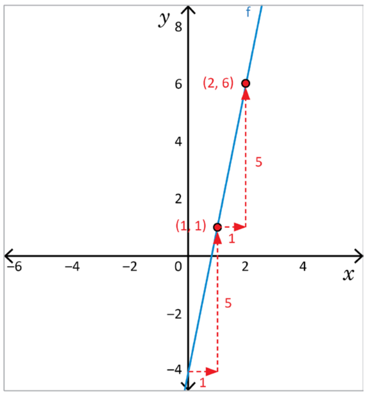
$y = 4x - 2$

Indicador de logro

1.22 Resuelve problemas correspondientes a la función lineal.

Solución de algunos ítems:

1. a) Gráficamente



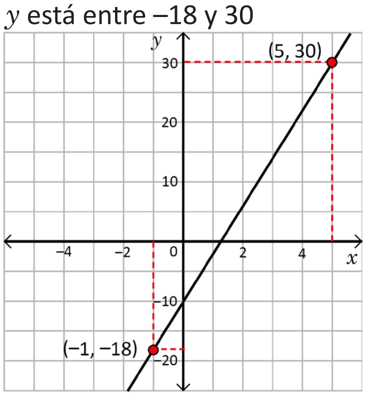
y avanza 5 unidades cuando x avanza 1 unidad.

b) Los puntos indicados son (1, 1) y (2, 6), el incremento en x es 1 y el incremento en y es 5.

3. a) $y = 8(-1) - 10 = -18$

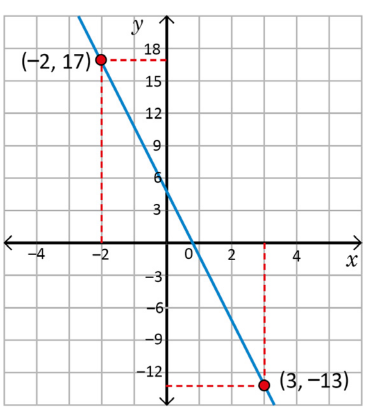
$y = 8(5) - 10 = 30$

y está entre -18 y 30



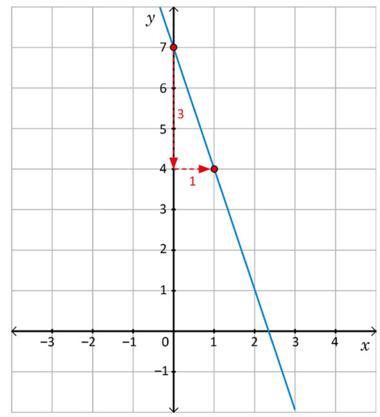
b) $y = -6(-2) + 5 = 17$, $y = -6(3) + 5 = -13$

y está entre -13 y 17



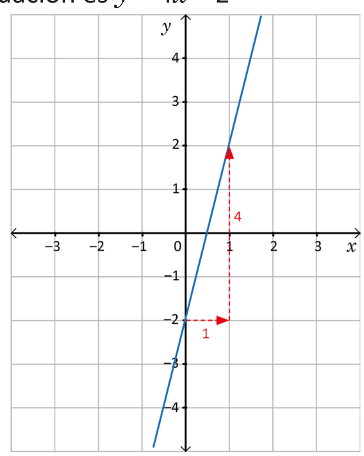
4. a) Gráficamente $a = -3$ y $b = 7$

La ecuación es $y = -3x + 7$



b) Gráficamente $a = 4$ y $b = -2$

La ecuación es $y = 4x - 2$



Tarea: página 77 del Cuaderno de Ejercicios.

4. c) Pendiente $a = \frac{2}{3}$

Intercepto
Se evalúa (–3, 3) en la ecuación

$$y = \frac{2}{3}x + b$$
$$3 = \frac{2}{3}(-3) + b$$
$$3 = -2 + b$$
$$3 + 2 = b$$
$$5 = b$$

Así la ecuación es $y = \frac{2}{3}x + 5$.

e) Pendiente

$$a = \frac{5-2}{4-(-2)} = \frac{5-2}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Intercepto
Se evalúa (–2, 2) en la ecuación

$$y = \frac{1}{2}x + b$$
$$2 = \frac{1}{2}(-2) + b$$
$$2 = -1 + b$$
$$2 + 1 = b$$
$$3 = b$$

Así la ecuación es $y = \frac{1}{2}x + 3$.

f) Pendiente

$$a = -\frac{6}{2} = -3$$

Intercepto
$b = 6$

Por lo tanto, la ecuación es:
$y = -3x + 6$.

5. c) Pendiente

$$a = \frac{2-(-2)}{6-0} = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Intercepto
$b = -2$

Así, la ecuación es $y = \frac{2}{3}x - 2$.

e) Sea $y = ax + b$ la ecuación de la función lineal que se pide, entonces por paralelismo se debe cumplir que la pendiente $a = 3$ y el intercepto $b = 7$.

Entonces la ecuación es $y = 3x + 7$.

Lección 2 Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas

2.1 Trazo de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas

P

¿Cómo puedes representar gráficamente la ecuación $x + 2y + 4 = 0$?

S

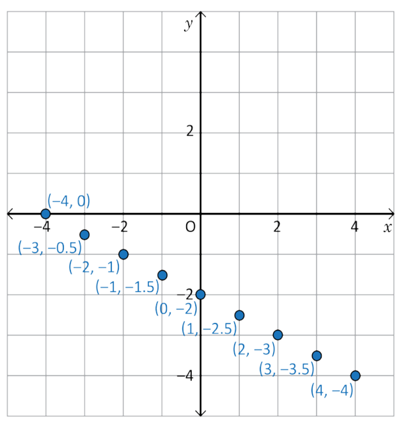
Para representar gráficamente una ecuación $x + 2y + 4 = 0$, es necesario conocer algunos valores de x y los respectivos valores de y, para representarlos en el plano como pares ordenados. Por ejemplo, si $x = -4$, al sustituir en la ecuación se tiene $-4 + 2y + 4 = 0$, $2y = 0$, entonces $y = 0$. Los valores obtenidos se organizan en la tabla.

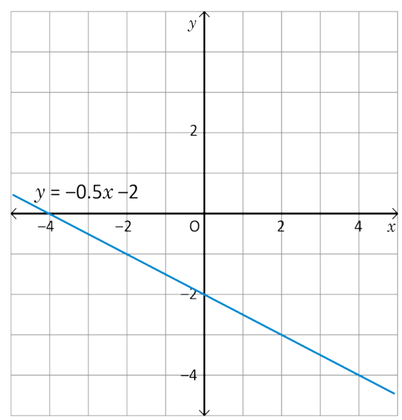
x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	...

Para facilitar el cálculo, se puede resolver en y la ecuación, así se tiene: $x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow 2y = -x - 4$, x y 4 pasan a la derecha; $y = -\frac{1}{2}x - 2$, se divide entre 2 ambos miembros.

Otra manera de hacerlo es encontrando el valor de y que corresponde a un valor x, y sustituyendo otros valores para x.

Si $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}(-2) - 2$, entonces $y = -1$.





C

Para representar gráficamente la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, es necesario determinar algunos valores para x y y que hacen cierta la ecuación y representarlos como pares ordenados en el plano.

Al comparar la representación gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, con la gráfica de la función lineal, se puede concluir que en ambos casos la gráfica es una línea recta y que para graficar la ecuación $ax + by + c = 0$, es necesario encontrar el valor de y correspondiente a x.

Para cada una de las ecuaciones:

1. Determina el valor de y correspondiente a x.
2. Elabora la tabla para organizar los pares ordenados.
3. Represéntalas gráficamente.

a) $-x + y - 3 = 0$
1. $y = x + 3$

b) $-2x + y - 2 = 0$
1. $y = 2x + 2$

c) $x + 2y - 6 = 0$
1. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Unidad 3

77

Indicador de logro

2.1 Comprueba que la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene la misma forma de la función lineal.

Secuencia

Se introduce la ecuación de primer grado con dos incógnitas que se estudiará a lo largo de esta lección. Se establecerá que la representación gráfica de esta ecuación coincide con la función lineal que se obtiene despejando la variable y.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Representar gráficamente una ecuación de primer grado con dos incógnitas por medio de la tabulación de valores para comprobar que su forma es la misma que la de una función lineal.

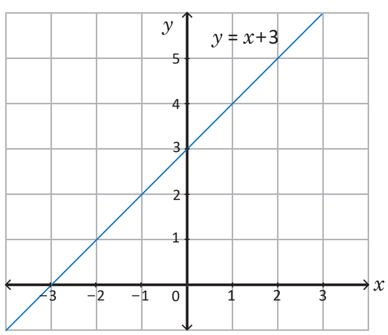
Solución de algunos ítems:

a) 1. $y = x + 3$

2.

x	−2	−1	0	1	2
y	1	2	3	4	5

3.

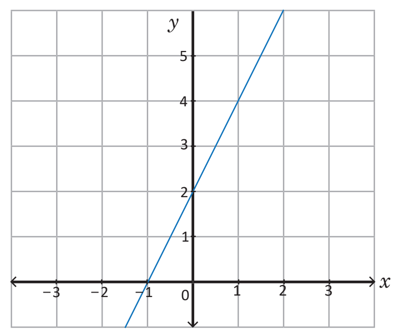


b) 1. $y = 2x + 2$

2.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	0	2	4	6

3.



c) 1. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

2.

x	−2	−1	0	1	2
y	4	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	2

Fecha:

U3 2.1

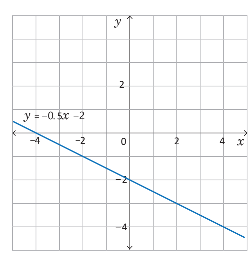
Ⓟ ¿Cómo puedes representar gráficamente la ecuación $x + 2y + 4 = 0$?

Ⓢ Evaluando valores de x en la ecuación:

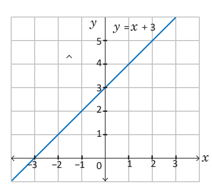
Si $x = -4 \rightarrow -4 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = 0$
Si $x = -3 \rightarrow -3 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$
Si $x = -2 \rightarrow -2 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -1$
Si $x = -1 \rightarrow -1 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}$
Si $x = 0 \rightarrow 0 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$
Si $x = 1 \rightarrow 1 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{2}$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	−2	$-\frac{5}{2}$	−3	$-\frac{7}{2}$	−4

Esta gráfica es también la representación gráfica de $y = -\frac{1}{2}x - 2$.



Ⓡ a) 1. $y = x + 3$



b) 1. $y = 2x + 2$

c) 1. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Tarea: página 78 del Cuaderno de Ejercicios.

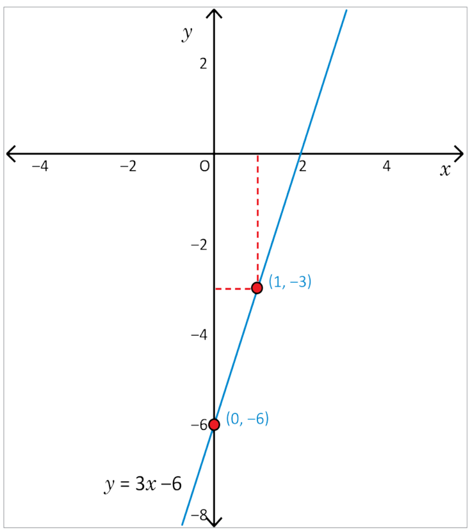
2.2 Relación entre la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ y la función $y = ax + b$

P

Lleva la ecuación $-6x + 2y + 12 = 0$, a la forma $y = ax + b$, luego grafícala.

S

- Para llevar la ecuación $-6x + 2y + 12 = 0$ a la forma $y = ax + b$, se despeja y:
  $2y = 6x - 12$, $-6x$ y 12 pasan al miembro derecho,
  $y = 3x - 6$, se dividen ambos miembros entre 2.



- Ahora para graficar, se tiene que la pendiente es $a = 3$, y el intercepto $b = -6$, es decir pasa por el punto (0, 6).
- Se determina otro punto de la gráfica:

Si $x = 1$

$$y = 3(1) - 6$$

$$y = -3$$

O sea que la gráfica pasa por el punto (1, −3).

Trazar la gráfica que pasa por los puntos (0, −6) y (1, −3).

C

Para llevar la ecuación de primer grado con dos incógnitas a la forma $y = ax + b$ de la línea recta, es necesario:

1. Resolver la ecuación $6x + 2y + 12 = 0$, sobre y.
2. Identificar la pendiente a y el intercepto b.
3. A partir de la pendiente y el intercepto, encontrar las coordenadas de otro punto de la gráfica.
4. Trazar la línea recta que pasa por los dos puntos determinados.

Para cada una de las siguientes ecuaciones, realiza:

1. Lleva la ecuación a la forma $y = ax + b$, resolviendo sobre y.
2. Determina otro punto por donde pasa la gráfica.
3. Traza la gráfica.

a) $-x + y = 6$ 1. $y = x + 6$ 2. (1, 7)
b) $2x + y = 10$ 1. $y = -2x + 10$ 2. (1, 8)
c) $3x - y = 1$ 1. $y = 3x - 1$ 2. (1, 2)

Indicador de logro

2.2 Transforma las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas a la forma $y = ax + b$, de la función lineal.

Secuencia

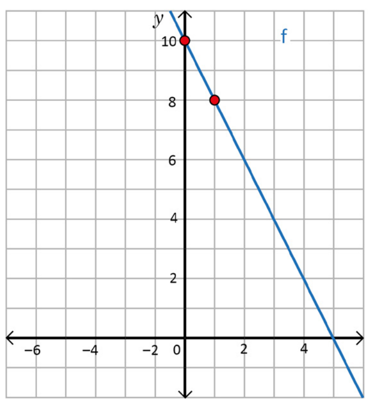
Ahora que el estudiante conoce que la ecuación de primer grado determina una función lineal se procede a determinar dicha función realizando el despeje de la variable y.

Propósito

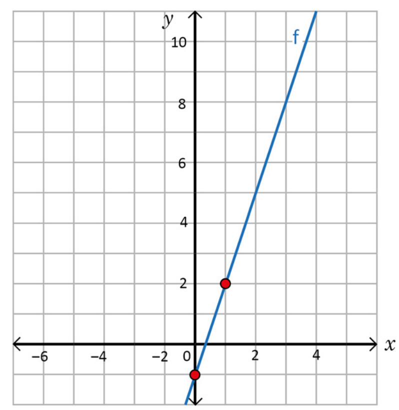
Ⓟ, ⓈDespejar la variable y de una ecuación dada para llevarla a la forma $y = ax + b$ y obtener dos puntos, de tal manera que uno de ellos sea el intercepto de la función, para luego graficarla.
Resumir el proceso para convertir una ecuación de primer grado con dos incógnitas a una función lineal y elaborar su gráfica.

Solución de algunos ítems:

b) 1. $y = -2x + 10$
2. (1, 8)
3.



c) 1. $y = 3x - 1$
2. (1, 2)
3.



Fecha:

U3 2.2

Ⓟ Lleva la ecuación $-6x + 2y + 12 = 0$, a la forma $y = ax + b$, luego gráficala.

Ⓢ Se despeja y: $2y = 6x - 12$

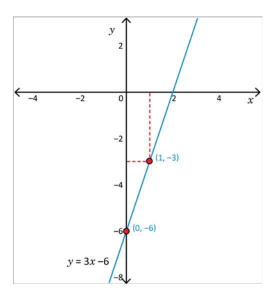
$y = 3x - 6$

Intercepto $b = -6$ así la recta pasa por el punto (0, 6).
Se determina otro punto de la gráfica:
Si $x = 1$, $y = 3(1) - 6$

$y = -3$

El punto es (1, −3)

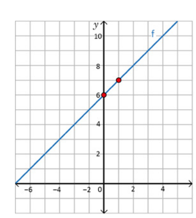
Trazar la gráfica que pasa por
(0, −6) y (1, −3)



Ⓡ a) 1. $y = x + 6$

2. (1, 7)

3.



Tarea: página 79 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ a partir de los interceptos

P

Para la ecuación $2x + y - 4 = 0$, realiza lo siguiente:

1. Identifica los interceptos con el eje y, cuando $x = 0$.
2. Identifica los interceptos con el eje x, cuando $y = 0$.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

S

Los interceptos con los ejes son:

1. El intercepto con el eje y, como $x = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 2(0) + y - 4 &= 0 \\ 0 + y - 4 &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

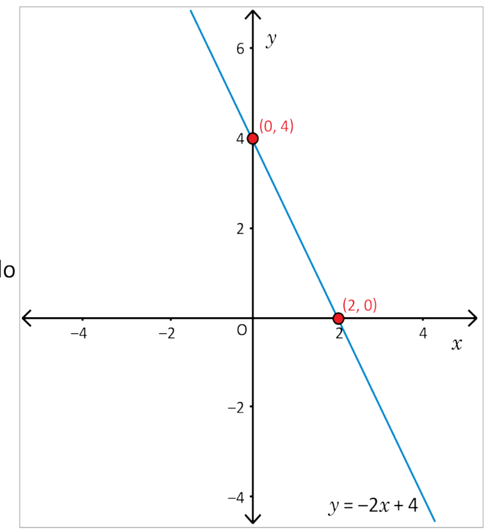
Se obtiene el punto (0, 4).

2. El intercepto con el eje x, $y = 0$, entonces sustituyendo en la expresión $2x + y - 4 = 0$

$$\begin{aligned} 2x + 0 - 4 &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Se obtiene el punto (2, 0).

3. Representa los puntos (0, 4) y (2, 0) y traza la gráfica.



C

Para trazar la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$, basta con conocer dos puntos y se pueden utilizar los interceptos con los ejes x y y, es necesario:

1. Identificar el intercepto con el eje y, $(0, b)$.
2. Determinar el intercepto con el eje x, haciendo $y = 0$ y calculando el respectivo valor de x, obteniendo el punto $(x, 0)$.
3. Representar los interceptos y trazar la gráfica.

Para cada una de las ecuaciones, realiza lo siguiente:

1. Determina el valor de los interceptos de la gráfica con los ejes y y x.
2. Traza la gráfica de la ecuación.

a) $3x + y = 6$

1. En y (0, 6). En x (2, 0).

b) $5x - 2y = 10$

1. En y (0, –5). En x (2, 0).

c) $3x - y = -6$

1. En y (0, 6). En x (–2, 0).

Indicador de logro

2.3 Grafica la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, identificando los interceptos con los ejes x y y.

Secuencia

En esta clase se aborda la representación gráfica de la ecuación de primer grado con dos incógnitas a partir de sus interceptos con los ejes y así prescindir del despeje de la variable y.

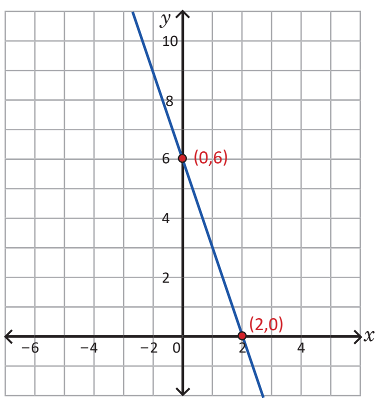
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Graficar una ecuación de primer grado con dos incógnitas encontrando los interceptos de la función con los ejes coordenados.

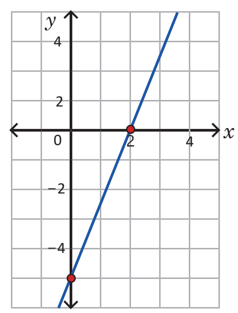
Ⓒ Establecer los pasos para graficar la ecuación $ax + by + c = 0$ a partir de los interceptos con los ejes.

Solución de algunos ítems:

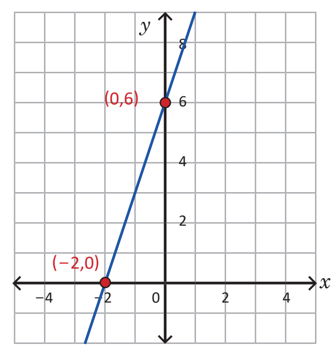
a) 2.



b) 2.



c) 2.



Materiales:
- Plano cartesiano sobre un pliego de papel bond para graficar la ecuación del Problema inicial y las del literal a) y b) del bloque de ejercicios y problemas.
- Metro o escuadra de madera.

Fecha:

U3 2.3

Ⓟ Para la ecuación $2x + y - 4 = 0$, realiza lo siguiente:
1. Identifica los interceptos con el eje y, cuando $x = 0$.
2. Identifica los interceptos con el eje x, cuando $y = 0$.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

Ⓢ 1. Si $x = 0 \rightarrow 2(0) + y - 4 = 0$

$y - 4 = 0$

se despeja y, $y = 4$

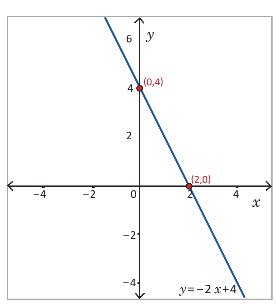
El intercepto en y es (0, 4).

2. Si $y = 0 \rightarrow 2x + 0 - 4 = 0$

$2x - 4 = 0$

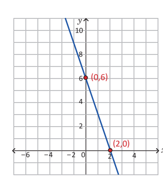
se despeja x, $x = 2$.

El intercepto en x es (2, 0).



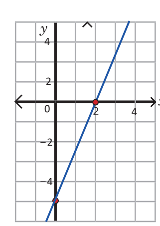
Ⓡ a) 1. En y (0, 6). En x (2, 0).

2.



b) 1. En y (0, –5). En x (2, 0).

2.



Tarea: página 80 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Trazo de la gráfica de la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, cuando $a = 0$

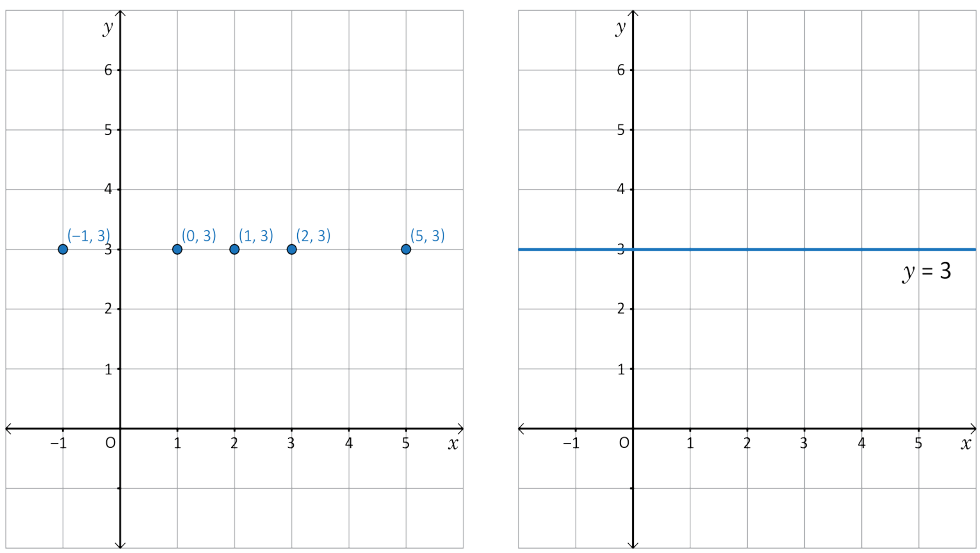
P

Para la ecuación $3y - 9 = 0$, realiza lo siguiente:

1. Resuelve la ecuación en y.
2. Determina al menos 4 pares de valores para x y y que cumplen la igualdad.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

S

1. Al resolver la ecuación en y, se tiene $3y = 9$, entonces $y = 3$.
2. Para determinar los pares ordenados, como en la ecuación $y = 3$, no aparece x, entonces serán todos los pares ordenados que tengan $y = 3$, por ejemplo: (–1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (5, 3), etc.
3. Entonces al representar gráficamente se tiene:



C

Para representar gráficamente la ecuación $by + c = 0$, se traza una recta horizontal en $y = -\frac{c}{b}$, pues x puede tomar cualquier valor; por tanto, la gráfica será una recta paralela al eje x, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

En cada una de las siguientes ecuaciones de la forma $by + c = 0$:

1. Despeja la incógnita y.
2. Represéntala gráficamente trazando la línea recta paralela al eje x, la cual pasa por el punto $(0, -\frac{c}{b})$.

a) $2y - 10 = 0$
1. $y = 5$

b) $-3y - 9 = 0$
1. $y = -3$

c) $\frac{1}{2}y - 3y = 0$
1. $y = 0$

d) $4y + 12 = 0$
1. $y = -3$

80

Indicador de logro

2.4 Representa gráficamente la ecuación de la forma $by = c$.

Secuencia

Se estudia el caso en el que la ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene cero como coeficiente de la variable x y por tanto, la representación gráfica es una recta horizontal.

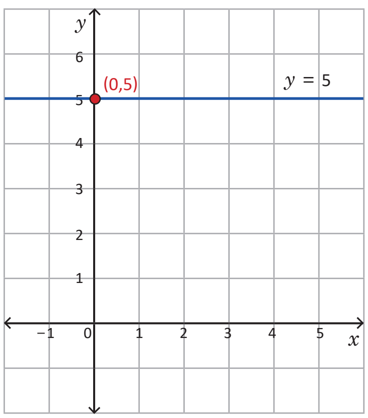
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Interpretar que los pares ordenados que cumplen la ecuación $by = c$ pertenecen a una recta horizontal.

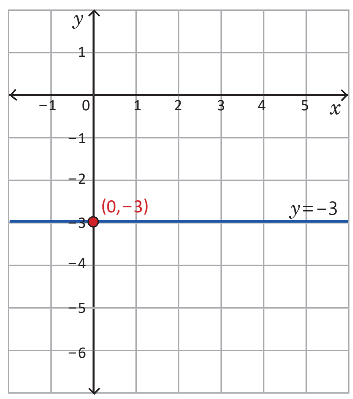
Solución de algunos ítems:

a) 1. $2y - 10 = 0 \Longrightarrow 2y = 10 \Longrightarrow y = 5$

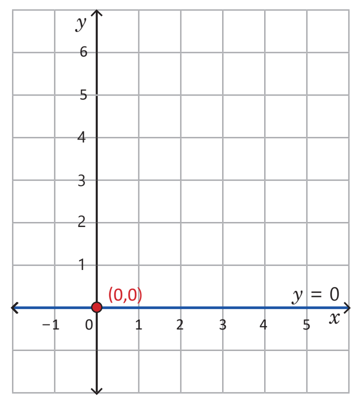
2.



b) 2.



c) 2.



Fecha:

U3 2.4

Ⓟ Para la ecuación $3y - 9 = 0$, realiza lo siguiente:

1. Resuelve la ecuación en y.
2. Determina al menos 4 pares de valores para x y y que cumplen la igualdad.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

Ⓢ 1. $3y - 9 = 0$

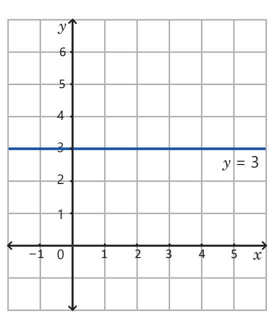
$3y = 9$

$y = 9 \div 3$

$y = 3$

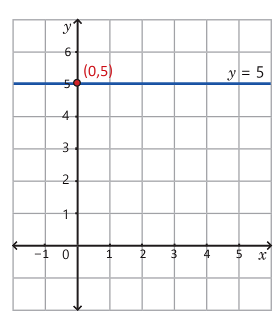
2. (−1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (5, 3)

3.



Ⓡ 1. a) $y = 5$

2. a)



Tarea: página 81 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Trazo de la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$, cuando $b = 0$

P

Para la ecuación $3x + 6 = 0$, realiza lo siguiente:

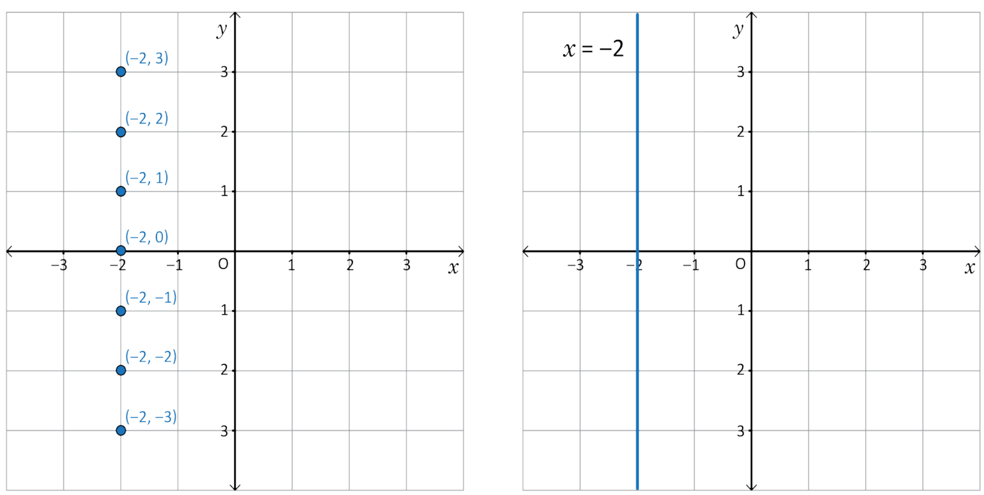
1. Resuelve la ecuación en x.
2. Determina al menos 4 pares de valores para x y y que cumplen la igualdad.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

S

1. Al resolver la ecuación en x, se tiene $3x = -6$, entonces $x = -2$.

2. Para determinar los pares ordenados, como en la ecuación $x = -2$, no aparece y, entonces serán todos los pares ordenados que tengan $x = -2$, por ejemplo: (−2, −3), (−2, −2), (−2, −1), (−2, 0), (−2, 1), (−2, 2), (−2, 3), etc.

3. Entonces, al representar gráficamente se tiene:



C

Para representar gráficamente la ecuación $ax + c = 0$, únicamente se traza una recta vertical en $x = -\frac{c}{a}$ pues y puede tomar cualquier valor; por tanto, la gráfica será una recta paralela al eje y, tal como se muestra en el ejemplo desarrollado.

En cada una de las siguientes ecuaciones $ax + c = 0$:

1. Despeja la incógnita x.
2. Represéntala gráficamente trazando la línea recta paralela al eje y, la cual pasa por el punto $(-\frac{c}{a}, 0)$.

a) $x - 2 = 0$
1. $x = 2$

b) $-2x + 6 = 0$
1. $x = 3$

c) $5x + 20 = 0$
1. $x = -4$

d) $\frac{1}{2}x - 2 = 0$
1. $x = 4$

Unidad 3

81

Indicador de logro

2.5 Representa gráficamente la ecuación de la forma $ax = c$.

Secuencia

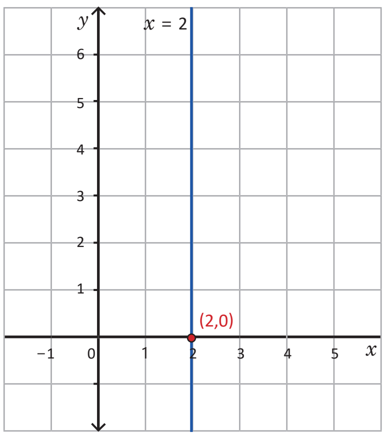
Ahora se estudia el caso en el cual el coeficiente de y es cero y por tanto la representación de la gráfica es una recta vertical.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ De forma análoga al caso visto en la clase anterior se debe interpretar que los pares ordenados que cumplen la ecuación $ax = c$ pertenecen a una recta vertical. Hasta esta clase el estudiante ha adquirido los conocimientos para reconocer y graficar diversos tipos de ecuaciones de la línea recta.

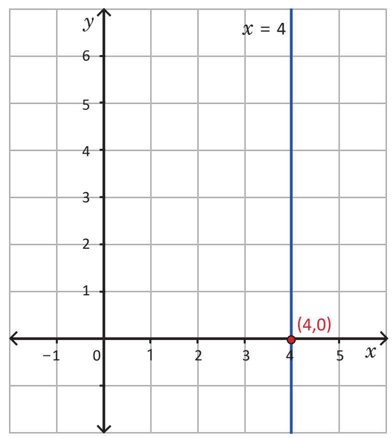
Solución de algunos ítems:

a) 2.



d) 1. $\frac{1}{2}x - 2 = 0 \Longrightarrow x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

2.



Fecha:

U3 2.5

Ⓟ Para la ecuación $3x + 6 = 0$, realiza lo siguiente:
1. Resuelve la ecuación en x.
2. Determina al menos 4 pares de valores para x y y que cumplen la igualdad.
3. Traza la gráfica de la ecuación.

Ⓢ 1. $3x + 6 = 0$

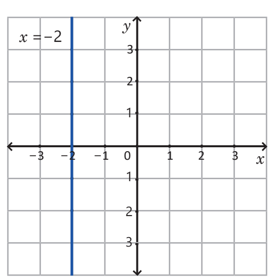
$3x = -6$

$x = -6 \div 3$

$x = -2$

2. $(-2, -3)$, $(-2, -2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$, $(-2, 3)$

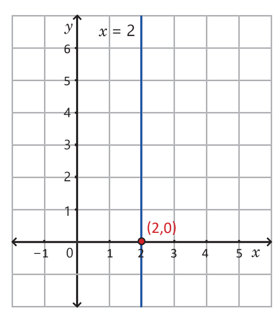
3.



Ⓡ 1. a) $x - 2 = 0$

$x = 2$

2. a)



Tarea: página 82 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.6 Intercepto de la gráfica de dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

P

Para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -3x + y + 6 = 0 & ① \\ x - y + 2 = 0 & ② \end{cases}$, realiza lo siguiente:

1. Lleva las dos ecuaciones a la forma $y = ax + b$.
2. Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
3. Identifica las coordenadas del punto donde se intersecan las dos rectas.
4. Interpreta el sentido del punto de intersección.

S

1. Al resolver las ecuaciones en y se tiene $\begin{cases} y = 3x - 6 & ① \\ y = x + 2 & ② \end{cases}$

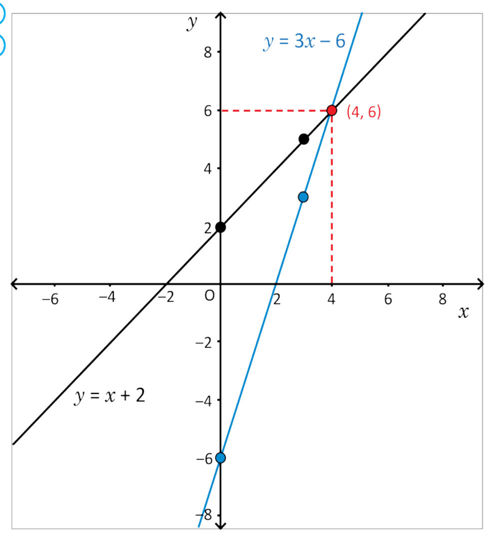
2. Para obtener la gráfica de cada ecuación se identifican dos puntos, estos pueden ser el intercepto con el eje y y un punto adicional.

   ① Si $x = 3$, entonces:
   $y = 3(3) - 6$
   $y = 9 - 6$
   $y = 3$

   Pasa por los puntos (0, −6) y (3, 3)

   ②
   $y = x + 2$
   $y = 3 + 2$
   $y = 5$

   Pasa por los puntos (0, 2) y (3, 5)



3. Al trazar líneas paralelas al eje y y eje x, respectivamente, se determina las coordenadas del punto en que se cortan las dos gráficas, tal como se muestra en la gráfica corresponde al punto (4, 6).

4. Como el punto (4, 6) corresponde a la gráfica de las dos ecuaciones, se puede decir que satisface las dos ecuaciones; por tanto corresponde a la solución del sistema de las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Entonces la solución del sistema es $x = 4$, $y = 6$.

Otra manera de encontrar la solución del sistema propuesto es mediante cualquiera de los métodos ya conocidos.

C

Cuando se grafica un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en un solo plano, las coordenadas del punto en que se intersecan las dos gráficas, corresponde a la solución del sistema, por tanto, un sistema de ecuaciones también se puede resolver de manera gráfica, representando las dos gráficas en un solo plano e identificando las coordenadas que corresponden al punto de intersección.

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones, realiza lo siguiente:

1. Lleva las dos ecuaciones a la forma pendiente intercepto.
2. Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
3. Identifica las coordenadas del punto donde se intersecan las dos rectas.
4. Encuentra la solución aplicando un método conocido.

a) $\begin{cases} x + y = 7 & ① \\ -x + y = -1 & ② \end{cases}$ 1. $y = -x + 7$ $y = x - 1$ 4. (4, 3)

b) $\begin{cases} 2x + y = 8 & ① \\ -2x + y = -8 & ② \end{cases}$ 1. $y = -2x + 8$ $y = 2x - 8$ 4. (4, 0)

Indicador de logro

2.6 Determina el intercepto de la gráfica de dos ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$.

Secuencia

En la Unidad 2 se estudiaron los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En esta clase se explica gráficamente el significado de su solución utilizando los conocimientos adquiridos en esta lección.

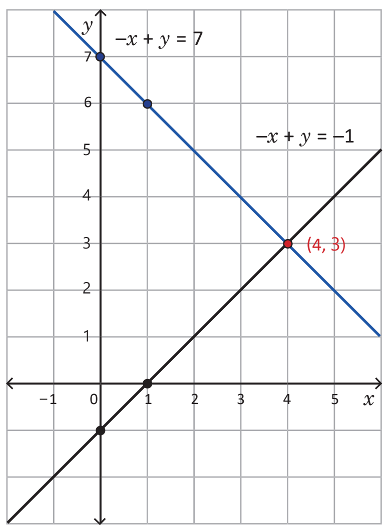
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Interpretar el intercepto de dos rectas como la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que se obtiene de sus ecuaciones.

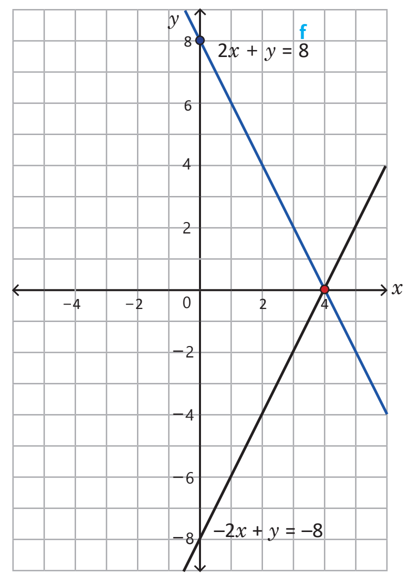
Solución de algunos ítems:

1. (Enfatizar la facilidad de aplicar el método de reducción).

a) 2.



b) 2.



Fecha:

U3 2.6

Ⓟ Dado el sistema realiza lo siguiente: $\begin{cases} -3x + y + 6 = 0 & ① \\ x - y + 2 = 0 & ② \end{cases}$

1. Lleva las dos ecuaciones a la forma $y = ax + b$ y grafícalas en un mismo plano.
2. Identifica el punto de intersección de las dos rectas.
3. Interpreta este resultado

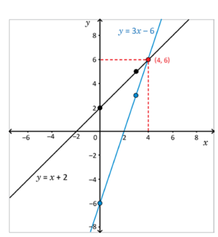
Ⓢ 1. $\begin{cases} y = 3x - 6 & ① \\ y = x + 2 & ② \end{cases}$

Si $x = 3$, entonces:

① Puntos (0, –6) y (3, 3)

② Puntos (0, 2) y (3, 5)

2.

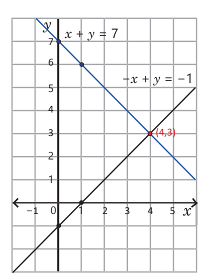


3. El intercepto (4, 6) satisface ① y ② por tanto corresponde a la solución del sistema. Entonces la solución del sistema es $x = 4$, $y = 6$.

Ⓡ a) $\begin{cases} x + y = 7 & ① \\ -x + y = -1 & ② \end{cases}$

1. $\begin{cases} y = -x + 7 & ① \\ y = x - 1 & ② \end{cases}$

2.



3. (4, 3)
4. (4, 3)

Tarea: página 83 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Solución gráfica de un sistema de ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$

P

Resuelve gráficamente el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 12 & ① \\ -x - 3y = 3 & ② \end{cases}$

Para graficar las ecuaciones, puedes determinar los interceptos con los ejes x y y.

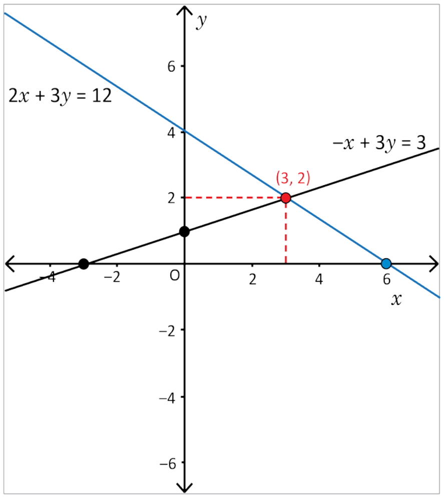
S

Para resolver el sistema gráficamente, se pueden utilizar los interceptos, y realizar lo siguiente:

1. Determinar las coordenadas de los interceptos de cada una de las ecuaciones con los ejes x y y.

2. Se grafican las dos ecuaciones en un mismo plano, a partir de los interceptos.

Ecuación	Intercepto eje y ($x = 0$)	Intercepto eje x ($y = 0$)	Par ordenado
$2x + 3y = 12$	$2(0) + 3y = 12$ $y = 4$ (0, 4)	$2x + 3(0) = 12$ $x = 6$ (6, 0)	(0, 4) y (6, 0)
$-x + 3y = 3$	$-(0) + 3y = 3$ $y = 1$ (0, 1)	$-x + 3(0) = 3$ $x = -3$ (−3, 0)	(0, 1) y (−3, 0)



3. Construir las gráficas e identificar el intercepto.

4. Analizar la solución, tal como se muestra en la gráfica, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 3$, $y = 2$.

C

Para determinar la solución de un sistema de ecuaciones de manera gráfica, se pueden utilizar los interceptos y se realiza lo siguiente:

1. Determinar el intercepto con cada uno de los ejes x y y.
2. Representar los interceptos en el plano y construir la gráfica.
3. Identificar los valores de x y y que corresponden al punto de intersección de las rectas.

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones, de forma gráfica.

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 & ① \\ x + 4y = -4 & ② \end{cases}$ (8, −3)

b) $\begin{cases} -x + y = -2 & ① \\ -x + 2y = 2 & ② \end{cases}$ (6, 4)

Unidad 3

Indicador de logro

2.7 Determina la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas de forma gráfica.

Secuencia

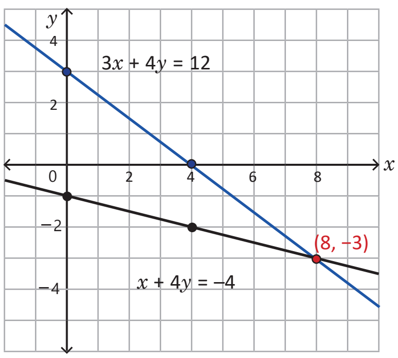
En la clase anterior se interpretó el intercepto de dos rectas como la solución del sistema de ecuaciones que establecen. Esto se utiliza ahora para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales.

Propósito

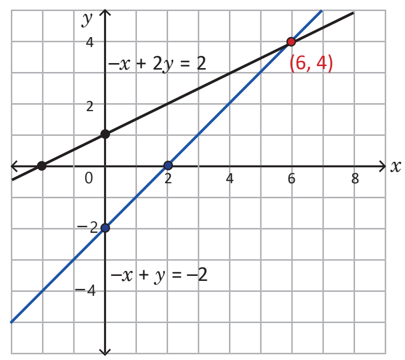
Ⓟ, Ⓢ Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas a partir de la representación gráfica del intercepto.

Solución de algunos ítems:

a)



b)



Fecha:

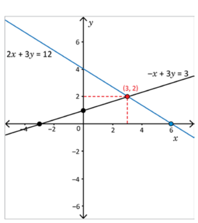
U3 2.7

Ⓟ Resuelve gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 & ① \\ -x - 3y = 3 & ② \end{cases}$$

Ⓢ

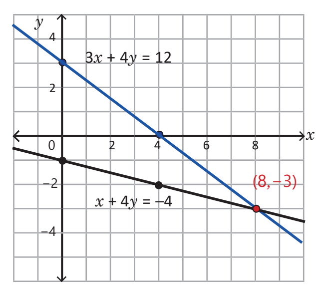
Ecuación	Intercepto eje y ($x = 0$)	Intercepto eje x ($y = 0$)	Par ordenado
$2x + 3y = 12$	$2(0) + 3y = 12$ $y = 4$ (0, 4)	$2x + 3(0) = 12$ $x = 6$ (6, 0)	(0, 4) y (6, 0)
$-x + 3y = 3$	$-(0) + 3y = 3$ $y = 1$ (0, 1)	$-x + 3(0) = 3$ $x = -3$ (−3, 0)	(0, 1) y (−3, 0)



El intercepto es (3, 2)

Entonces la solución del sistema es $x = 3$ y $y = 2$.

Ⓡ a)



Solución $x = 8$, $y = -3$

Tarea: página 84 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. Para cada una de las ecuaciones lineales, realiza lo siguiente:
   - Resuélvela en y, llevándola a la forma $y = ax + b$, si es posible.
   - Identifica los interceptos con cada uno de los ejes, si es posible.
   - Grafícala en el plano cartesiano.

a) $2x + y = 6$
$y = -2x + 6$, (0, 6), (3, 0)

b) $x + 3y = 12$
$y = -\frac{1}{3}x + 4$, (0, 4), (12, 0)

c) $3x + 4y = 12$
$y = -\frac{3}{4}x + 3$, (0, 3), (4, 0)

d) $5x - 3y = 15$
$y = \frac{5}{3}x - 5$, (0, –5), (3, 0)

e) $\frac{1}{2}y - 3 = 0$
$y = 6$, (0, 6)

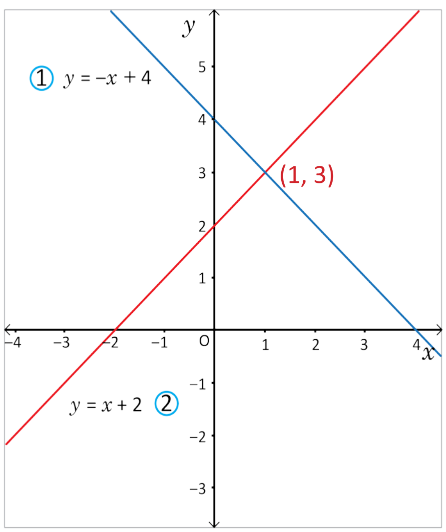
f) $3y + 9 = 0$
$y = -3$, (0, –3)

g) $\frac{1}{3}x - 1 = 0$
$x = 3$, (3, 0)

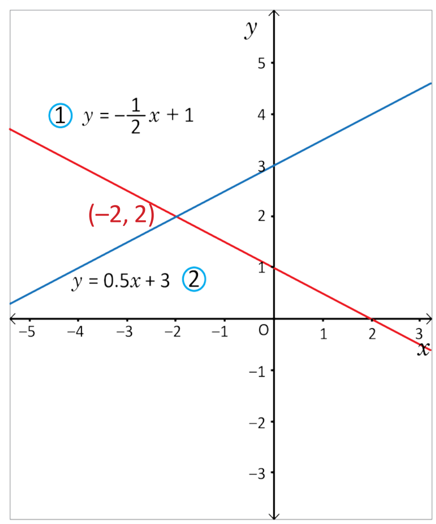
h) $2x + 6 = 0$
$x = -3$, (–3, 0)

2. Relaciona cada ecuación del sistema con su respectiva representación gráfica e identifica la solución.

a)



b)



3. Para cada uno de los sistemas realiza lo siguiente:
   - Expresa las ecuaciones en la forma $y = ax + b$.
   - Grafica las dos ecuaciones en un mismo plano.
   - Determina la solución del sistema.

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 10 & ① \\ 2x + 3y = 6 & ② \end{cases}$
$y = \frac{2}{5}x + 2$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$ (0, 2)

b) $\begin{cases} x - y = 1 & ① \\ 2x + 3y = 12 & ② \end{cases}$
$y = x - 1$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (3, 2)

c) $\begin{cases} -x + 2y = -6 & ① \\ -2x - y = -2 & ② \end{cases}$
$y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = -2x + 2$ (2, –2)

d) $\begin{cases} -x + y = -1 & ① \\ x + y = 3 & ② \end{cases}$
$y = x - 1$, $y = -x + 3$ (2, 1)

4. Grafica cada uno de los sistemas de ecuaciones e indica si tienen solución, justifica tu respuesta.

a) $\begin{cases} 4x + 6y = 12 & ① \\ 2x + 3y = 6 & ② \end{cases}$
Sí tiene

b) $\begin{cases} -x + 3y = 5 & ① \\ -x + 3y = -2 & ② \end{cases}$
No tiene

c) $\begin{cases} -x + 3y = 3 & ① \\ -3x - y = 9 & ② \end{cases}$
Sí tiene, $x = -3$, $y = 0$

d) $\begin{cases} -3x + 4y = 0 & ① \\ -4x - 3y = 0 & ② \end{cases}$
Sí tiene, $x = 0$, $y = 0$

Indicador de logro

2.8 Resuelve problemas correspondientes a la función lineal.

Solución de algunos ítems:

1. a) $y = -2x + 6$

Interceptos

En el eje y: (0, 6)

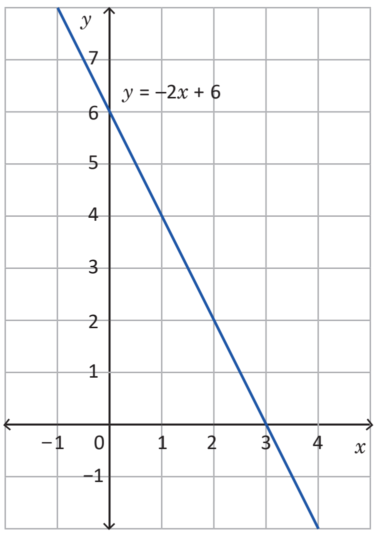
En el eje x: si $y = 0$

$2x + 0 = 6$

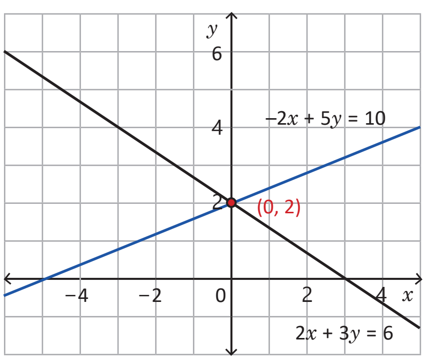
$2x = 6$

$x = 3$

Punto (3, 0)

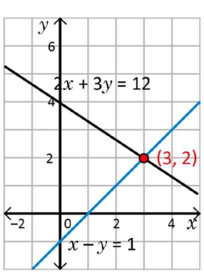


3. a)

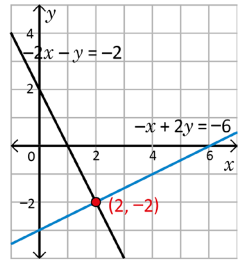


La solución del sistema es $x = 0$ y $y = 2$.

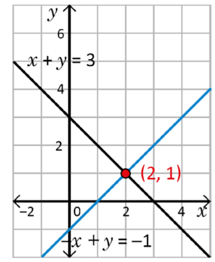
3. b)



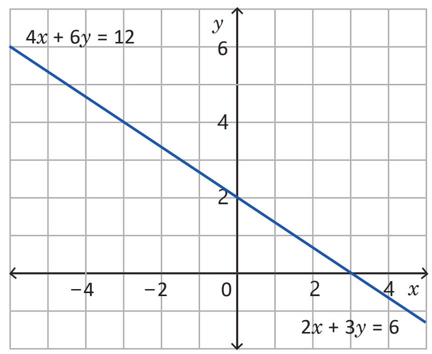
3. c)



3. d)

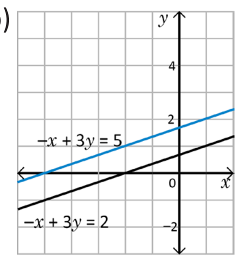


4. a)

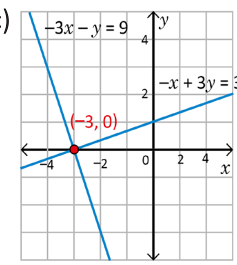


Sí tiene solución. Ambas ecuaciones representan la misma gráfica por lo que cada punto de la recta es solución del sistema.

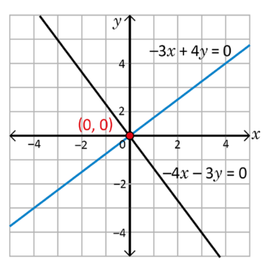
4. b)



4. c)



4. d)



Tarea: página 85 del Cuaderno de Ejercicios.

3.1 Aplicaciones de la función lineal, parte 1

P

En el recibo del consumo mensual de agua de la casa de Carlos, aparecen reflejados los siguientes conceptos: servicio de alcantarillado \$3.00 mensuales y \$0.50 por metro cúbico (m^3) de agua consumida.

1. ¿Cuánto deberá pagar en un mes que haya consumido 16 m^3?
2. Escribe el total y a pagar, cuando se consumen x metros cúbicos de agua.
3. Representa gráficamente la función que relaciona el consumo del agua en metros cúbicos con el costo total a pagar.

S

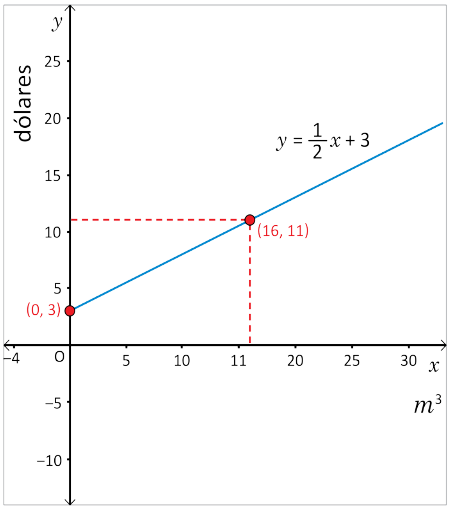
1. Para determinar cuánto debe pagar Carlos al consumir 16 metros cúbicos de agua, se considera servicio de alcantarillado + 0.50 × total de m^3 de agua consumidos:

$$3 + 0.5(16) = 3 + 8 = 11.$$

   Por 16 metros cúbicos deberá pagar 11 dólares.

2. A partir del literal anterior, si se sustituye para x metros cúbicos se tiene: $y = 3 + 0.5x$, que es equivalente a $y = 0.5x + 3$.

3. Conociendo el costo cuando no se ha generado consumo de agua y el costo cuando se consumen 16 metros cúbicos, se puede trazar la gráfica, tal como se muestra en la figura.



Como x representa el consumo, $x \geq 0$; por tanto, no aparece la gráfica para valores negativos de x.

C

Para resolver problemas aplicando la función lineal, únicamente se necesita identificar las dos variables x y y, y pensar en y como una función lineal de x, luego dar respuesta a la situación planteada.

La relación entre los grados Fahrenheit (F) y los Celsius (C) es la siguiente:

- 0° C es equivalente a 32° F y 100° C a 212° F.
- Si x° C equivalen a y° F, y es una función lineal de x, encuentra la ecuación que relaciona las dos variables. $y = \frac{9}{5}x + 32$

1. Determina la variación térmica de un día de invierno en que se registra una temperatura mínima de 0° C y una máxima de 15° C, exprésala en grados Fahrenheit. 27 °F

2. ¿A qué temperatura un termómetro Fahrenheit marca numéricamente el triple que el de Celsius? 80 °F

Unidad 3

85

Indicador de logro

3.1 Resuelve problemas mediante el uso de la función lineal.

Secuencia

En esta lección se estudiarán las aplicaciones de la función lineal. Para esta clase se trabaja un problema aplicado y sencillo sobre el planteamiento de una función lineal a partir del enunciado.

Indicar a los estudiantes que lean el enunciado del problema en el LT.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Escribir como función lineal y representar gráficamente la solución de un problema aplicado.

Solución de algunos ítems:

La ecuación que relaciona las variables tiene la forma $y = ax + b$.

El punto (0, 32) da el intercepto $b = 32$

Pendiente
$a = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$

La ecuación es $y = \frac{9}{5}x + 32$.

1. Si $x = 0$ entonces $y = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$

   Si $x = 15$ entonces $y = \frac{9}{5}(15) + 32 = 59$

   La variación es 59 – 32 = 27 °F

2.
$$y = 3x$$
$$\frac{9}{5}x + 32 = 3x$$
$$9x + 160 = 15x$$
$$9x - 15x = -160$$
$$-6x = -160$$
$$x = \frac{160}{6}$$
$$x = \frac{80}{3}$$

Se calcula la temperatura en grados Fahrenheit:

$y = 3\left(\frac{80}{3}\right) = 80$

Por lo tanto a 80 °F será el triple que su correspondiente temperatura en grados Celsius.

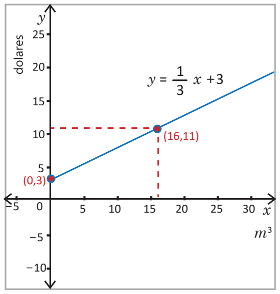
Fecha:

U3 3.1

Ⓟ
1. ¿Cuánto deberá pagar en un mes que haya consumido 16 m³?
2. Escribe el total y a pagar, cuando se consumen x metros cúbicos de agua.
3. Representa gráficamente la función que relaciona el consumo del agua con el costo total a pagar.

Ⓢ
1. 3 + 0.5(16) = 3 + 8 = 11.
   Por 16 metros cúbicos deberá pagar 11 dólares.

2. $y = 0.5x + 3$

3.


Ⓡ
1. $y = \frac{9}{5}x + 32$
2. 27 °F
3. 80 °F

Tarea: página 86 del Cuaderno de Ejercicios.

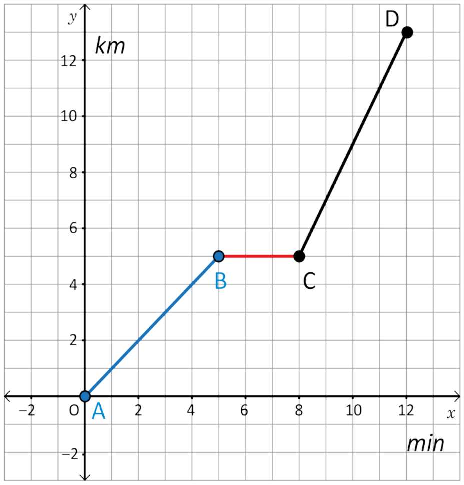
3.2 Aplicaciones de la función lineal, parte 2

P

Mario participó en una carrera, después de 5 minutos tuvo dificultades e hizo una parada, luego de 3 minutos se restableció y retomó la carrera, para recuperar el tiempo perdido aumentó la velocidad. Considerando y kilómetros recorridos en x minutos, responde:

1. ¿A qué distancia del punto de partida hizo la parada Mario?

2. Expresa la distancia recorrida y después de transcurrido x minutos en el recorrido, tanto antes como después de la parada.



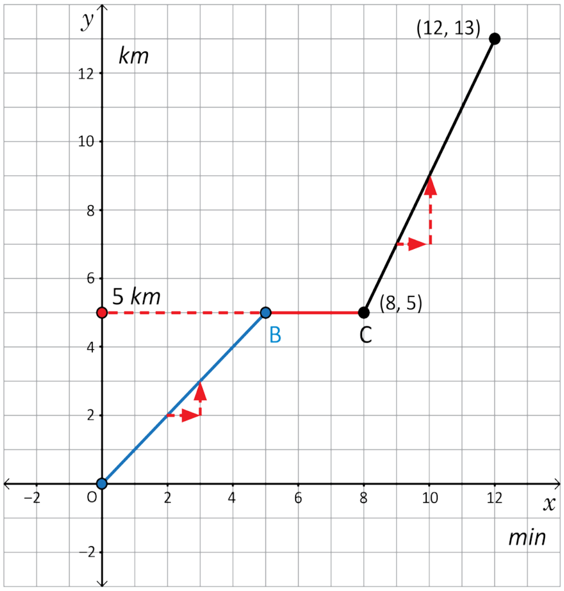
S

1. Para determinar a qué distancia se encontraba Mario, se traza una línea paralela al eje x y que pase por el punto en que se detuvo, se puede observar que Mario paró a 5 km del punto de partida.

2. Distancia antes y después de la parada.
   - Al determinar la razón de cambio antes de la parada, se observa que por cada minuto que pasa, Mario recorre 1 km, es decir, $a = 1$; por tanto, la distancia y antes de la parada es $y = x$.

   - Al determinar la razón de cambio después de la parada puede verse que por cada minuto que transcurre, Mario recorre 2 km, es decir, $a = 2$, además pasa por el punto (12, 13); de donde se obtiene el valor de b al sustituir en $y = ax + b$:

$$13 = 2(12) + b$$
$$13 = 24 + b$$
$$13 - 24 = b$$
$$-11 = b$$



Por tanto, la distancia y después de la parada puede expresarse como $y = 2x - 11$.

María salió de su casa hacia la escuela que dista 1 500 m de su casa.

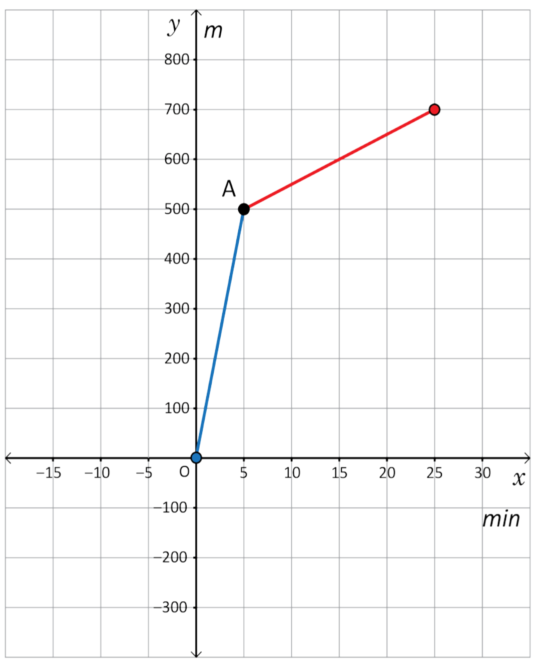
De la casa hasta el punto A se desplazó en bicicleta, y a partir de ahí se fue caminando. La gráfica muestra la relación entre el tiempo x (minutos) transcurridos desde que sale de casa y la distancia recorrida y (metros).

a) Determina la velocidad en metros por minuto mientras se desplaza en bicicleta. 100 m/min

b) Expresa la relación entre el tiempo transcurrido x minutos y la distancia recorrida y metros, desde 0 a 5 minutos. $y = 100x$

c) ¿Cuál es la velocidad de María cuando se desplaza caminando? 10 m/min

d) Expresa la relación entre los x minutos transcurridos y la distancia y recorrida desde 5 a 25 minutos. $y = 10x + 450$



Indicador de logro

3.2 Extrae información de un gráfico para resolver problemas.

Secuencia

Para esta clase se presenta un problema aplicado cuya solución implica la comprensión de un gráfico así como utilizar más de una función lineal.

Indicar al estudiante que lea el enunciado del problema para utilizar el tiempo adecuadamente.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Interpretar la gráfica que representa el problema planteado. Ejemplificar el caso en el que se deben utilizar diferentes funciones lineales dependiendo del valor de la variable x.

Solución de algunos ítems:

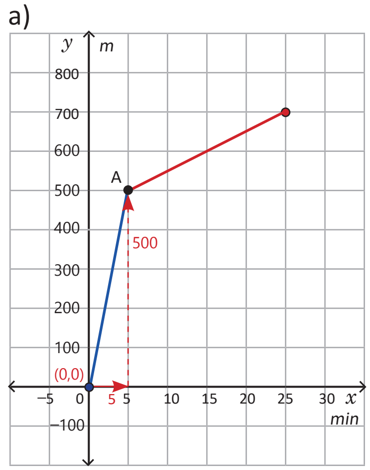
Recordar a los estudiantes que la velocidad se calcula como la razón de la distancia sobre el tiempo.

a) Distancia recorrida: 500 m
Tiempo: 5 min
Velocidad = 500 m ÷ 5 min
= 100 m/min

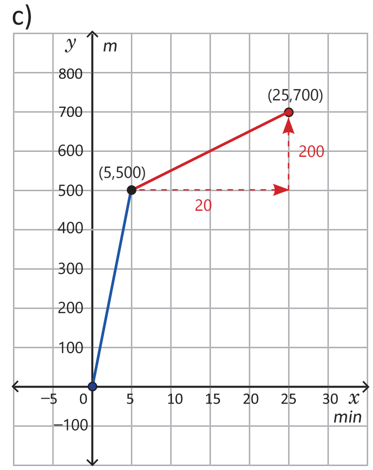
b) Intercepto b = 0
Pendiente $a = \frac{500}{5} = 100$
Ecuación $y = 100x$

c) Distancia recorrida: 200 m
Tiempo = 20 min
Velocidad = 200 m ÷ 20 min
= 10 m/min

a)



c)



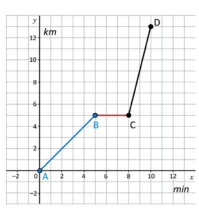
d) Pendiente $a = \frac{200}{20} = 10$. Intercepto, la ecuación es $y = 10x + b$ y pasa por (5 500)
500 = 10(5) + b, de donde b = 450.

Por lo tanto, la distancia recorrida desde 5 min hasta 50 min se puede escribir como $y = 10x + 450$.

Fecha: **U3 3.2**

Ⓟ Responde:

1. ¿A qué distancia del punto de partida hizo la parada Mario?
2. Expresa la distancia recorrida y después de transcurrido x minutos en el recorrido, tanto antes como después de la parada.

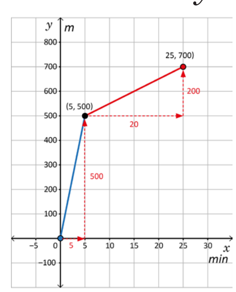


Ⓢ 1. Mario paró a 5 km del punto de partida.

2. Antes
$a = 1$
$b = 0$
la distancia es
$y = x$

Después
$a = 2$
pasa por (12, 13)
13 = 2(12) + b
13 = 24 + b
−11 = b

Ⓡ La distancia es $y = 2x - 11$



1. 100 m/min
2. $y = 100x$
3. 10 m/min
4. $y = 10x + 450$

Tarea: página 87 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Aplicaciones de la función lineal, parte 3

P

En el rectángulo ABCD, el punto E se mueve sobre el borde del rectángulo desde el punto A, hasta D, pasando por los puntos B y C. Cuando el punto E se ha movido x cm, se toma el área del triángulo AED como y cm^2. Observa las figuras y responde:

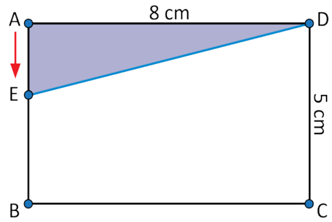


Figura 1

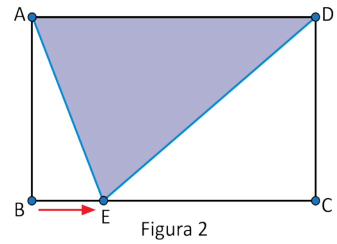


Figura 2

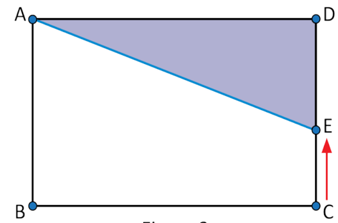


Figura 3

1. Explica qué sucede con el área del triángulo AED, cuando:

   a) E se desplaza sobre el lado AB, es decir $0 \leq x \leq 5$.
   b) E se desplaza sobre el lado BC, es decir $5 \leq x \leq 13$.
   c) E se desplaza sobre el lado CD, es decir $13 \leq x \leq 18$.

2. Expresa el área y del triángulo AED, cuando E se mueve de A hasta B (ver figura 1).

3. Determina el área y del triángulo AED, cuando E se mueve de B hasta C (ver figura 2).

4. Expresa el área y del triángulo AED, cuando E se mueve de C hasta D (ver figura 3).

S

1. Al observar el movimiento que realiza el punto E en cada uno de los casos se puede concluir que
   a) Cuando E se mueve sobre el lado AB, el área del triángulo AED aumenta.
   b) Cuando E se mueve sobre el lado BC, el área del triángulo se mantiene constante, pues la base es 8 cm y la altura es 5 cm, en cualquier momento.
   c) Cuando E se mueve sobre el lado CD, el área del triángulo disminuye hasta llegar a cero.

2. El área del triángulo AED, cuando E se mueve sobre AB, se puede calcular considerando que la base es 8 cm y la altura x, entonces $y = \frac{1}{2}(8)(x) = 4x$; es decir, $y = 4x$ para $0 \leq x \leq 5$.

3. El área del triángulo AED, cuando E se mueve sobre BC, en este caso la base es 8 cm y la altura 5 cm, entonces el área es $y = \frac{8(5)}{2}$; es decir $y = 20$ para $5 \leq x \leq 13$.

4. El área del triángulo AED, cuando E se mueve sobre CD, en este caso la base es 8 cm y la altura es $(18 - x)$ cm, entonces el área es $y = \frac{1}{2}(8)(18 - x) = 4(18 - x) = 72 - 4x$; es decir, $y = -4x + 72$, para $13 \leq x \leq 18$.

Representa gráficamente en un mismo plano el área del triángulo AED, cuando:

a) E se mueve sobre el lado AB.
b) E se mueve sobre el lado BC.
c) E se mueve sobre el lado CD.

Indicador de logro

3.3 Determina el área de una figura plana mediante el uso de la función lineal.

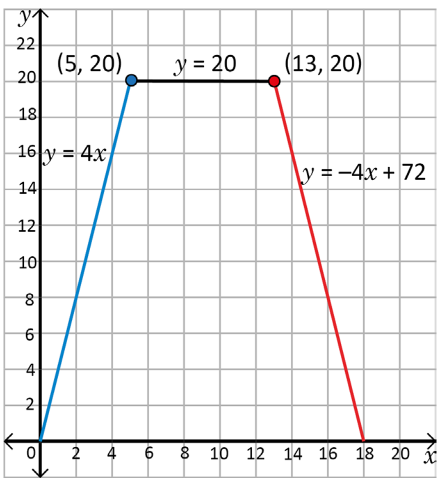
Secuencia

Para esta clase se presenta un problema de razonamiento sobre áreas de figuras planas, en el que se deben utilizar funciones lineales para representar la situación planteada.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Escribir las funciones lineales que describen el proceso planteado en cada uno de los numerales del problema.

Solución de algunos ítems:



Materiales:
- Pliego de papel bond con los rectángulos del Problema inicial.
- Pliego de papel bond con la imagen del ejercicio del bloque de problemas y ejercicios.

Fecha: **U3 3.3**

Ⓟ 1. Explica qué sucede con el área del triángulo AED, cuando:

a) E se desplaza sobre el lado AB, es decir $0 \leq x \leq 5$.
b) E se desplaza sobre el lado BC, es decir $5 \leq x \leq 13$.
c) E se desplaza sobre el lado CD, es decir $13 \leq x \leq 18$.

Expresa el área y del triángulo AED, cuando:
2. E se mueve de A hasta B.
3. E se mueve de B hasta C.
4. E se mueve de C hasta D.

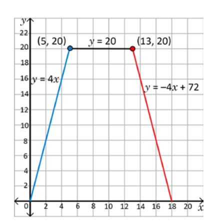
Ⓢ 1. a) Aumenta.
b) Se mantiene constante pues la base es 8 cm y la altura es 5 cm, en cualquier momento.
c) Disminuye.

2. La base es 8 cm y la altura x. Área:
$y = \frac{1}{2}(8)(x) = 4x$

3. La base es 8 cm y la altura 5 cm
Área: $y = \frac{8(5)}{2} = 20$

4. La base es 8 cm y la altura es $(18 - x)$
Área: $y = \frac{1}{2}(8)(18 - x)$
$y = 72 - 4x$
$y = -4x + 72$

Ⓡ



Tarea: página 88 del Cuaderno de Ejercicios.

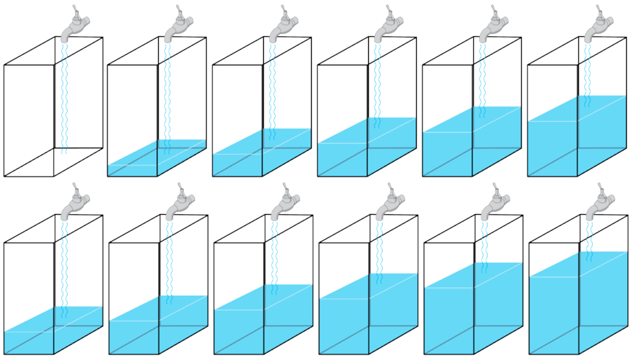
3.4 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. Don Juan, tiene una microempresa familiar dedicada a la elaboración de armarios. Esta microempresa cuenta con un pequeño local por el cual pagan 800 dólares mensuales de alquiler y dos empleados que cobran 600 dólares mensuales cada uno. El costo de materia prima de cada armario más gastos de distribución asciende a 100 dólares y el precio por unidad de venta es de 150 dólares.

   a) Define la función lineal **Costo total** y, de elaboración de x unidades de clósets y grafícala. $y = 100x + 2\,000$
   b) Define la función lineal y **Ingreso total**, por la venta de x clósets y grafícala, (considera que Ingreso = precio unitario por número de unidades vendidas). $y = 150x$
   c) Define la función lineal y **Utilidad total** (Utilidad = Ingreso total – Costo total), para x armarios vendidos. $y = 50x - 2\,000$
   d) Para que don Juan no se quede endeudado, ¿cuántos armarios debe vender como mínimo por mes? 40 armarios

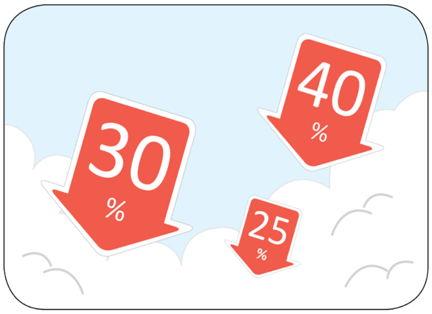
2. Miguel lavó la pila de su casa, luego abrió el grifo y observó que por cada minuto que transcurría, el nivel de agua en la pila subía un centímetro; mientras que la pila de su tía tenía agua hasta un nivel de 2 centímetros y al abrir el grifo la cantidad de agua aumentó de la misma manera que en el caso de Miguel. Considerando que ambas pilas tienen 90 cm de altura, realiza lo siguiente:



   a) Toma la medida del nivel de agua en distintos momentos y organiza los resultados en una tabla.
   b) ¿Es posible determinar el tiempo de llenado de la pila?
   c) ¿Es posible comparar los datos del llenado de la pila de Miguel con los datos del llenado de la pila de la tía?, ¿existe alguna relación? Miguel: 90 minutos Su tía: 88 minutos
   Se llenan a la misma razón 1 m/1 min

3. Han llegado las rebajas de fin de año y en una tienda aplican el 20% de descuento en todos los productos.

   a) Escribe una ecuación que relacione el precio rebajado y con el precio original x. $y = 0.8x$
   b) ¿Cuánto se debe pagar por una camisa que originalmente costaba $60.00? $48
   c) Considera productos de distintos precios y elabora una gráfica que relacione el precio original x con el rebajado y.



Indicador de logro

3.4 Resuelve problemas correspondientes a la función lineal.

Solución de algunos ítems:

1. a) $y = 800 + 2(600) + 100x$

$y = 100x + 2\,000$

b) $y = 150x$

c) $y = 150x - (100x + 2\,000)$

$y = 50x - 2\,000$

d) Para no endeudarse la utilidad debe ser cero si $y = 0$, es decir:

$$0 = 50x - 2\,000$$
$$2\,000 = 50x$$
$$2\,000 \div 50 = x$$
$$40 = x$$

Por lo tanto, para no quedar endeudado don Juan debe vender 40 armarios.

2. a) Pila de Miguel

x (min)	0	1	2	5	10
y (cm)	0	1	2	5	10

Pila de la tía

x (min)	0	1	2	5	10
y (cm)	2	3	4	7	12

b) La pila de Miguel se llena a razón 1 m/1 min. Entonces la pila estará llena cuando hayan pasado 90 minutos, pues la pila tendrá agua a un nivel de 90 cm.

La pila de su tía después de x minutos tiene $x + 2$ centímetros de agua. Si la pila se llena en x minutos entonces $x + 2 = 90$, por lo que la pila se llenará en $x = 88$ minutos.

c) Sí pueden compararse los datos de las dos pilas: ambas se llenan a la misma razón 1 m/1 min.

3. a) $y : 80 = x : 100$

$100y = 80x$

$y = 80x \div 100$

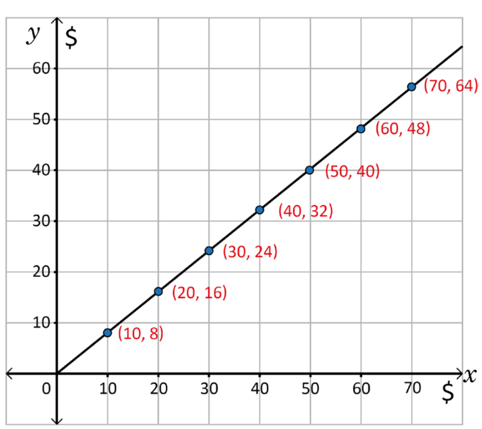
$y = 0.8x$

b) $y = 0.8(60)$

$y = 48$

3. c)

x (Precio original)	10	20	30	40	50	60	70
y (Precio rebajado)	8	16	24	32	40	48	56



Tarea: página 90 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Practica lo aprendido

Resuelve los problemas aplicando las estrategias y métodos de solución aprendidos.

1. En una ciudad existen dos compañías de telefonía:

   - La compañía A ofrece una cuota fija de $15.00 al mes, más $0.05 el minuto consumido.
   - La compañía B cobra únicamente el consumo a $0.25 el minuto.

   a) Grafica en un mismo plano la función lineal entre x minutos consumidos y el importe y de pago de la factura mensual para ambas compañías.
   b) Si se habló menos de 70 minutos al mes, ¿cuál compañía conviene contratar? Compañía B
   c) ¿En qué casos es indiferente que se contrate cualquiera de las dos compañías? $x = 75$
   d) ¿En qué caso conviene contratar la compañía A? Si en el mes se habla más de 75 minutos.

2. En una ciudad se cuenta con una regulación sobre estacionamientos, la norma indica que se debe pagar cierta cantidad por cada minuto y que no hay un mínimo.

   - José deposita $1.10 y el parquímetro indica que dispone de 45 minutos (3/4 de hora).
   - Beatriz con $3.30 tiene 3 horas y media.

   a) Halla la ecuación que relaciona el precio con el tiempo. $y = \frac{1}{75}x + \frac{1}{2}$
   b) Dibuja la gráfica.
   c) ¿Cuánto hay que pagar por estacionarse 40 minutos (2/3 de hora)? $1.03
   d) Si se paga $4.50, ¿de cuánto tiempo se dispone para estacionarse? 300 minutos o 5 horas

3. Marta es vendedora de automóviles, tiene un sueldo fijo de $800 mesuales más una comisión de $100 por cada automóvil que venda. Encuentra la función que expresa el sueldo de Marta en un mes que haya vendido x automóviles y dibuja su gráfica. $y = 100x + 800$

4. A Julia sus padres le dan cada mes $10.00 para su refrigerio más $0.50 por cada día que haga la limpieza. Encuentra la función que expresa el dinero que recibe Julia, al final del mes, habiendo hecho la limpieza x días y dibuja su gráfica. $y = 0.5x + 10$

5. En un negocio de reparación de llantas un trabajador tiene un sueldo diario formado por la suma de una base fija más $2 por cada llanta reparada. En cierto día del mes, después de que había reparado 12 llantas, el empleado calculó que su sueldo diario era de $44.

   a) ¿Cuál es el sueldo diario fijo del trabajador? $20
   b) ¿Cuál es la función que representa el sueldo del trabajador cuando arregla x llantas? $y = 2x + 20$
   c) Grafica la función lineal que representa el sueldo diario del trabajador.

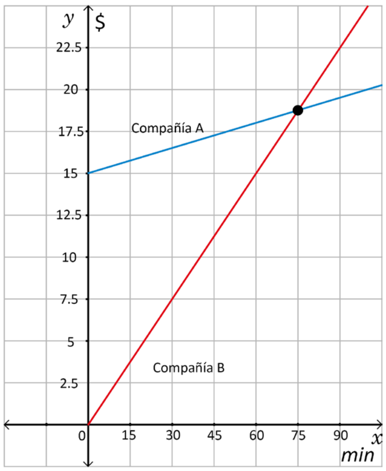
6. En una factura de agua potable el cargo fijo es de $3.00, y el costo del metro cúbico de agua es de $1.50. Considerando que el monto a cancelar se calcula mediante una función lineal:

   a) Escribe la ecuación para determinar el total de la factura y para x metros cúbicos. $y = 1.5x + 3$
   b) Elabora una gráfica para la relación entre el consumo de agua x y el costo a pagar y.
   c) ¿Cuánto se facturó en diciembre, si en ese mes el consumo fue de 28 m^3? $45

Indicador de logro

3.5 Resuelve problemas correspondientes a la función lineal.

1. Si se dificulta trazar la gráfica se debe sugerir la escala mostrada en la solución.
   a) Compañía A: $y = 0.05x + 15$
   Compañía B: $y = 0.25x$



b) La compañía B

c) Es indiferente si el cobro de las compañías es el mismo.

$$0.25x = 0.05x + 15$$
$$25x = 5x + 1\,500$$
$$20x = 1\,500$$
$$x = 75$$

Así, es indiferente si en el mes se habla 75 minutos.

d) Si en el mes se habla más de 75 minutos.

2. Se utilizan los tiempos en minutos.

a) Los puntos son (45, 1.1) y (210, 3.3)

Pendiente

$$a = \frac{3.3 - 1.1}{210 - 45} = \frac{2.2}{165} = \frac{22}{1650} = \frac{1}{75}$$

Intercepto

$$1.1 = \frac{1}{75}(45) + b$$
$$1.1 = \frac{3}{5} + b$$
$$11 = 6 + 10b$$
$$5 = 10b$$
$$\frac{1}{2} = b$$

La ecuación es $y = \frac{1}{75}x + \frac{1}{2}$

c) Utilizar calculadora en este literal.

d)
$$4.5 = \frac{1}{75}x + \frac{1}{2}$$
$$45 = \frac{2}{15}x + 5$$
$$15(45) = 2x + 15(5)$$
$$15(45 - 5) = 2x$$
$$15(40) = 2x$$
$$15(20) = x$$
$$300 = x$$

Aplicación de la matemática al entorno
En esta clase se plantean situaciones del entorno que el estudiante debe resolver mediante la generación de un modelo matemático, fortaleciendo así el desarrollo de capacidades productivas y ciudadanas. Es importante que se aproveche este momento para enfatizar en el uso adecuado de los recursos naturales.

Observación: Es importante hacer énfasis al estudiante que para algunos de estos problemas, la solución tiene sentido para valores de x mayores o iguales a cero. Es importante que se identifiquen y se justifique la razón.

Tarea: página 91 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 4. Paralelismo y ángulos de un polígono

Competencia de la Unidad

Utilizar la relación entre ángulos internos y externos de los polígonos, así como de los ángulos entre paralelas para caracterizar figuras y resolver situaciones del entorno.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen del prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Suma de los ángulos internos y externos de un polígono	1	1. Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1
	1	2. Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2
	1	3. Suma de los ángulos externos de un polígono
	1	4. Suma de los ángulos internos de un polígono regular
2. Rectas paralelas y ángulos	1	1. Ángulos opuestos por el vértice
	1	2. Ángulos correspondientes y ángulos alternos
	1	3. Caracterización de los ángulos correspondientes
	1	4. Caracterización de los ángulos alternos
	1	5. Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo
	1	6. Elementos de una demostración
	1	7. Aplicación de las características de los ángulos entre paralelas
	1	Prueba de la Unidad 4

11 horas clase + prueba de la Unidad 4

Puntos esenciales de cada lección

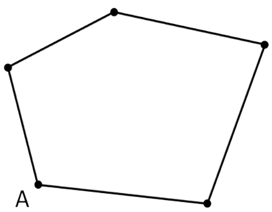
Lección 1: Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
A partir del proceso de triangulación de un polígono aprendido en Educación Básica, se deduce la fórmula para el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados, luego utilizando este hecho, se deduce la suma de los ángulos externos de un polígono. Además se hace énfasis en el caso particular de los polígonos regulares.

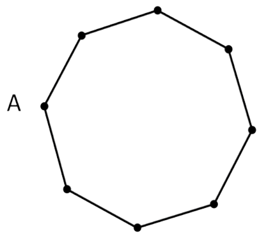
Lección 2: Rectas paralelas y ángulos
Esta lección se inicia con el estudio de los ángulos opuestos estudiados en Educación Básica, se establecen las relaciones entre cada par de ángulos opuestos, además para determinar el valor de cada ángulo dado se hace uso de la relación entre los ángulos suplementarios. Luego, se analiza la relación entre los ángulos que se forman cuando dos paralelas son cortadas por una secante, y el resultado es utilizado para demostrar uno de los teoremas matemáticos más importantes y para resolver situaciones del entorno.

1.1 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 1

P Trazando las diagonales desde el vértice A, divide estos polígonos en triángulos y determina:

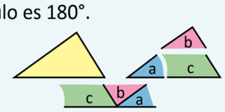
a) ¿Cuánto suman los ángulos internos del pentágono?
b) ¿Cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman?
c) ¿Cuánto suman los ángulos internos del octágono?
d) ¿De cuánto es la diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forma?



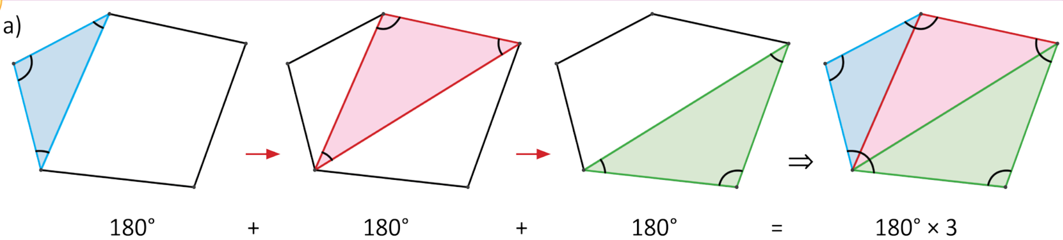


Se puede dividir el polígono en triángulos trazando todas las diagonales posibles desde uno de sus vértices.

Recuerda que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



S a)



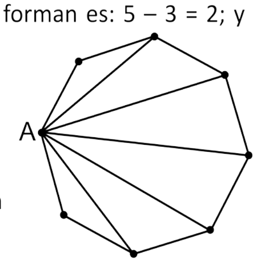
El pentágono queda divido en 3 triángulos. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces:

Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° + 180° + 180° = 180° × 3.

b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos que se forman es: 5 – 3 = 2; y además, los ángulos internos del pentágono suman 180° × (5 – 2).

c) En el octágono se forman 6 triángulos, de donde se obtiene que la suma de los ángulos internos es 180° × 6.

d) La diferencia del número de lados y la cantidad de triángulos que se forman es: 8 – 6 = 2.



C En todo polígono, al trazar las diagonales se forma un total de triángulos igual al número de lados menos 2; por tanto, la suma de los ángulos internos para un polígono de n lados es 180° × (n – 2).

Encuentra la suma de los ángulos internos de

Un eneágono tiene 9 lados y un dodecágono tiene 12 lados.

a) Un eneágono
180°(9 – 2) = 180°(7)

b) Un dodecágono
180°(12 – 2) = 180°(10)

Indicador de logro

1.1 Determina la suma de los ángulos internos de un polígono por triangulación.

Secuencia

En la Unidad 2 de quinto grado se utilizó por primera vez el proceso de triangulación para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono. Para esta clase se busca recordar esa estrategia para deducir una expresión matemática que le permita calcular la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera sin utilizar siempre el proceso de triangulación.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se utiliza el proceso de triangulación de un polígono para calcular la suma de los ángulos de un polígono y a partir de este proceso deducir una expresión matemática que permita determinar la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera.

Ⓡ Se presentan dos casos particulares de polígonos para que se utilice la expresión matemática que se encuentra en la conclusión y calcular de manera práctica la suma de los ángulos internos para cada uno de los polígonos indicados.

Solución de algunos ítems:

Es importante enfatizar que en la solución de los ejercicios de fijación, ya no es necesario triangular, sino únicamente aplicar la fórmula que se presenta en la Conclusión.

1. Para el eneágono (tiene 9 lados), al aplicar la fórmula se tiene:
   180°(9 – 2) = 180°(7).

2. Para el dodecágono (tiene 12 lados), al aplicar la fórmula se tiene:
   180°(12 – 2) = 180°(10).

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no recuerdan los nombres particulares que reciben los polígonos de acuerdo al número de lados, se puede dejar como actividad exaula investigar los nombres de los polígonos que son más usados.

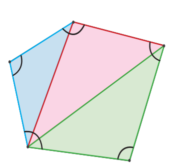
Fecha:

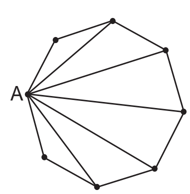
U4 1.1

Ⓟ Determina:

a) La suma de los ángulos internos del pentágono.
b) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos.
c) La suma de los ángulos internos del octágono.
d) La diferencia entre el número de lados y el número de triángulos.

Ⓢ





a) 180° + 180° + 180° = 180° × 3
b) 5 – 3 = 2

c) 180° × 6
d) 8 – 6 = 2

Ⓡ a) 180° × (9 – 2) = 180° × 7

b) 180° × (12 – 2) = 180° × 10

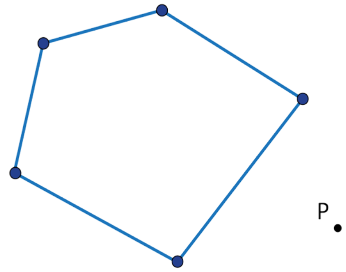
Tarea: página 94 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Suma de los ángulos internos de un polígono, parte 2

P

Encuentra 3 maneras distintas de triangular el pentágono para determinar la suma de sus ángulos internos.

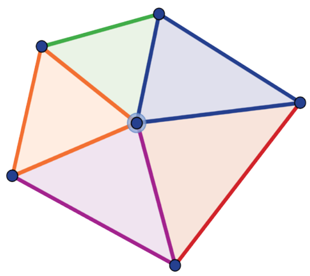
a) Desde un punto interior
b) Desde un punto del borde
c) Desde un punto exterior P
d) Compara los resultados con los obtenidos en la clase anterior



S

Considerando los tres casos se tiene:

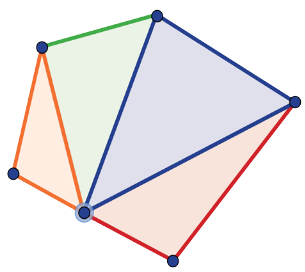
a) Se coloca un punto dentro del pentágono y desde ahí, se trazan segmentos a cada uno de los vértices para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 360°; pues se le resta el ángulo que se forma en el punto interno seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 5 – 180° × 2
= 180° × 3 = 540°

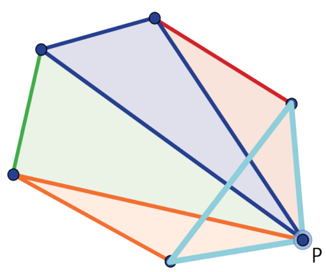
b) Se coloca un punto sobre cualquiera de los lados del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices no adyacentes para triangularlo.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta el ángulo llano que se forma en el punto del borde que fue seleccionado.

Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

c) Se coloca un punto fuera del pentágono y desde ahí se trazan segmentos a cada uno de los vértices.



Suma de los ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°; pues se le resta la suma de los ángulos internos del triángulo que se forma con el punto externo que fue seleccionado y el lado del pentágono.

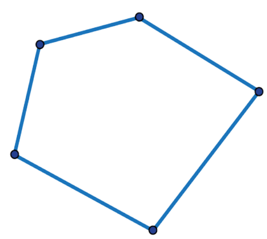
Suma de ángulos internos del pentágono = 180° × 4 – 180°
= 180° × 3 = 540°

d) Al comparar los resultados obtenidos en los tres literales anteriores, se observa que son exactamente iguales entre sí e iguales a los resultados de la clase anterior.

C La suma de los ángulos internos de un polígono se puede determinar utilizando distintas estrategias de triangulación, esto puede ser:

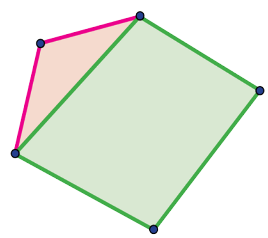
a) Desde un vértice cualquiera cuidando que las diagonales que se trazan no se corten entre sí.
b) Triangulando desde un punto interno al polígono.
c) Triangulando desde un punto sobre el borde del polígono.
d) Triangulando desde un punto externo del polígono.

E Determina la suma de los ángulos internos del pentágono, utilizando una estrategia distinta a las ya utilizadas.



Piensa en dividir el pentágono en cuadriláteros y/o triángulos.

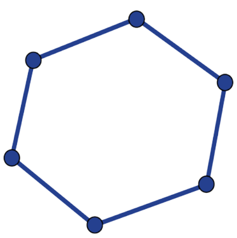
Se puede dividir en un cuadrilátero y un triángulo y luego determinar la suma de los ángulos.



Suma de ángulos internos = 180° + 360°
= 180°+ 2 × 180°
= 3 × 180°

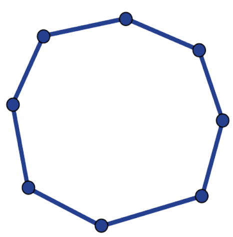
Encuentra la suma de los ángulos internos de

Un hexágono



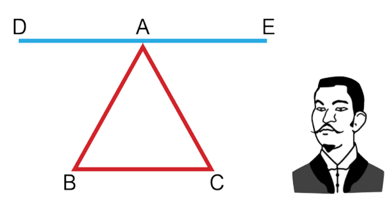
$180°(6 - 2) = 180°(4)$

Un octágono



$180°(8 - 2) = 180°(6)$

La figura de Pitágoras en los comienzos de la matemática es central por haber relacionado, en cierto modo, los problemas aritméticos que dependen de números, con los problemas geométricos relacionados con figuras; además de ello existen dos resultados importantes que debemos a Pitágoras o a su escuela, uno de ellos es: "En todo triangulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos".



Hazlo utilizando al menos 2 de las estrategias aprendidas en esta clase.

Indicador de logro

1.2 Utiliza diferentes estrategias para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono por triangulación.

Secuencia

En la clase anterior se dedujo la expresión matemática que permite determinar la suma de los ángulos internos de un polígono utilizando el proceso de triangulación desde un vértice; en el desarrrollo de esta clase se pretende que el estudiante descubra que el proceso de triangulación de un polígono se puede realizar de distintas maneras; pero que al final siempre se obtiene el mismo resultado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Triangular un pentágono utilizando diferentes puntos de referencia y verificar que siempre se obtiene el mismo resultado. También se busca comparar con el resultado de la clase anterior para comprobar que el resultado no depende del punto de referencia utilizado para triangular.

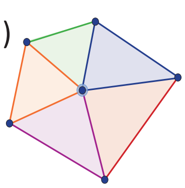
Ⓒ Fijar el proceso de cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono utilizando estrategias de triangulación con distintos puntos de referencia.

Fecha: **U4 1.2**

Ⓟ Determina la suma de los ángulos internos triangulando desde

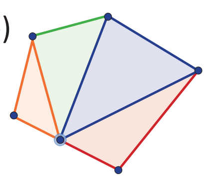
a) Un punto interior.
b) Un punto del borde.
c) Un punto exterior P.
d) Compara los resultados, con los de la clase anterior.

Ⓢ a)



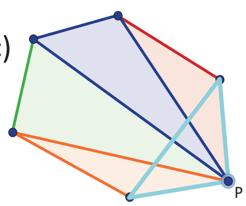
Suma
$= 180° \times 5 - 180° \times 2$
$= 180° \times 3 = 540°$

b)



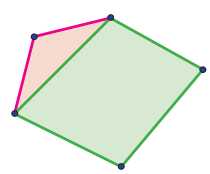
Suma
$= 180° \times 4 - 180° =$
$180° \times 3 = 540°$

c)



Suma
$= 180° \times 4 - 180°$
$= 180° \times 3 = 540°$

Ⓔ Utiliza una estrategia distinta para determinar la suma de los ángulos internos del pentágono.



Suma
$=180° + 360°$
$= 180° + 2 \times 180°$
$= 3 \times 180°$

Tarea: página 95 del Cuaderno de Ejercicios.

Continuación de la clase 1.2

Observaciones:
Es importante considerar que en la solución de estas situaciones, no todos los estudiantes necesariamente van a coincidir con la estrategia. Lo importante es que independientemente de la estrategia utilizada, el resultado siempre sea el mismo.

Posibles dificultades:
Es posible que tengan dificultades con el tiempo para triangular especialmente en el caso donde se tiene como referencia al punto externo, para facilitar el proceso se pueden llevar recortes del pentágono para que los peguen y los triangulen.

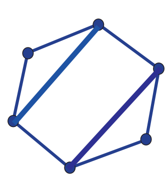
Fecha:

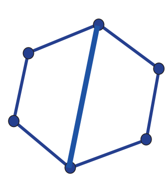
U4 1.2

Continuación

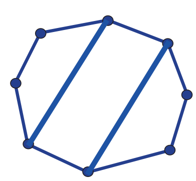
Ⓡ Encuentra la suma de los ángulos internos de:

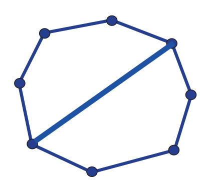
Un hexágono





Un octágono





Suma
$= 180° \times 2 + 360°$
$= 180° \times 2 + 180° \times 2$
$= 180° \times 4$

Suma
$= 360° + 360°$
$= 180° \times 2 + 180° \times 2$
$= 180° \times 4$

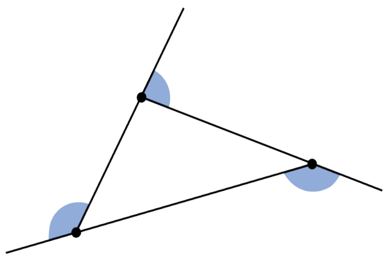
Suma
$= 360° + 360° + 360°$
$= 360° \times 3$
$= (180° \times 2) \times 3$
$= 180° \times 6$

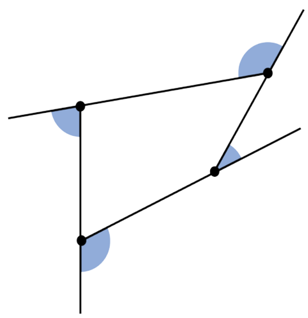
Suma
$= 180° \times (5-2) + 180°(5 - 2)$
$= 180° \times 3 + 180° \times 3$
$= 180° \times 6$

1.3 Suma de los ángulos externos de un polígono

P

Encuentra la suma de los ángulos externos de estos polígonos.

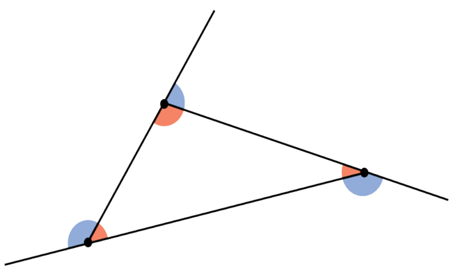




Un ángulo externo es el que se forma por un lado del polígono y la prolongación del lado contiguo.

En la suma de los ángulos externos se toma solo uno de cada vértice.

S



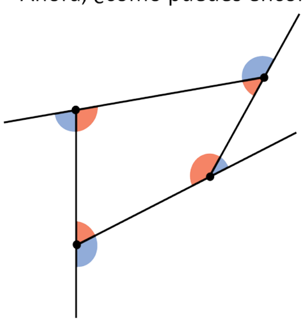
En cada uno de los vértices del triángulo se forma un ángulo de 180°, al sumar su ángulo interno con el repectivo ángulo externo. Cuando se agrega la suma de los ángulos internos y externos de los otros vértices, se tiene 180° × 3.

Pero 180° × 3 contiene la suma de los ángulos internos 180° × (3 – 2); por tanto, la suma de los ángulos externos de un triángulo es:

$$180° \times 3 - 180°(3 - 2) = 180° \times [3 - (3 - 2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°$$

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Ahora, ¿cómo puedes encontrar la suma de los ángulos externos del siguiente cuadrilátero?



En el cuadrilátero cada ángulo interno junto al respectivo externo suman 180°; por tanto, se tiene 180° × 4 y al restarle los ángulos internos: 180° × (4 – 2), se tiene $180° \times 4 - 180° \times (4 - 2) = 180° \times [4 - (4 - 2)]$
$$= 180° \times 2 = 360°.$$

La suma de los ángulos externos de un cuadrilátero es 360°.

C

- La suma de los ángulos externos de un polígono no depende del número de lados.
- La suma de los ángulos externos de un polígono es 360°.

Encuentra la suma de los ángulos externos de

a) Un pentágono
360°

b) Un hexágono
360°

Indicador de logro

1.3 Determina la suma de los ángulos externos de un polígono.

Secuencia

En las dos clases anteriores se ha practicado el cálculo de la suma de los ángulos internos de un polígono, en esta clase se determinará la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera, luego se generalizará para cualquier polígono.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la suma de los ángulos externos de dos polígonos con número de lados diferentes para ilustrar que la suma de los ángulos de un polígono es siempre 360°.

Ⓒ Fijar el proceso de cálculo de la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera.

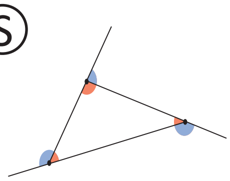
Observación:
Es importante hacer énfasis en que la suma de los ángulos externos de un polígono es siempre 360°, puede permitirse el cálculo en esta clase únicamente para efectos de fijación.

Fecha:

U4 1.3

Ⓟ Encuentra la suma de los ángulos externos de los polígonos dados:
a) El triángulo
b) El cuadrilátero

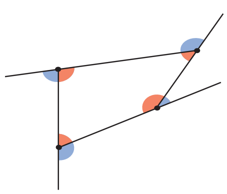
Ⓢ



En cada vértice del triángulo, se forma un ángulo de 180°.
Pero los ángulos internos suman $180° \times (3 - 2)$.

$$180° \times 3 - 180°(3 - 2) = 180° \times [3 - (3 - 2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°.$$

Para el cuadrilátero se tiene:



$$180° \times 4 - 180° \times (4 - 2)$$
$$= 180° \times [4 - (4 - 2)]$$
$$= 180° \times 2 = 360°.$$

La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°.

Ⓡ a) Para el pentágono: 360°
b) Para el hexágono: 360°

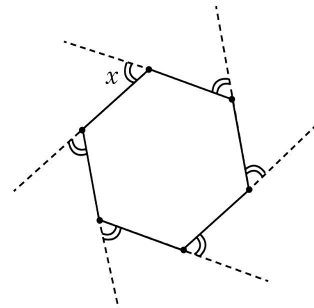
Tarea: página 96 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Suma de los ángulos internos de un polígono regular

P

Para el hexágono regular que se muestra determina:

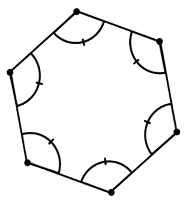
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de x.



Un polígono regular tiene todos sus ángulos internos iguales.

S

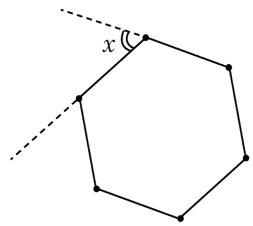
a)



Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.

b)



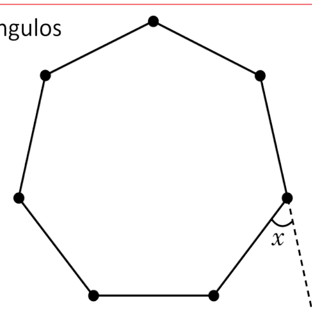
A partir del literal a) se tiene que cada ángulo interno mide 120°. Como x es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

C

En un polígono regular todos los ángulos internos son iguales y la suma es igual a $180° \times (n - 2)$. Además, todos los ángulos externos, también son iguales entre sí.

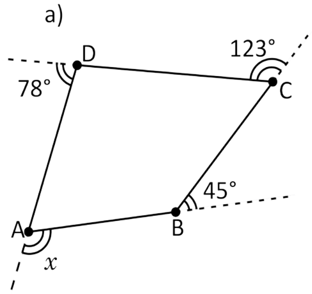
1. Para el heptágono regular determina la medida de cada uno de sus ángulos internos y el valor de x.

$\frac{180°(7-2)}{7} = 128.57$; medida de cada ángulo interno $x = 51.43°$



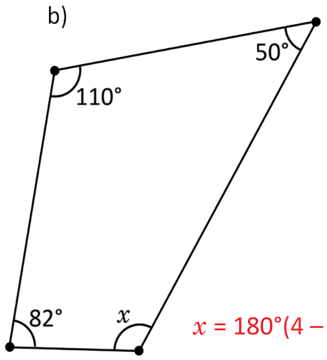
2. Encuentra la medida del ángulo x en cada caso.

a)



$x = 360° - (78° + 45° + 123°)$

b)



$x = 180°(4 - 2) - (50° + 82° + 110°)$

Utiliza tus conocimientos sobre la suma de los ángulos internos y externos de un cuadrilátero.

Indicador de logro

1.4 Determina la medida de ángulos internos y externos de un polígono regular.

Secuencia

Anteriormente se trabajó con la suma de los ángulos externos de un polígono; en esta clase, se trabajará con polígonos regulares, esta característica permite conocer con facilidad el valor de cada ángulo interno del polígono debido a que todos son iguales y de igual forma para los ángulos externos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la suma de los ángulos internos de un polígono para determinar la medida de cada ángulo interno, luego utilizando este resultado y los ángulos suplementarios calcular la medida de cada ángulo externo, considerando que por ser regular todos son iguales.

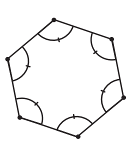
Ⓒ Confirmar el hecho de que en un polígono regular todos los ángulos internos son iguales entre sí, así como los ángulos externos y que la suma de los ángulos se determina de la misma manera que un polígono irregular.

En el numeral 1, practicar lo aprendido en la clase sobre los ángulos de los polígonos regulares; mientras que en el numeral 2 utilizar todo lo aprendido en las clases anteriores sobre la suma de los ángulos internos y/o externos. En el numeral 1, puede hacerse uso de la suma de los ángulos externos para determinar el valor de x, tal como se muestra a continuación: $\frac{360°}{7} = 51.43°$.

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no logran determinar el valor solicitado en el numeral 2, se indica que utilicen la suma de los ángulos internos y/o externos para determinar el valor particular de un ángulo, para ello se utilizan operaciones conocidas; por ejemplo, para el literal a) se suman los valores conocidos y se le resta el resultado a 360°.

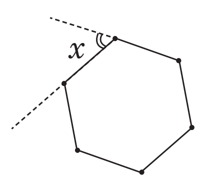
Fecha: **U4 1.4**

Ⓟ Para el hexágono regular dado, determina:
a) La medida de cada uno de sus ángulos internos.
b) El valor de x.

Ⓢ 

Los ángulos internos del hexágono suman $180° \times (6 - 2) = 720°$, por tanto:

Cada ángulo interno mide $\frac{720°}{6} = 120°$.



Como x es un ángulo externo, entonces $x + 120° = 180°$, por tanto $x = 60°$.

Ⓡ 1. Para el heptágono
$180° \times (7 - 2) = 900°$, entonces

$\frac{900°}{7} = 128.57°$

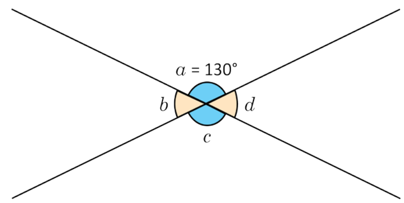
$x = 51.43°$

Tarea: página 97 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Ángulos opuestos por el vértice

P

Si el $\measuredangle a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?



Dos ángulos son opuestos por el vértice si uno de ellos tiene como lados la prolongación de los lados del otro.

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

S

Se tiene que $a + b = 180°$, por ser suplementarios, entonces el $\measuredangle b = 50°$.

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle a = \measuredangle c\\ \measuredangle b = \measuredangle d\end{array}\right\}\text{por ser opuestos por el vértice.}$$

Se pueden encontrar las medidas de los ángulos formados en un vértice común, utilizando los ángulos opuestos por el vértice y los suplementarios.

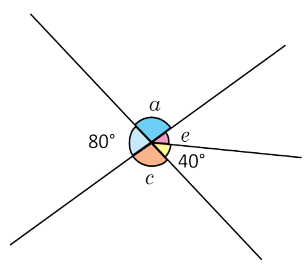
Por tanto, $\measuredangle a = \measuredangle c = 130°$ y $\measuredangle b = \measuredangle d = 50°$.

C

Cuando se tienen dos rectas que se intersectan, se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice, cuyas medidas se pueden determinar conociendo únicamente el valor de uno de ellos.

E

Determina la medida de los ángulos indicados.



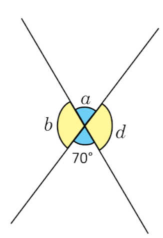
$\measuredangle c + 80° = 180°$, por ser suplementarios, entonces el $\measuredangle c = 100°$.

$$\left.\begin{array}{r}\measuredangle a = \measuredangle c\\ \measuredangle e + 40° = 80°\end{array}\right\}\text{por ser opuestos por el vértice.}$$

Por tanto, $\measuredangle a = \measuredangle c = 100°$ y $\measuredangle e = 80° - 40° = 40°$.

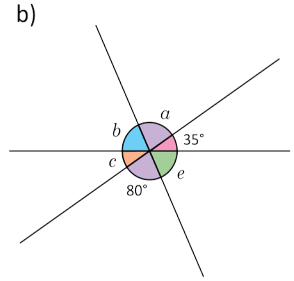
Determina la medida de los ángulos que se indican en cada literal.

a)



$\measuredangle a = 70°$
$\measuredangle d = 110°$
$\measuredangle b = 110°$

b)



$\measuredangle e = 65°$
$\measuredangle c = 35°$
$\measuredangle b = 65°$
$\measuredangle a = 80°$

La tradición matemática griega, instaurada por Pitágoras, es la base de los estudios matemáticos de la Academia de Platón y en manos de Euclides alcanza el carácter de modelo geométrico canónico en el texto *Los Elementos*. En la proposición I. 32 del primer libro de este texto, se establece que "Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, juntos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos", aunque Pitágoras ya había demostrado este teorema mediante el uso de paralelas.

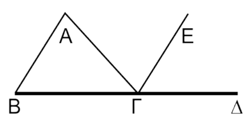


Ilustración de la demostración I. 32, según Euclides.

Unidad 4

Indicador de logro

2.1 Relaciona los ángulos opuestos por el vértice.

Secuencia

En Educación Básica, se aprendió sobre los ángulos opuestos por el vértice, suplementarios, etc., en esta clase se utilizarán los conocimientos sobre esos tipos de ángulos formados por dos rectas que se cortan, para determinar la medida de cada uno de ellos conociendo el valor de al menos un ángulo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar el valor de los ángulos formados entre dos rectas secantes, utilizando la relación entre ángulos opuestos por el vértice y suplementarios, cuando se conoce la medida de un ángulo.

Ⓒ Resolver un caso en el que además de las dos rectas secantes, se traza un segmento adicional con el que se forma una partición, generando un ángulo adicional.

Practicar el proceso desarrollado tanto en el Problema inicial como en el ejemplo adicional, y el literal b) con una pequeña variante; pero siempre resolverá utilizando las mismas relaciones.

Solución de algunos ítems:

Por ser opuestos por el vértice

$\measuredangle a = 80°$

$\measuredangle c = 35°$

$\measuredangle e + 80° + 35° = 180°$

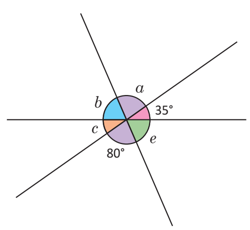
$\measuredangle e + 115° = 180°$

$\measuredangle e = 65°$

Por ser opuestos por el vértice.

$\measuredangle b = \measuredangle e$

$\measuredangle b = 65°$

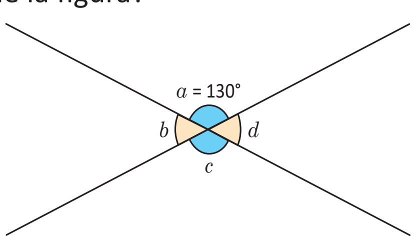


Posibles dificultades:
Es probable que se les haya olvidado la relación que existe entre los ángulos opuestos por el vértice formados por una secante, en ese caso es importante que revisen las pistas presentadas en el texto, y en caso de ser necesario hacer un recordatorio general, cuidando que no se invierta mucho tiempo en ello.

Fecha:

U4 2.1

Ⓟ Si el $\measuredangle a$ mide 130°, ¿cuánto miden los otros ángulos de la figura?

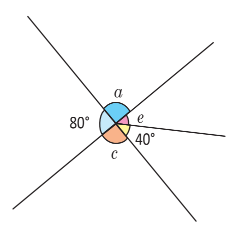


Ⓢ Se tiene que $\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$, por ser suplementarios, entonces el $\measuredangle b = 50°$.

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle a = \measuredangle c \\ \measuredangle b = \measuredangle d\end{array}\right\}$ Por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\measuredangle a = \measuredangle c = 130°$ y $\measuredangle b = \measuredangle d = 50°$.

Ⓔ



$\measuredangle c + 80° = 180°$

$\measuredangle c = 100°$

$\measuredangle a = \measuredangle c$
$\measuredangle e + 40° = 80°$ Por ser opuestos por el vértice.

Por tanto, $\measuredangle a = \measuredangle c = 100°$ y $\measuredangle e = 40°$.

Ⓡ a) $\measuredangle d = 180° - 70° = 110°$
$\measuredangle a = 70°$ y $\measuredangle b = 110°$

Tarea: página 98 del Cuaderno de Ejercicios.

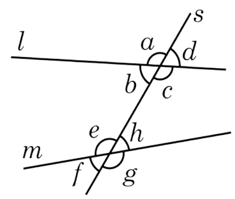
Lección 2

2.2 Ángulos correspondientes y ángulos alternos

P

En el siguiente diagrama identifica:

1. Los ángulos que se encuentran entre las rectas l y m.
2. Los ángulos que no están entre las rectas l y m.
3. Los ángulos que se encuentran a la izquierda o a la derecha de s.



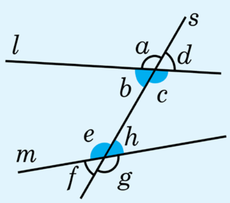
S

1. $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$ — Entre las rectas l y m.
2. $\measuredangle a$ y $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$ — Fuera de las rectas l y m.
3. $\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle f$ — A la izquierda de s.
   $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$ — A la derecha de s.

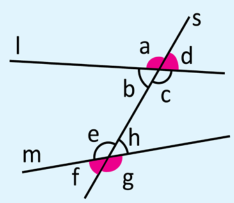
C

Los ángulos que se identificaron reciben nombres especiales, según la posición respecto a las rectas que los forman, tal como se muestra a continuación:

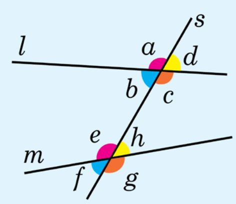
Internos:
$\measuredangle b$, $\measuredangle c$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle h$



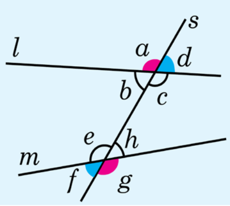
Externos:
$\measuredangle a$, $\measuredangle d$, $\measuredangle f$ y $\measuredangle g$



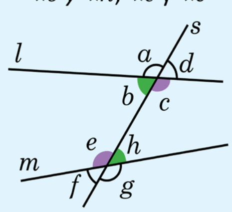
Correspondientes:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle e$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle h$,
$\measuredangle b$ y $\measuredangle f$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle g$



Alternos externos:
$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$, $\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

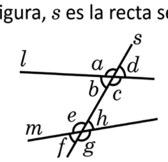


Alternos internos:
$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$, $\measuredangle c$ y $\measuredangle e$



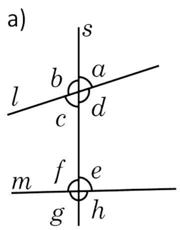
A la recta que corta a dos o más rectas se le llama secante.

En la figura, s es la recta secante.



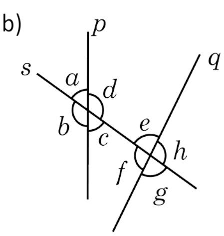
Para cada uno de los siguientes literales indica los ángulos internos, externos, alternos internos, alternos externos y correspondientes.

a)



Internos: c, d, f y e
Externos: b, a, g y h
Alternos internos: f y d, c y e
Alternos externos: b y h, a y g
Correspondientes: e y a, f y b, d y h, c y g.

b)



Internos: d, e, c y f
Externos: a, b, h y g
Alternos internos: f y d, c y e
Alternos externos: g y a, b y h
Correspondientes: e y a, f y b, d y h, c y g.

Indicador de logro

2.2 Identifica ángulos correspondientes y los alternos externos e internos.

Secuencia

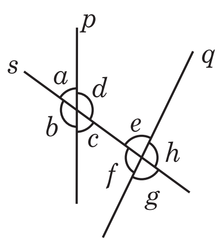
Ya se ha utilizado la relación entre ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas secantes, en esta clase se identificarán los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas que son cortadas por una tercera recta. Para facilitar la comprensión se puede indicar que si se elimina una de las rectas se tiene el caso de la clase anterior donde se identifican ángulos opuestos por el vértice y suplementarios.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Clasificar los ángulos considerando su posición respecto a las rectas, por ejemplo, si están entre las rectas, fuera de las rectas y si se encuentran a la izquierda o a la derecha de la secante.

Ⓒ Verificar la comprensión de la clasificación de los ángulos por su posición respecto a dos rectas cortadas por una secante. Es importante asegurarse de que todos sean capaces de clasificar los ángulos.

Solución de algunos ítems:



Internos:
$\sphericalangle c$, $\sphericalangle d$, $\sphericalangle f$ y $\sphericalangle e$

Externos:
$\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle g$ y $\sphericalangle h$

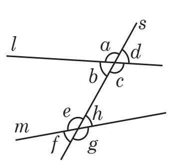
Alternos externos:
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$, $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$

Alternos internos:
$\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$, $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$

Correspondientes:
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle e$, $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle f$,
$\sphericalangle c$ y $\sphericalangle g$, $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle h$

Fecha: **U4 2.2**

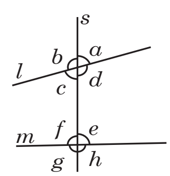
Ⓟ En el diagrama identifica los ángulos que se encuentran:
1. Entre las rectas l y m.
2. Fuera de las rectas l y m.
3. A la izquierda o a la derecha de s.

Ⓢ


1. $\begin{cases} \sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle c \\ \sphericalangle e \text{ y } \sphericalangle h \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sphericalangle a \text{ y } \sphericalangle d \\ \sphericalangle f \text{ y } \sphericalangle g \end{cases}$

3. A la izquierda de s.
   $\sphericalangle a$ y $\sphericalangle e$
   $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle f$
   A la derecha de s.
   $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle h$
   $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle g$

Ⓡ a)


Alternos externos:
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$, $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$

Alternos internos:
$\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$, $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$

Correspondientes:
$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle e$, $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle f$,
$\sphericalangle c$ y $\sphericalangle g$, $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle h$

Internos:
$\sphericalangle c$, $\sphericalangle d$, $\sphericalangle f$ y $\sphericalangle e$

Externos:
$\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle g$ y $\sphericalangle h$

Tarea: página 99 del Cuaderno de Ejercicios.

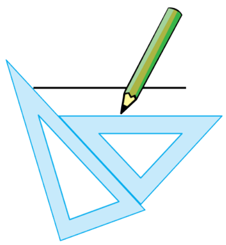
2.3 Caracterización de los ángulos correspondientes

P

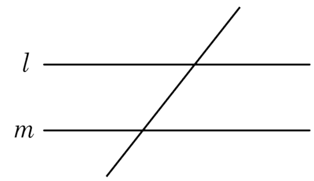
Construye dos rectas paralelas l y m, traza una secante, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

S

1. Se trazan las paralelas haciendo uso de las escuadras.

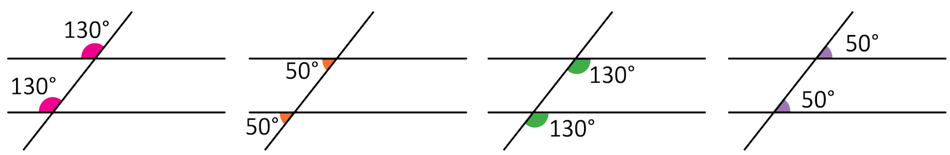


2. Se traza una recta secante a las paralelas construidas.



Para denotar el paralelismo entre dos rectas se utiliza el símbolo ||; es decir, si la recta m es paralela a la recta l se denota como $m \parallel l$.

3. Se miden los ángulos con el transportador.



C

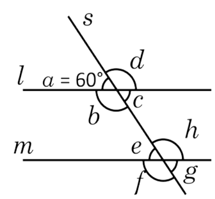
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, los ángulos correspondientes son iguales.

Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos correspondientes que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

E

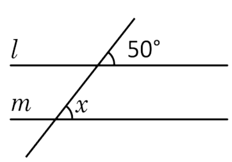
Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\sphericalangle a = 60°$, determina la medida de los ángulos restantes.

$\sphericalangle a + \sphericalangle d = 180°$, por ser suplementarios $\Rightarrow$ $\sphericalangle d = 120°$.
$\sphericalangle c = \sphericalangle a = 60°$ y $\sphericalangle b = \sphericalangle d = 120°$, por ser opuestos por el vértice.
$\sphericalangle e = \sphericalangle a = 60°$, $\sphericalangle g = \sphericalangle c = 60°$,
$\sphericalangle f = \sphericalangle b = 120°$ y $\sphericalangle h = \sphericalangle d = 120°$, por ser correspondientes.



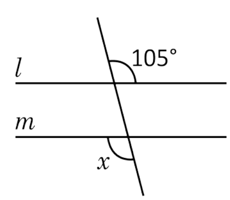
Dado que $l \parallel m$. Determina el valor de x.

a)



x = 50°, por ser correspondientes entre paralelas.

b)



x = 105°, por ser alternos externos.

Indicador de logro

2.3 Identifica la relación entre ángulos correspondientes.

Secuencia

En la clase anterior, se clasificaron los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante; en esta clase se determinará la relación entre dos ángulos correspondientes cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante. Es importante destacar que con el tipo de rectas que se utilizarán, los ángulos correspondientes son iguales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar los ángulos correspondientes formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante, realizando el proceso de construcción de las rectas paralelas y medición de los ángulos utilizando el estuche de geometría.

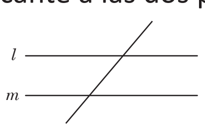
Ⓒ Mostrar que si las rectas son paralelas, se puede conocer el valor de todos los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante, conociendo el valor de uno de los ángulos y utilizando la relación entre los ángulos que han sido estudiados.

Posibles dificultades:
Si los estudiantes no pueden utilizar las escuadras o medir con precisión los ángulos utilizando el transportador, será necesario dar orientaciones generales.

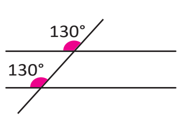
Fecha: **U4 2.3**

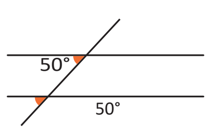
Ⓟ Cuando las rectas son paralelas, ¿qué relación existe entre la medida de los ángulos correspondientes?

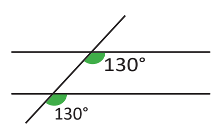
Ⓢ Se trazan dos paralelas y luego una recta secante a las dos paralelas construidas.

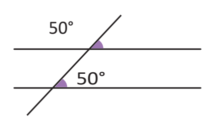


Se miden los ángulos con el transportador.

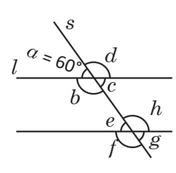








Ⓔ Dado que $l \parallel m$ y la medida del $\sphericalangle a = 60°$, determinar la medida de los ángulos restantes.



$\sphericalangle a + \sphericalangle d = 180°$,
$\sphericalangle d = 120°$.
$\sphericalangle c = \sphericalangle a = 60°$ y
$\sphericalangle b = \sphericalangle d = 120°$
$\sphericalangle e = \sphericalangle a = 60°$,
$\sphericalangle g = \sphericalangle c = 60°$,
$\sphericalangle f = \sphericalangle b = 120°$ y
$\sphericalangle h = \sphericalangle d = 120°$

Ⓡ a) $x = 50°$ b) $x = 105°$

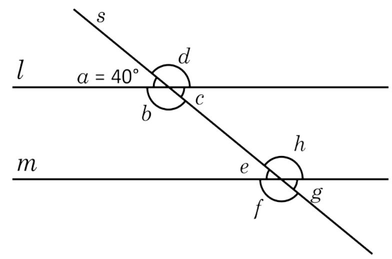
Tarea: página 100 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Caracterización de los ángulos alternos

P

Dado que las rectas l, m, son paralelas y s es la recta secante, realiza lo siguiente:

1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.



S

1. Calculando la medida de los ángulos

$\sphericalangle a + \sphericalangle b = 180°$, por ser suplementarios.

$\sphericalangle b = 140°$

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle c = \sphericalangle a = 40° \\ \sphericalangle d = \sphericalangle b = 140°\end{array}\right\}$ son opuestos por el vértice.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle e = \sphericalangle a = 40° \\ \sphericalangle f = \sphericalangle b = 140° \\ \sphericalangle h = \sphericalangle d = 140° \\ \sphericalangle g = \sphericalangle c = 40°\end{array}\right\}$ son correspondientes entre paralelas.

2.

$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle h \\ \sphericalangle c \text{ y } \sphericalangle e\end{array}\right\}$ son alternos internos y tienen igual medida entre sí.

$\sphericalangle b = \sphericalangle h = 140°$ y $\sphericalangle c = \sphericalangle e = 40°$.

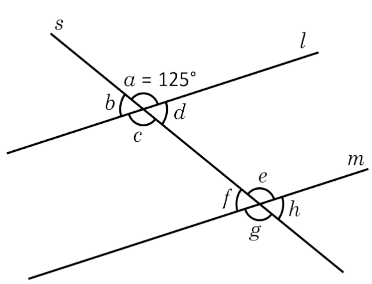
$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a \text{ y } \sphericalangle g \\ \sphericalangle d \text{ y } \sphericalangle f\end{array}\right\}$ son alternos externos y tienen igual medida entre sí.

$\sphericalangle a = \sphericalangle g = 40°$ y $\sphericalangle d = \sphericalangle f = 140°$.

C

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante, entonces los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales. Esta afirmación se cumple también en sentido contrario; es decir, si los ángulos alternos internos o los alternos externos que se forman entre dos rectas cortadas por una secante son iguales, entonces las rectas son paralelas.

1. Dado que $l \parallel m$, identifica los pares de ángulos alternos internos y alternos externos y determina sus respectivas medidas.



$b = 55°$

$d = 55°$

$f = 55°$

$h = 55°$

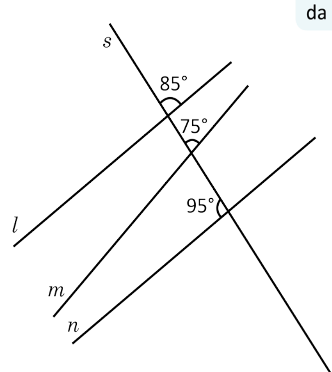
$c = 125°$

$g = 125°$

$e = 125°$

2. Identifica cuáles rectas son paralelas. Justifica tu respuesta.

Considera la medida de los ángulos.



l y n, son rectas paralelas, porque sus respectivos ángulos correspondientes son iguales.

Indicador de logro

2.4 Identifica la relación entre ángulos internos, externos, alternos internos y alternos externos, entre dos rectas paralelas.

Secuencia

Anteriormente se analizó la relación entre ángulos correspondientes; ahora se analizarán los valores de los ángulos alternos internos y alternos externos, para concluir formalizando la relación que existe entre ellos cuando las rectas son paralelas.

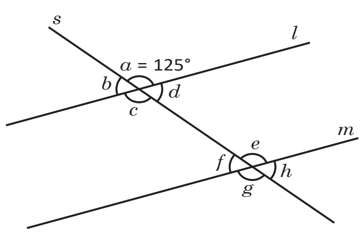
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar la medida de los ángulos utilizando lo aprendido en la clase anterior, y luego comparar los ángulos alternos internos y alternos externos para establecer la relación que existe entre ellos.

Ⓒ En el numeral 1, identificar los ángulos alternos internos y externos, luego determinar las medidas, relacionando los ángulos considerando el hecho de que las rectas son paralelas; mientras que en el numeral 2, aplicar el recíproco; es decir, identificar si hay ángulos que son iguales para determinar si hay rectas paralelas.

Solución de algunos ítems:

Ítem 1:



Son alternos internos:

$\measuredangle d$ y $\measuredangle f$

$\measuredangle c$ y $\measuredangle e$

$\measuredangle c = \measuredangle a = 125°$, por ser opuestos por el vértice,

$\measuredangle c = \measuredangle a = 125°$.

$\measuredangle d + \measuredangle a = 180°$, por ser suplementarios,

$\measuredangle d + 125° = 180°$,

$\measuredangle d = 55°$,

$\measuredangle f = \measuredangle d = 55°$.

Son alternos externos:

$\measuredangle a$ y $\measuredangle g$

$\measuredangle b$ y $\measuredangle h$

$\measuredangle g = \measuredangle a = 125°$

$\measuredangle b = \measuredangle d = 55°$, por ser opuestos por el vértice,

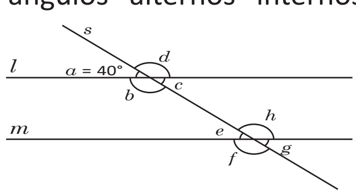
$\measuredangle h = \measuredangle b = 55°$.

Fecha: **U4 2.4**

Ⓟ Las rectas l, m, son paralelas y s es la recta secante.

1. Calcula el valor de los ángulos restantes.
2. Determina qué relación existe entre los pares de ángulos alternos internos y externos.

Ⓢ



1. $\measuredangle a + \measuredangle b = 180°$,
   $\measuredangle b = 140°$
   $\measuredangle c = \measuredangle a = 40°$
   $\measuredangle d = \measuredangle b = 140°$

   $\measuredangle e = \measuredangle a = 40°$
   $\measuredangle f = \measuredangle b = 140°$
   $\measuredangle h = \measuredangle d = 140°$
   $\measuredangle g = \measuredangle c = 40°$

2. $\left.\begin{array}{l}\measuredangle b \text{ y } \measuredangle h\\ \measuredangle c \text{ y } \measuredangle e\end{array}\right\}$ son alternos internos
   $\measuredangle b = \measuredangle h = 140°$ y $\measuredangle c = \measuredangle e = 40°$
   $\left.\begin{array}{l}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle g\\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle f\end{array}\right\}$ son alternos externos
   $\measuredangle a = \measuredangle g = 40°$ y $\measuredangle d = \measuredangle f = 140°$

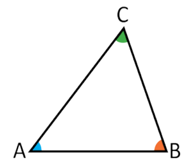
Ⓡ 1. $\measuredangle b = 180° - 125°$,
$\measuredangle b = 55°$
$\measuredangle d = 55°$
$\measuredangle h = 55°$
$\measuredangle f = 55°$
$\measuredangle c = 125°$, $\measuredangle g = 125°$
$\measuredangle e = 125°$

Tarea: página 101 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Demostración del teorema de ángulos internos de un triángulo

P

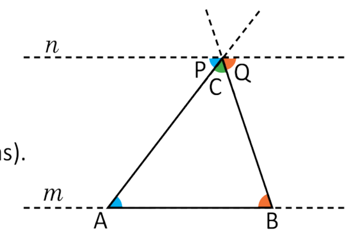
Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces ∢A + ∢B + ∢C = 180°.



Usa las relaciones de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

S

Se construye la recta m como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta n paralela a la recta m.



∢P + ∢C + ∢Q = 180° (por formar un ángulo llano).

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo).

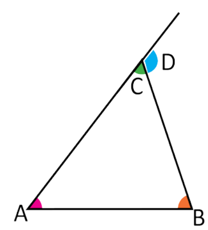
Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

C

Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, ha sido necesario construir una recta paralela y utilizar las propiedades de los ángulos entre paralelas.

1. Llena los espacios en blanco y demuestra que "si el ∢D es el ángulo externo del vértice C, entonces su medida es igual a la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo ABC"; así, ∢D = ∢A + ∢B.

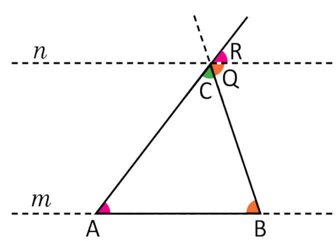
Solución.
Se quiere demostrar que



Si el ∢D, es el ángulo externo del ∢C, entonces ∢D= ∢A + ∢B.

Se construye la recta m como prolongación del lado AB del triángulo.
Por el vértice C se traza una recta n paralela a la recta m.

$n \parallel$ $\boxed{m}$ (por construcción).



∢Q = ∢B . . . (1) (por ser $\boxed{\text{alterno internos}}$ entre paralelas).

∢R = $\boxed{∢A}$ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas).

∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción).

∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)

Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

2. Busca otra forma para demostrar el teorema, puedes utilizar la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo.

Unidad 4

Indicador de logro

2.5 Utiliza la relación de los ángulos entre paralelas, para demostrar el teorema de los ángulos internos de un triángulo.

Secuencia

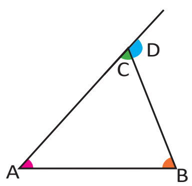
En la primer clase de esta unidad, se dedujo una expresión matemática para determinar la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera, en esta clase se demostrará que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a 180°, esto utilizando lo aprendido sobre ángulos entre rectas paralelas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Hacer trazos auxiliares que permitan utilizar la relación entre ángulos que se forman cuando una secante corta a dos rectas paralelas, para demostrar un resultado que se ha aceptado como cierto desde la Educación Básica.

Ⓒ En el numeral 1, practicar el proceso de demostración de un teorema, complementando las afirmaciones planteadas; mientras que en el numeral 2, se espera que utilice el resultado del Problema inicial para hacer la demostración indicada.

Solución de algunos ítems:



∢A + ∢B + ∢C = 180°, por ser ángulos internos de un triángulo.

∢C + ∢D = 180°, por ser suplementarios.

De donde se tiene:
∢A + ∢B + ∢C = ∢C + ∢D

Restando ∢C a ambos lados de la igualdad: ∢A + ∢B = ∢D.

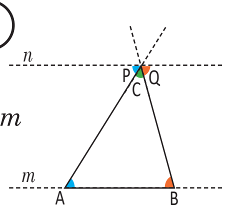
Por tanto, la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

Fecha: **U4 2.5**

Ⓟ Demuestra que si ∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos de un triángulo, entonces su suma es 180°.

Ⓢ

$n \parallel m$



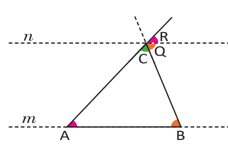
∢P + ∢C + ∢Q = 180°, por formar un ángulo llano.

∢P = ∢A; ∢Q = ∢B, por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Entonces, ∢A + ∢B + ∢C = 180° (sustituyendo)

Por tanto, la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180°.

Ⓡ



$n \parallel \boxed{m}$ (por construcción)

∢Q = ∢B . . . (1) (por ser $\boxed{\text{Alternos internos}}$ entre paralelas)

∢R = $\boxed{∢A}$ . . . (2) (por ser correspondientes entre paralelas)

∢D = ∢Q + ∢R . . . (3) (por construcción)

∢D = ∢B + ∢A Por (1), (2) y (3)

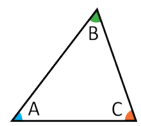
Tarea: página 102 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Elementos de una demostración

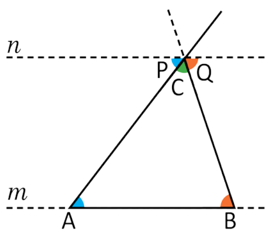
P Observa el ejemplo y determina los elementos de una demostración.

Si ∢A, ∢B y ∢C , son ángulos internos de un triángulo, entonces:

∢A + ∢B + ∢C = 180°



∢A, ∢B y ∢C, son ángulos internos del triángulo ABC. → **Hipótesis**



Afirmación	**Justificación**
1. $n \parallel m$.	Por construcción.
2. ∢P + ∢C + ∢Q = 180°	Por formar un ángulo llano.
3. ∢P = A; ∢Q = ∢B.	Por ser alternos internos entre paralelas.
4. ∢A + ∢B + ∢C = 180°	Por transitividad.

→ **Afirmaciones justificadas**

→ **Conclusión**

La demostración es un método que permite llegar a la conclusión partiendo de la hipótesis a través de afirmaciones que tienen una justificación matemática.

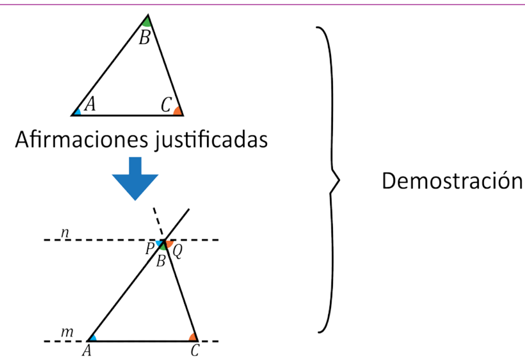
Una afirmación es una proposición con base lógica.

Una justificación es el argumento que hace cierta la afirmación.

S En la demostración hay:

1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

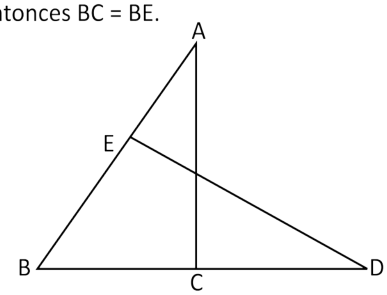
En la figura de la derecha se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.



C A la expresión de la forma "si ▭ , entonces ◯", se le llama **proposición**.
A la parte representada por ▭ se le llama **hipótesis**; y la representada por ◯ se llama **conclusión**.

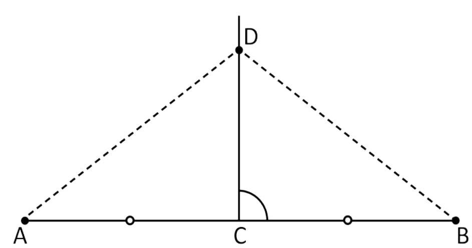
Identifica la hipótesis y la conclusión.

1. Si en la figura el ∢CAB = ∢BDE y AB = DB, entonces BC = BE.



Hipótesis: si ∢CAB = ∢BDE y AB = DB
Conclusión: BC = BE

2. Si el punto D está en la mediatriz del segmento AB entonces DA = DB.



Hipótesis: D está en la mediatriz del segmento AB
Conclusión: DA = DB

Indicador de logro

2.6 Identifica los elementos de una demostración matemática.

Secuencia

En la clase anterior se modeló el proceso de demostración de un teorema, en esta clase se define qué se entiende por demostración y cuáles son sus elementos. Es importante hacer énfasis en eso, pues en las siguientes unidades será utilizado para demostrar propiedades de figuras u otros teoremas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Identificar los elementos de una demostración, tomando como base el teorema demostrado en la clase anterior. Es importante enfatizar en cada uno de ellos para que los puedan diferenciar con facilidad.

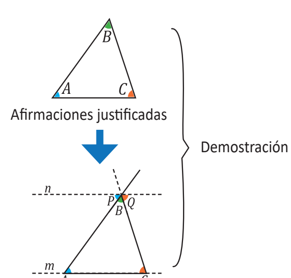
Ⓒ Dejar explícitos y con representación simbólica los elementos de una demostración que guíen el trabajo del estudiante.

Fecha: **U4 2.6**

Ⓟ Observa el ejemplo del libro y determina los elementos de una demostración.

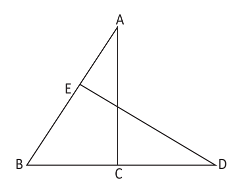
Ⓢ

1. Hipótesis.
2. Afirmaciones con justificaciones.
3. Conclusión.

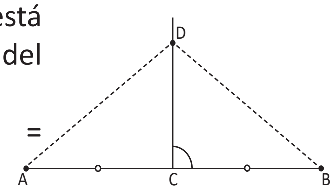


En la figura mostrada, se hace una representación gráfica del flujo de la demostración.

Ⓡ Hipótesis:
∢CAB = ∢BDE
y AB = DB
Conclusión: BC = BE.



Hipótesis: D está en la mediatriz del segmento AB.
Conclusión: DA = DB.



Tarea: página 103 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Aplicación de las características de los ángulos entre rectas paralelas

P

Carlos necesita diseñar una escalera con una altura de 560 cm, los escalones deben tener una contrahuella de 18 cm y un descansillo a la mitad de la altura. ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

Santiago Francisco Blondel fue un arquitecto y urbanista francés, uno de los más importantes teóricos de la arquitectura del siglo XVIII. Uno de sus aportes fue la "Ley de Blondel" que establece una relación entre las huellas y las contrahuellas en una escalera (ver figura 1). La Ley de Blondel establece la siguiente relación: 2CH + H = 64 cm donde, CH es la dimensión de la contrahuella y H es la dimensión de la huella.

La huella es la parte de la escalera donde pisas, mientras la contrahuella se determina por la distancia en altura entre 2 huellas.

En tramos que superen los 275 centímetros de altura se recomienda colocar un "Descansillo" (ver figura 2) que es una superficie llana en que termina cada tramo de una escalera.

El ángulo de inclinación se determina según la razón entre la huella y la contrahuella (ver figura 3). Generalmente las escaleras más cómodas tienen una inclinación comprendida entre 31° y 37°.

S

En primer lugar, es necesario considerar las condiciones del problema:

1. La altura de la escalera es de 560 cm.
2. Debe haber un descansillo a los 280 cm.
3. La contrahuella debe ser de 18 cm.

Lo primero es encontrar el número de contrahuellas:

$\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 15.56$, que se aproxima a 16.

Luego, se determina la medida real de la contrahuella:

$\frac{280 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de "Blondel" se tiene: $2 \times 17.5 + H = 64$

$H = 64 - 35$

$H = 29$

Por tanto, la huella debe medir 29 cm.

La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} = 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

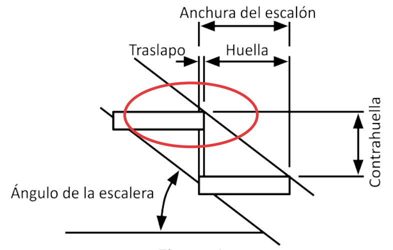


Figura 1

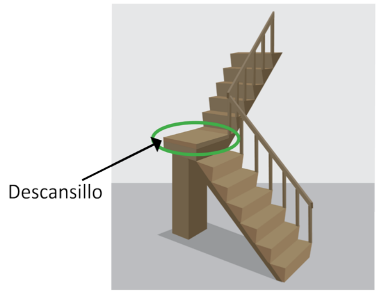


Figura 2

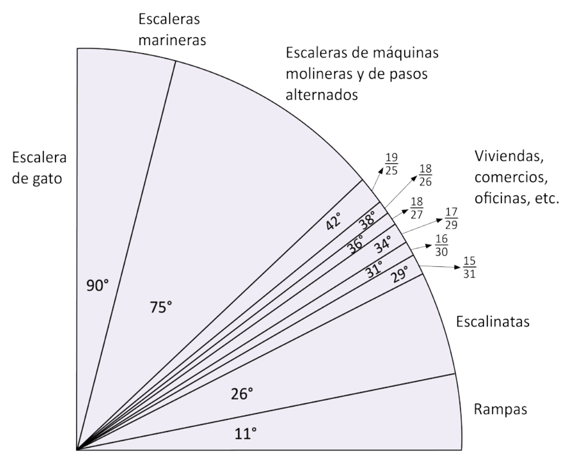
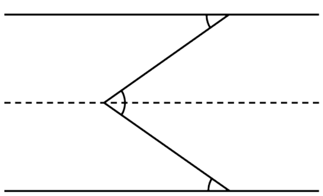
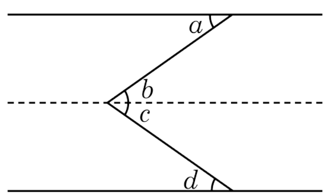


Figura 3

Trazando una paralela a nivel del descansillo tenemos que



Observa que se forman los siguientes ángulos:



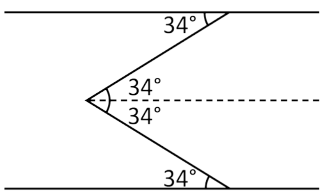
$\measuredangle d$ = 34° por la razón de la huella con la contra-huella.

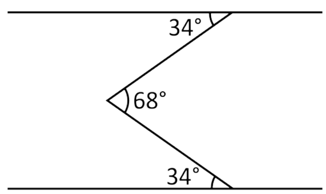
$\measuredangle d = \measuredangle c$ por ser alternos internos.

$\measuredangle b$ = 34° porque el segundo tramo de las escaleras debe tener la misma inclinación.

$\measuredangle b = \measuredangle a$ por ser alternos internos.

Luego $\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c = \measuredangle d$ = 34°

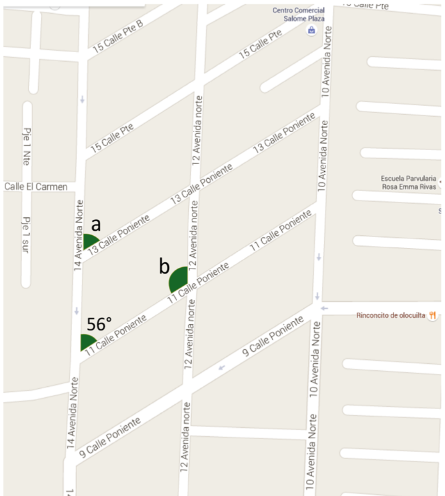




Con esta información, Carlos puede completar el informe de su diseño.

C Es posible aplicar las características de los ángulos entre paralelas para resolver problemas de la vida cotidiana que requieran el cálculo de ángulos desconocidos.

La Alcaldía Municipal de Santa Tecla necesita conocer la medida de los ángulos que se forman en la intersección entre las calles y avenidas. El topógrafo ya midió los ángulos cuyos datos se muestran en el mapa, considerando que desde la 9ª hasta la 13ª calle son paralelas, al igual que las avenidas desde la 10ª hasta la 14ª. Determina la medida de los ángulos indicados.



Indicador de logro

2.7 Resuelve desafíos o situaciones problemáticas en distintos contextos, mediante la aplicación de las relaciones que caracterizan a los ángulos entre paralelas.

Secuencia

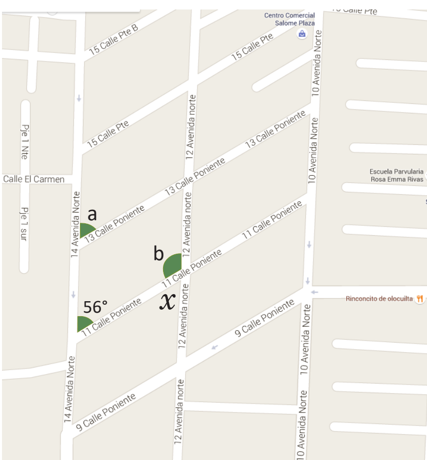
Hasta este momento se ha aprendido sobre la relación entre ángulos que se forman entre dos rectas que son cortadas por una secante, y se ha profundizado en el caso en que las rectas son paralelas; para esta clase se resuelve una situación del entorno en la que se utiliza la relación entre los ángulos y la ley de Blondel, esta última muy usada en la construcción de gradas para conectar los niveles de un edificio; además, se debe considerar la finalidad y el tipo de público que utilizará las gradas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar los datos que se necesitan para el diseño de una escalera, considerando ciertas características dadas. Es importante que se haga énfasis en los elementos a considerar y las razones por las que deben tener esas dimensiones.

Resolver una situación en un contexto diferente, pero siempre utilizando la relación entre ángulos entre paralelas, esto para verificar si se ha fijado el contenido desarrollado en la lección 2 de la unidad.

Solución de algunos ítems:



$\measuredangle a$ = 56°, por ser correspondientes entre paralelas.

$\measuredangle x$ = 56°, por ser alternos internos entre paralelas.

$\measuredangle b + \measuredangle x$ = 180°, por ser suplementarios.

$\measuredangle b$ = 180° – 56°
$\measuredangle b$ = 124°

Fecha: **U4 2.7**

Ⓟ ¿Qué cálculos tendrá que hacer Carlos para saber el número de escalones, la inclinación de las escaleras y las medidas de los ángulos que requiere para el diseño?

Ⓢ El número de contrahuellas: $\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} \approx 15.56$, que se aproxima a 16.

La medida real de la contrahuella:
$\frac{280 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 17.5$ cm

Aplicando la ley de "Blondel" se tiene:
2CH + H = 64 cm

2 × 17.5 + H = 64
H = 64 – 35
H = 29

Por tanto, la huella debe medir 29 cm.
La relación entre la huella y la contrahuella es $\frac{17.5}{29} \approx 0.6034$; que se aproxima a $\frac{17}{29}$ (ver figura 3).

Ⓡ $\measuredangle a$ = 56°, por ser correspondientes.
$\measuredangle b$ = 124°

Tarea: página 104 del Cuaderno de Ejercicios.

Anexos

Jornalización
Se presentan hojas para realizar la planificación anual en la asignatura de matemática, en ella se deben colocar las clases a impartir durante cada día lectivo.

Pruebas
Se proporcionan las pruebas de cada unidad, así como la prueba de trimestre, para que los docentes las fotocopien y apliquen a los estudiantes cuando corresponda.

Análisis de resultados
Cuando finalice el trimestre se pueden utilizar los cuadros para el análisis de los respectivos resultados.

Análisis de resultados del primer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del segundo trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del tercer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Jornalización año: 2020

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1		X	X					X			X
2		X			X			X			
3					X					X	
4	X			X			X			X	
5	X			X			X		X		
6						X			X		
7			X			X					X
8		X	X					X			X
9		X			X			X			
10					X					X	
11	X			X			X			X	
12	X			X			X		X		
13						X			X		
14			X			X					X
15		X	X					X			X
16		X			X			X			
17					X					X	
18	X			X			X			X	
19	X			X			X		X		
20	U1 1.1					X			X		
21	1.2		X			X					X
22		X	X					X			X
23		X			X			X			
24					X					X	
25	X			X			X			X	
26	X			X			X		X		
27						X			X		
28			X			X					X
29		X	X					X			X
30					X			X			
31					X					X	

Análisis de resultados del primer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Análisis de resultados del segundo trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Análisis de resultados del tercer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Jornalización año:											
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

JICA

Guía metodológica Tomo 1 Matemática 8